構造の数理

2012 年 01 月 19 日　第 11 回目の講義

Sakaé Fuchino (渕野 昌)

Dept. of Computer Sciences
Kobe University
(神戸大学大学院 システム情報学研究科)

http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/

Ramsey の定理 (2)

(21. Januar 2012 (01:53 JST) version)

神戸大学 2011 年度後期の講義

This presentation is typeset by pLATEX with beamer class.

問題. 任意の自然数 m に対して,

- k 個以上の頂点を持つすべてのグラフ G に, K_m か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる

が成り立つような数 k が存在するか？

YES! Ramsey (1928 年 (昭和 3 年))
— これよりもっと一般的な存在定理を証明している.

YES! Erdős & Szekeres (1935 年 (昭和 10 年))
— Ramsey の結果とは独立. k の値の評価を与えている.

Ramsey の定理 (の特殊な形)

問題. 任意の自然数 m に対して,

- k 個以上の頂点を持つすべてのグラフ G に, K_m か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる

が成り立つような数 k が存在するか？

YES! Ramsey (1928 年 (昭和 3 年))
— これよりもっと一般的な存在定理を証明している.

YES! Erdős & Szekeres (1935 年 (昭和 10 年))
— Ramsey の結果とは独立. k の値の評価を与えている.

Ramsey の定理 (の特殊な形)

問題． 任意の自然数 m に対して，

- k 個以上の頂点を持つすべてのグラフ G に，K_m か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる

が成り立つような数 k が存在するか？

YES! Ramsey (1928 年 (昭和 3 年))
— これよりもっと一般的な存在定理を証明している．

YES! Erdős & Szekeres (1935 年 (昭和 10 年))
— Ramsey の結果とは独立． k の値の評価を与えている．

Erdös-Szekeres の定理

定理． 任意の自然数 m に対して，

- k 個以上の頂点を持つすべてのグラフ G に，K_m か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる

が成り立つような数 k が存在する．

- 帰納法で証明する．
- 証明を帰納法に乗せるために，もとの主張ではなく，それよりさらに一般的でより強い主張を証明する，という前にも何度か出てきたパターンを用いる:

定理 (Erdös-Szekeres, 1935)． m と n を正の自然数とする．頂点の数が $\binom{n+m-2}{n-1}$ 以上の任意のグラフには，K_n か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる．

Erdös-Szekeres の定理

定理． 任意の自然数 m に対して，

- k 個以上の頂点を持つすべてのグラフ G に，K_m か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる

が成り立つような数 k が存在する．

- 帰納法で証明する．
- 証明を帰納法に乗せるために，もとの主張ではなく，それよりさらに一般的でより強い主張を証明する，という前にも何度か出てきたパターンを用いる:

定理 (Erdös-Szekeres, 1935)． m と n を正の自然数とする．頂点の数が $\binom{n+m-2}{n-1}$ 以上の任意のグラフには，K_n か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる．

定理. 任意の自然数 m に対して,

- k 個以上の頂点を持つすべてのグラフ G に, K_m か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる

が成り立つような数 k が存在する.

- 帰納法で証明する.
- 証明を帰納法に乗せるために, もとの主張ではなく, それよりさらに一般的でより強い主張を証明する, という前にも何度か出てきたパターンを用いる:

定理 (Erdös-Szekeres, 1935). m と n を正の自然数とする. 頂点の数が $\binom{n+m-2}{n-1}$ 以上の任意のグラフには, K_n か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる.

Erdös-Szekeres の定理

定理． 任意の自然数 m に対して，

- k 個以上の頂点を持つすべてのグラフ G に，K_m か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる

が成り立つような数 k が存在する．

- 帰納法で証明する．
- 証明を帰納法に乗せるために，もとの主張ではなく，それよりさらに一般的でより強い主張を証明する，という前にも何度か出てきたパターンを用いる:

定理 (Erdös-Szekeres, 1935)． m と n を正の自然数とする．頂点の数が $\binom{n+m-2}{n-1}$ 以上の任意のグラフには，K_n か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる．

Erdös-Szekeres の定理

定理. 任意の自然数 m に対して,

- k 個以上の頂点を持つすべてのグラフ G に, K_m か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる

が成り立つような数 k が存在する.

- 帰納法で証明する.
- 証明を帰納法に乗せるために, もとの主張ではなく, それよりさらに一般的でより強い主張を証明する, という前にも何度か出てきたパターンを用いる:

定理 (Erdös-Szekeres, 1935). m と n を正の自然数とする. 頂点の数が $\binom{n+m-2}{n-1}$ 以上の任意のグラフには, K_n か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる.

Erdös-Szekeres の定理 (2/3)

定理 (Erdös-Szekeres, 1935). m と n を正の自然数とする．頂点の数が $\binom{n+m-2}{n-1}$ 以上の任意のグラフには，K_n か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる．

- $\binom{k}{\ell}$ は，${}_kC_\ell$ と書くこともある．$\binom{k}{\ell}$ **は，k 個のものから ℓ 個選び出す選び方の総数である．**
- $\binom{k}{\ell} = \dfrac{k!}{(k-\ell)!\ell!}$ である．

▷ $k! = k \cdot (k-1) \cdots 2 \cdot 1$ は，k 個のものを一列にならべる並べ方の総数である．

▷ したがって，$\dfrac{k!}{(k-\ell)!}$ は k 個のものから ℓ 個のものを選んで一列に並べる並べ方の総数となる．

▷ よって，$\dfrac{k!}{(k-\ell)!\ell!}$ は k 個のものから ℓ 個のものを選ぶ選び方の総数になる．

Erdös-Szekeres の定理 (2/3)

定理 (Erdös-Szekeres, 1935). m と n を正の自然数とする．頂点の数が $\binom{n+m-2}{n-1}$ 以上の任意のグラフには，K_n か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる．

- $\binom{k}{\ell}$ は，${}_kC_\ell$ と書くこともある． $\binom{k}{\ell}$ **は，k 個のものから ℓ 個選び出す選び方の総数である．**
- $\binom{k}{\ell} = \dfrac{k!}{(k-\ell)!\ell!}$ である．
  - $k! = k \cdot (k-1) \cdots 2 \cdot 1$ は，k 個のものを一列にならべる並べ方の総数である．
  - したがって，$\dfrac{k!}{(k-\ell)!}$ は k 個のものから ℓ 個のものを選んで一列に並べる並べ方の総数となる．
  - よって，$\dfrac{k!}{(k-\ell)!\ell!}$ は k 個のものから ℓ 個のものを選ぶ選び方の総数になる．

Erdös-Szekeres の定理 (2/3)

定理 (Erdös-Szekeres, 1935). m と n を正の自然数とする．頂点の数が $\binom{n+m-2}{n-1}$ 以上の任意のグラフには，K_n か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる．

- $\binom{k}{\ell}$ は，${}_kC_\ell$ と書くこともある．$\binom{k}{\ell}$ **は，k 個のものから ℓ 個選び出す選び方の総数である．**
- $\binom{k}{\ell} = \dfrac{k!}{(k-\ell)!\ell!}$ である．
  - $k! = k \cdot (k-1) \cdots 2 \cdot 1$ は，k 個のものを一列にならべる並べ方の総数である．
  - したがって，$\dfrac{k!}{(k-\ell)!}$ は k 個のものから ℓ 個のものを選んで一列に並べる並べ方の総数となる．
  - よって，$\dfrac{k!}{(k-\ell)!\ell!}$ は k 個のものから ℓ 個のものを選ぶ選び方の総数になる．

Erdös-Szekeres の定理 (2/3)

定理 (Erdös-Szekeres, 1935). m と n を正の自然数とする．頂点の数が $\binom{n+m-2}{n-1}$ 以上の任意のグラフには，K_n か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる．

- $\binom{k}{\ell}$ は，${}_kC_\ell$ と書くこともある．$\binom{k}{\ell}$ **は，k 個のものから ℓ 個選び出す選び方の総数である．**
- $\binom{k}{\ell} = \dfrac{k!}{(k-\ell)!\ell!}$ である．
- $k! = k \cdot (k-1) \cdots 2 \cdot 1$ は，k 個のものを一列にならべる並べ方の総数である．
- したがって，$\dfrac{k!}{(k-\ell)!}$ は k 個のものから ℓ 個のものを選んで一列に並べる並べ方の総数となる．
- よって，$\dfrac{k!}{(k-\ell)!\ell!}$ は k 個のものから ℓ 個のものを選ぶ選び方の総数になる．

Erdös-Szekeres の定理 (2/3)

定理 (Erdös-Szekeres, 1935). m と n を正の自然数とする．頂点の数が $\binom{n+m-2}{n-1}$ 以上の任意のグラフには，K_n か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる．

- $\binom{k}{\ell}$ は，${}_kC_\ell$ と書くこともある．$\binom{k}{\ell}$ **は，k 個のものから ℓ 個選び出す選び方の総数である．**
- $\binom{k}{\ell} = \dfrac{k!}{(k-\ell)!\ell!}$ である．

▷ $k! = k \cdot (k-1) \cdots 2 \cdot 1$ は，k 個のものを一列にならべる並べ方の総数である．

▷ したがって，$\dfrac{k!}{(k-\ell)!}$ は k 個のものから ℓ 個のものを選んで一列に並べる並べ方の総数となる．

▷ よって，$\dfrac{k!}{(k-\ell)!\ell!}$ は k 個のものから ℓ 個のものを選ぶ選び方の総数になる．

定理 (Erdös-Szekeres, 1935). m と n を正の自然数とする．頂点の数が $\binom{n+m-2}{n-1}$ 以上の任意のグラフには，K_n か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる．

- $\binom{k}{\ell}$ は，${}_kC_\ell$ と書くこともある．$\binom{k}{\ell}$ **は，k 個のものから ℓ 個選び出す選び方の総数である．**
- $\binom{k}{\ell} = \dfrac{k!}{(k-\ell)!\ell!}$ である．

▷ $k! = k \cdot (k-1) \cdots 2 \cdot 1$ は，k 個のものを一列にならべる並べ方の総数である．

▷ したがって，$\dfrac{k!}{(k-\ell)!}$ は k 個のものから ℓ 個のものを選んで一列に並べる並べ方の総数となる．

▷ よって，$\dfrac{k!}{(k-\ell)!\ell!}$ は k 個のものから ℓ 個のものを選ぶ選び方の総数になる．

Erdös-Szekeres の定理 (2/3)

定理 (Erdös-Szekeres, 1935). m と n を正の自然数とする．頂点の数が $\binom{n+m-2}{n-1}$ 以上の任意のグラフには，K_n か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる．

- $\binom{k}{\ell}$ は，${}_kC_\ell$ と書くこともある．$\binom{k}{\ell}$ **は，k 個のものから ℓ 個選び出す選び方の総数である．**
- $\binom{k}{\ell} = \dfrac{k!}{(k-\ell)!\ell!}$ である．
  - $k! = k \cdot (k-1) \cdots 2 \cdot 1$ は，k 個のものを一列にならべる並べ方の総数である．
  - したがって，$\dfrac{k!}{(k-\ell)!}$ は k 個のものから ℓ 個のものを選んで一列に並べる並べ方の総数となる．
  - よって，$\dfrac{k!}{(k-\ell)!\ell!}$ は k 個のものから ℓ 個のものを選ぶ選び方の総数になる．

Erdös-Szekeres の定理 (2/3)

定理 (Erdös-Szekeres, 1935). m と n を正の自然数とする．頂点の数が $\binom{n+m-2}{n-1}$ 以上の任意のグラフには，K_n か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる．

- $\binom{k}{\ell}$ は，${}_kC_\ell$ と書くこともある．$\binom{k}{\ell}$ **は，k 個のものから ℓ 個選び出す選び方の総数である．**
- $\binom{k}{\ell} = \dfrac{k!}{(k-\ell)!\ell!}$ である．

▷ $k! = k \cdot (k-1) \cdots 2 \cdot 1$ は，k 個のものを一列にならべる並べ方の総数である．

▷ したがって，$\dfrac{k!}{(k-\ell)!}$ は k 個のものから ℓ 個のものを選んで一列に並べる並べ方の総数となる．

▷ よって，$\dfrac{k!}{(k-\ell)!\ell!}$ は k 個のものから ℓ 個のものを選ぶ選び方の総数になる．

Erdös-Szekeres の定理 (3/3)

定理 (Erdös-Szekeres, 1935)． m と n を正の自然数とする．頂点の数が $\binom{n+m-2}{n-1}$ 以上の任意のグラフには，K_n か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる．

- $\binom{k}{\ell}$ は，${}_kC_\ell$ と書くこともある．$\binom{k}{\ell}$ **は，k 個のものから ℓ 個選び出す選び方の総数である．**
- $\binom{k}{\ell} = \dfrac{k!}{(k-\ell)!\ell!}$ だから，$\binom{n+m-2}{n-1} = \dfrac{(n+m-2)!}{(m-1)!(n-1)!}$ である．
- Erdös-Szekeres の定理で，$n = m$ と置くと，

系． 頂点の数が $\binom{2m-2}{m-1}$ 以上の任意のグラフには，K_m か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる．

Erdös-Szekeres の定理 (3/3)

定理 (Erdös-Szekeres, 1935). m と n を正の自然数とする．頂点の数が $\binom{n+m-2}{n-1}$ 以上の任意のグラフには，K_n か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる．

- $\binom{k}{\ell}$ は，${}_kC_\ell$ と書くこともある．$\binom{k}{\ell}$ **は，k 個のものから ℓ 個選び出す選び方の総数である．**
- $\binom{k}{\ell} = \frac{k!}{(k-\ell)!\ell!}$ だから，$\binom{n+m-2}{n-1} = \frac{(n+m-2)!}{(m-1)!(n-1)!}$ である．
- Erdös-Szekeres の定理で，$n = m$ と置くと，

系. 頂点の数が $\binom{2m-2}{m-1}$ 以上の任意のグラフには，K_m か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる．

Erdös-Szekeres の定理 (3/3)

定理 (Erdös-Szekeres, 1935). m と n を正の自然数とする．頂点の数が $\binom{n+m-2}{n-1}$ 以上の任意のグラフには，K_n か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる．

- $\binom{k}{\ell}$ は，${}_kC_\ell$ と書くこともある．$\binom{k}{\ell}$ **は，k 個のものから ℓ 個選び出す選び方の総数である．**
- $\binom{k}{\ell} = \dfrac{k!}{(k-\ell)!\ell!}$ だから，$\binom{n+m-2}{n-1} = \dfrac{(n+m-2)!}{(m-1)!(n-1)!}$ である．
- Erdös-Szekeres の定理で，$n = m$ と置くと，

系. 頂点の数が $\binom{2m-2}{m-1}$ 以上の任意のグラフには，K_m か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる．

Erdös-Szekeres の定理 (3/3)

定理 (Erdös-Szekeres, 1935). m と n を正の自然数とする．頂点の数が $\binom{n+m-2}{n-1}$ 以上の任意のグラフには，K_n か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる．

- $\binom{k}{\ell}$ は，${}_kC_\ell$ と書くこともある．$\binom{k}{\ell}$ **は，k 個のものから ℓ 個選び出す選び方の総数である．**
- $\binom{k}{\ell} = \dfrac{k!}{(k-\ell)!\ell!}$ だから，$\binom{n+m-2}{n-1} = \dfrac{(n+m-2)!}{(m-1)!(n-1)!}$ である．
- Erdös-Szekeres の定理で，$n = m$ と置くと，

系. 頂点の数が $\binom{2m-2}{m-1}$ 以上の任意のグラフには，K_m か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる．

Erdös-Szekeres の定理の証明

定理 (Erdös-Szekeres, 1935). m と n を正の自然数とする．頂点の数が $\binom{n+m-2}{n-1}$ 以上の任意のグラフには，K_n か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる．

証明.

- $m=1$ **または** $n=1$ **の場合:** E_1 も K_1 も 1 点からなるグラフだから，任意のグラフに誘導された部分グラフとして埋め込める．したがって特に $\binom{n+m-2}{n-1}$ 以上の頂点を持つグラフに対し，この主張が成り立つ．
- $m=2$ **または** $n=2$ **の場合:** ▷ $m=2$ とする． E_2 は辺で繋がっていない 2 頂点だから，もし E_2 がグラフ G に埋め込めないなら，G は完全グラフである．したがって，$\binom{n+2-2}{n-1}=n$ 個以上の頂点を持つグラフに対して，E_2 か K_n のどちらかが誘導された部分グラフとして埋め込める． ▷ $n=2$ のときも同様: このときには K_2 が G に埋め込めないなら，G の頂点の数を k とすると，$G=E_k$ である．

Erdös-Szekeres の定理の証明

定理 (Erdös-Szekeres, 1935)． m と n を正の自然数とする．頂点の数が $\binom{n+m-2}{n-1}$ 以上の任意のグラフには，K_n か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる．

証明． ▶ **$m = 1$ または $n = 1$ の場合:** E_1 も K_1 も 1 点からなるグラフだから，任意のグラフに誘導された部分グラフとして埋め込める．したがって特に $\binom{n+m-2}{n-1}$ 以上の頂点を持つグラフに対し，この主張が成り立つ．

▶ **$m = 2$ または $n = 2$ の場合:** ▷ $m = 2$ とする． E_2 は辺で繋がっていない 2 頂点だから，もし E_2 がグラフ G に埋め込めないなら，G は完全グラフである．したがって，$\binom{n+2-2}{n-1} = n$ 個以上の頂点を持つグラフに対して，E_2 か K_n のどちらかが誘導された部分グラフとして埋め込める． ▷ $n = 2$ のときも同様: このときには K_2 が G に埋め込めないなら，G の頂点の数を k とすると，$G = E_k$ である．

Erdös-Szekeres の定理の証明

定理 (Erdös-Szekeres, 1935). m と n を正の自然数とする．頂点の数が $\binom{n+m-2}{n-1}$ 以上の任意のグラフには，K_n か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる．

証明．

- **$m = 1$ または $n = 1$ の場合:** E_1 も K_1 も 1 点からなるグラフだから，任意のグラフに誘導された部分グラフとして埋め込める．したがって特に $\binom{n+m-2}{n-1}$ 以上の頂点を持つグラフに対し，この主張が成り立つ．
- **$m = 2$ または $n = 2$ の場合:**
  - $m = 2$ とする． E_2 は辺で繋がっていない 2 頂点だから，もし E_2 がグラフ G に埋め込めないなら，G は完全グラフである．したがって，$\binom{n+2-2}{n-1} = n$ 個以上の頂点を持つグラフに対して，E_2 か K_n のどちらかが誘導された部分グラフとして埋め込める．
  - $n = 2$ のときも同様: このときには K_2 が G に埋め込めないなら，G の頂点の数を k とすると，$G = E_k$ である．

Erdös-Szekeres の定理の証明

定理 (Erdös-Szekeres, 1935). m と n を正の自然数とする．頂点の数が $\binom{n+m-2}{n-1}$ 以上の任意のグラフには，K_n か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる．

証明.

- **$m=1$ または $n=1$ の場合:** E_1 も K_1 も 1 点からなるグラフだから，任意のグラフに誘導された部分グラフとして埋め込める．したがって特に $\binom{n+m-2}{n-1}$ 以上の頂点を持つグラフに対し，この主張が成り立つ．
- **$m=2$ または $n=2$ の場合:**
  - $m=2$ とする． E_2 は辺で繋がっていない 2 頂点だから，もし E_2 がグラフ G に埋め込めないなら，G は完全グラフである．したがって，$\binom{n+2-2}{n-1}=n$ 個以上の頂点を持つグラフに対して，E_2 か K_n のどちらかが誘導された部分グラフとして埋め込める．
  - $n=2$ のときも同様: このときには K_2 が G に埋め込めないなら，G の頂点の数を k とすると，$G=E_k$ である．

Erdös-Szekeres の定理の証明

定理 (Erdös-Szekeres, 1935). m と n を正の自然数とする．頂点の数が $\binom{n+m-2}{n-1}$ 以上の任意のグラフには，K_n か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる．

証明.

- **$m=1$ または $n=1$ の場合:** E_1 も K_1 も 1 点からなるグラフだから，任意のグラフに誘導された部分グラフとして埋め込める．したがって特に $\binom{n+m-2}{n-1}$ 以上の頂点を持つグラフに対し，この主張が成り立つ．
- **$m=2$ または $n=2$ の場合:** ▷ $m=2$ とする． E_2 は辺で繋がっていない 2 頂点だから，もし E_2 がグラフ G に埋め込めないなら，G は完全グラフである．したがって，$\binom{n+2-2}{n-1}=n$ 個以上の頂点を持つグラフに対して，E_2 か K_n のどちらかが誘導された部分グラフとして埋め込める． ▷ $n=2$ のときも同様: このときには K_2 が G に埋め込めないなら，G の頂点の数を k とすると，$G=E_k$ である．

Erdös-Szekeres の定理の証明

定理 (Erdös-Szekeres, 1935). m と n を正の自然数とする．頂点の数が $\binom{n+m-2}{n-1}$ 以上の任意のグラフには，K_n か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる．

証明.

- **$m=1$ または $n=1$ の場合:** E_1 も K_1 も 1 点からなるグラフだから，任意のグラフに誘導された部分グラフとして埋め込める．したがって特に $\binom{n+m-2}{n-1}$ 以上の頂点を持つグラフに対し，この主張が成り立つ．
- **$m=2$ または $n=2$ の場合:** ▷ $m=2$ とする． E_2 は辺で繋がっていない 2 頂点だから，もし E_2 がグラフ G に埋め込めないなら，G は完全グラフである．したがって，$\binom{n+2-2}{n-1}=n$ 個以上の頂点を持つグラフに対して，E_2 か K_n のどちらかが誘導された部分グラフとして埋め込める． ▷ $n=2$ のときも同様: このときには K_2 が G に埋め込めないなら，G の頂点の数を k とすると，$G=E_k$ である．

Erdös-Szekeres の定理の証明

定理 (Erdös-Szekeres, 1935). m と n を正の自然数とする．頂点の数が $\binom{n+m-2}{n-1}$ 以上の任意のグラフには，K_n か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる．

証明.

- **$m=1$ または $n=1$ の場合:** E_1 も K_1 も 1 点からなるグラフだから，任意のグラフに誘導された部分グラフとして埋め込める．したがって特に $\binom{n+m-2}{n-1}$ 以上の頂点を持つグラフに対し，この主張が成り立つ．
- **$m=2$ または $n=2$ の場合:** ▷ $m=2$ とする． E_2 は辺で繋がっていない 2 頂点だから，もし E_2 がグラフ G に埋め込めないなら，G は完全グラフである．したがって，$\binom{n+2-2}{n-1}=n$ 個以上の頂点を持つグラフに対して，E_2 か K_n のどちらかが誘導された部分グラフとして埋め込める． ▷ $n=2$ のときも同様: このときには K_2 が G に埋め込めないなら，G の頂点の数を k とすると，$G=E_k$ である．

Erdös-Szekeres の定理の証明

定理 (Erdös-Szekeres, 1935). m と n を正の自然数とする．頂点の数が $\binom{n+m-2}{n-1}$ 以上の任意のグラフには，K_n か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる．

証明.

- **$m = 1$ または $n = 1$ の場合:** E_1 も K_1 も 1 点からなるグラフだから，任意のグラフに誘導された部分グラフとして埋め込める．したがって特に $\binom{n+m-2}{n-1}$ 以上の頂点を持つグラフに対し，この主張が成り立つ．
- **$m = 2$ または $n = 2$ の場合:** ▷ $m = 2$ とする． E_2 は辺で繋がっていない 2 頂点だから，もし E_2 がグラフ G に埋め込めないなら，G は完全グラフである．したがって，$\binom{n+2-2}{n-1} = n$ 個以上の頂点を持つグラフに対して，E_2 か K_n のどちらかが誘導された部分グラフとして埋め込める． ▷ $n = 2$ のときも同様: このときには K_2 が G に埋め込めないなら，G の頂点の数を k とすると，$G = E_k$ である．

Erdös-Szekeres の定理の証明

定理 (Erdös-Szekeres, 1935). m と n を正の自然数とする．頂点の数が $\binom{n+m-2}{n-1}$ 以上の任意のグラフには，K_n か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる．

証明. ▶ **$m = 1$ または $n = 1$ の場合:** E_1 も K_1 も 1 点からなるグラフだから，任意のグラフに誘導された部分グラフとして埋め込める．したがって特に $\binom{n+m-2}{n-1}$ 以上の頂点を持つグラフに対し，この主張が成り立つ．

▶ **$m = 2$ または $n = 2$ の場合:** ▷ $m = 2$ とする． E_2 は辺で繋がっていない 2 頂点だから，もし E_2 がグラフ G に埋め込めないなら，G は完全グラフである．したがって，$\binom{n+2-2}{n-1} = n$ 個以上の頂点を持つグラフに対して，E_2 か K_n のどちらかが誘導された部分グラフとして埋め込める． ▷ $n = 2$ のときも同様: このときには K_2 が G に埋め込めないなら，G の頂点の数を k とすると，$G = E_k$ である．

Erdös-Szekeres の定理の証明 (2/4)

- $n+m$ に関する帰納法で，定理を証明する．$n+m \leq 5$ なら，n か m のどちらかは ≤ 2 となるから，前ページで示したことから，定理は成り立つ．
- したがって，$k > 5$ で，$n+m < k$ となる n, m に対しては定理が成り立つと仮定して， $m+n = k$ となるような m, n に対しても定理が成り立つことを示せばよい．▷ 次の公式を使う:

$$\binom{k}{\ell} = \binom{k-1}{\ell} + \binom{k-1}{\ell-1}$$

ただし，$k, \ell \geq 1$ とする．

[k 個のものから ℓ 個選ぶ選び方は，k 個のもののうちの 1 つ x^* を固定して，x^* 以外の $k-1$ 個の中から ℓ 個選ぶか，x^* を選び，残りの $k-1$ 個の中から $\ell-1$ 個選ぶかのどちらかである．]

- この式の k と l に $n+m-2$ と $n-1$ を代入すると:

$$\binom{n+m-2}{n-1} = \binom{n+m-3}{n-1} + \binom{n+m-3}{n-2}$$

Erdös-Szekeres の定理の証明 (2/4)

- $n+m$ に関する帰納法で，定理を証明する． $n+m \leq 5$ なら，n か m のどちらかは ≤ 2 となるから，前ページで示したことから，定理は成り立つ．
- したがって，$k > 5$ で，$n+m < k$ となる n, m に対しては定理が成り立つと仮定して， $m+n = k$ となるような m, n に対しても定理が成り立つことを示せばよい． ▷ 次の公式を使う:

$$\binom{k}{\ell} = \binom{k-1}{\ell} + \binom{k-1}{\ell-1}$$

ただし，$k, \ell \geq 1$ とする．

[k 個のものから ℓ 個選ぶ選び方は，k 個のもののうちの 1 つ x^* を固定して，x^* 以外の $k-1$ 個の中から ℓ 個選ぶか，x^* を選び，残りの $k-1$ 個の中から $\ell-1$ 個選ぶかのどちらかである．]

- この式の k と l に $n+m-2$ と $n-1$ を代入すると:

$$\binom{n+m-2}{n-1} = \binom{n+m-3}{n-1} + \binom{n+m-3}{n-2}$$

Erdös-Szekeres の定理の証明 (2/4)

- $n + m$ に関する帰納法で，定理を証明する．$n + m \leq 5$ なら，n か m のどちらかは ≤ 2 となるから，前ページで示したことから，定理は成り立つ．
- したがって，$k > 5$ で，$n + m < k$ となる n, m に対しては定理が成り立つと仮定して，$m + n = k$ となるような m, n に対しても定理が成り立つことを示せばよい．▷ 次の公式を使う:

$$\binom{k}{\ell} = \binom{k-1}{\ell} + \binom{k-1}{\ell-1}$$

ただし，$k, \ell \geq 1$ とする．

[k 個のものから ℓ 個選ぶ選び方は，k 個のもののうちの 1 つ x^* を固定して，x^* 以外の $k-1$ 個の中から ℓ 個選ぶか，x^* を選び，残りの $k-1$ 個の中から $\ell-1$ 個選ぶかのどちらかである．]

- この式の k と l に $n + m - 2$ と $n - 1$ を代入すると:

$$\binom{n+m-2}{n-1} = \binom{n+m-3}{n-1} + \binom{n+m-3}{n-2}$$

Erdös-Szekeres の定理の証明 (2/4)

- $n+m$ に関する帰納法で，定理を証明する．$n+m \leq 5$ なら，n か m のどちらかは ≤ 2 となるから，前ページで示したことから，定理は成り立つ．
- したがって，$k > 5$ で，$n+m < k$ となる n, m に対しては定理が成り立つと仮定して，$m+n = k$ となるような m, n に対しても定理が成り立つことを示せばよい． ▷ 次の公式を使う:

$$\binom{k}{\ell} = \binom{k-1}{\ell} + \binom{k-1}{\ell-1}$$

ただし，$k, \ell \geq 1$ とする．

[k 個のものから ℓ 個選ぶ選び方は，k 個のもののうちの 1 つ x^* を固定して，x^* 以外の $k-1$ 個の中から ℓ 個選ぶか，x^* を選び，残りの $k-1$ 個の中から $\ell-1$ 個選ぶかのどちらかである．]

- この式の k と l に $n+m-2$ と $n-1$ を代入すると:

$$\binom{n+m-2}{n-1} = \binom{n+m-3}{n-1} + \binom{n+m-3}{n-2}$$

Erdös-Szekeres の定理の証明 (2/4)

- $n+m$ に関する帰納法で，定理を証明する．$n+m \leq 5$ なら，n か m のどちらかは ≤ 2 となるから，前ページで示したことから，定理は成り立つ．
- したがって，$k > 5$ で，$n+m < k$ となる n, m に対しては定理が成り立つと仮定して，$m+n=k$ となるような m, n に対しても定理が成り立つことを示せばよい．▷ 次の公式を使う:

$$\binom{k}{\ell} = \binom{k-1}{\ell} + \binom{k-1}{\ell-1}$$

ただし，$k, \ell \geq 1$ とする．

[k 個のものから ℓ 個選ぶ選び方は，k 個のもののうちの 1 つ x^* を固定して，x^* 以外の $k-1$ 個の中から ℓ 個選ぶか，x^* を選び，残りの $k-1$ 個の中から $\ell-1$ 個選ぶかのどちらかである．]

- この式の k と l に $n+m-2$ と $n-1$ を代入すると:

$$\binom{n+m-2}{n-1} = \binom{n+m-3}{n-1} + \binom{n+m-3}{n-2}$$

Erdös-Szekeres の定理の証明 (2/4)

- $n+m$ に関する帰納法で，定理を証明する．$n+m \leq 5$ なら，n か m のどちらかは ≤ 2 となるから，前ページで示したことから，定理は成り立つ．
- したがって，$k > 5$ で，$n+m < k$ となる n, m に対しては定理が成り立つと仮定して，$m+n=k$ となるような m, n に対しても定理が成り立つことを示せばよい． ▷ 次の公式を使う:

$$\binom{k}{\ell} = \binom{k-1}{\ell} + \binom{k-1}{\ell-1}$$

ただし，$k, \ell \geq 1$ とする．

[k 個のものから ℓ 個選ぶ選び方は，k 個のもののうちの 1 つ x^* を固定して，x^* 以外の $k-1$ 個の中から ℓ 個選ぶか，x^* を選び，残りの $k-1$ 個の中から $\ell-1$ 個選ぶかのどちらかである．]

- この式の k と l に $n+m-2$ と $n-1$ を代入すると:

$$\binom{n+m-2}{n-1} = \binom{n+m-3}{n-1} + \binom{n+m-3}{n-2}$$

Erdös-Szekeres の定理の証明 (2/4)

- $n+m$ に関する帰納法で，定理を証明する．$n+m \leq 5$ なら，n か m のどちらかは ≤ 2 となるから，前ページで示したことから，定理は成り立つ．
- したがって，$k > 5$ で，$n+m < k$ となる n, m に対しては定理が成り立つと仮定して，$m+n = k$ となるような m, n に対しても定理が成り立つことを示せばよい．▷ 次の公式を使う:

$$\binom{k}{\ell} = \binom{k-1}{\ell} + \binom{k-1}{\ell-1}$$

ただし，$k, \ell \geq 1$ とする．

[k 個のものから ℓ 個選ぶ選び方は，k 個のもののうちの 1 つ x^* を固定して，x^* 以外の $k-1$ 個の中から ℓ 個選ぶか，x^* を選び，残りの $k-1$ 個の中から $\ell-1$ 個選ぶかのどちらかである．]

- この式の k と l に $n+m-2$ と $n-1$ を代入すると:

$$\binom{n+m-2}{n-1} = \binom{n+m-3}{n-1} + \binom{n+m-3}{n-2}$$

Erdös-Szekeres の定理の証明 (3/4)

$$\binom{n+m+2}{n-1} = \binom{n+m-3}{n-1} + \binom{n+m-3}{n-2}$$

この式を少し変形して

$$\binom{n+m+2}{n-1} - 1 > \left[\binom{n+(m-1)-2}{n-1} - 1\right] + \left[\binom{(n-1)+m-2}{(n-1)-1} - 1\right]$$

- ここで，頂点の数が，$\binom{n+m-2}{n-1}$ 以上のグラフ G を考える．

G の頂点の 1 つ x^* を固定して，G から x^* を除いて得られるグラフを G' とする．このとき，上の不等式から，

- x^* は，

(a) $\binom{n+(m-1)-2}{n-1}$ 個以上の頂点のどれとも繋がっていないか，

(b) $\binom{(n-1)+m-2}{(n-1)-1}$ 個の以上の頂点のどれとも繋がっているか

のどちらかが成り立つ．

Erdös-Szekeres の定理の証明 (3/4)

$$\binom{n+m+2}{n-1} = \binom{n+m-3}{n-1} + \binom{n+m-3}{n-2}$$

この式を少し変形して

$$\binom{n+m+2}{n-1} - 1 > \left[\binom{n+(m-1)-2}{n-1} - 1\right] + \left[\binom{(n-1)+m-2}{(n-1)-1} - 1\right]$$

- ここで，頂点の数が，$\binom{n+m-2}{n-1}$ 以上のグラフ G を考える．

G の頂点の 1 つ x^* を固定して，G から x^* を除いて得られるグラフを G' とする．このとき，上の不等式から，

- x^* は，

(a) $\binom{n+(m-1)-2}{n-1}$ 個以上の頂点のどれとも繋がっていないか，

(b) $\binom{(n-1)+m-2}{(n-1)-1}$ 個の以上の頂点のどれとも繋がっているか

のどちらかが成り立つ．

Erdös-Szekeres の定理の証明 (3/4)

$$\binom{n+m+2}{n-1} = \binom{n+m-3}{n-1} + \binom{n+m-3}{n-2}$$

この式を少し変形して

$$\binom{n+m+2}{n-1} - 1 > \left[\binom{n+(m-1)-2}{n-1} - 1\right] + \left[\binom{(n-1)+m-2}{(n-1)-1} - 1\right]$$

- ここで，頂点の数が，$\binom{n+m-2}{n-1}$ 以上のグラフ G を考える．

G の頂点の 1 つ x^* を固定して，G から x^* を除いて得られるグラフを G' とする．このとき，上の不等式から，

- x^* は，

(a) $\binom{n+(m-1)-2}{n-1}$ 個以上の頂点のどれとも繋がっていないか，

(b) $\binom{(n-1)+m-2}{(n-1)-1}$ 個の以上の頂点のどれとも繋がっているか

のどちらかが成り立つ．

Erdös-Szekeres の定理の証明 (3/4)

$$\binom{n+m+2}{n-1} = \binom{n+m-3}{n-1} + \binom{n+m-3}{n-2}$$

この式を少し変形して

$$\binom{n+m+2}{n-1} - 1 > \left[\binom{n+(m-1)-2}{n-1} - 1\right] + \left[\binom{(n-1)+m-2}{(n-1)-1} - 1\right]$$

▶ ここで，頂点の数が，$\binom{n+m-2}{n-1}$ 以上のグラフ G を考える．G の頂点の 1 つ x^* を固定して，G から x^* を除いて得られるグラフを G' とする．このとき，上の不等式から，

▷ x^* は，

(a) $\binom{n+(m-1)-2}{n-1}$ 個以上の頂点のどれとも繋がっていないか，

(b) $\binom{(n-1)+m-2}{(n-1)-1}$ 個の以上の頂点のどれとも繋がっているか

のどちらかが成り立つ．

Erdös-Szekeres の定理の証明 (3/4)

$$\binom{n+m+2}{n-1} = \binom{n+m-3}{n-1} + \binom{n+m-3}{n-2}$$

この式を少し変形して

$$\binom{n+m+2}{n-1} - 1 > \left[\binom{n+(m-1)-2}{n-1} - 1\right] + \left[\binom{(n-1)+m-2}{(n-1)-1} - 1\right]$$

- ここで，頂点の数が，$\binom{n+m-2}{n-1}$ 以上のグラフ G を考える．

G の頂点の 1 つ x^* を固定して，G から x^* を除いて得られるグラフを G' とする．このとき，上の不等式から，

- x^* は，

(a) $\binom{n+(m-1)-2}{n-1}$ 個以上の頂点のどれとも繋がっていないか，

(b) $\binom{(n-1)+m-2}{(n-1)-1}$ 個の以上の頂点のどれとも繋がっているか

のどちらかが成り立つ．

Erdös-Szekeres の定理の証明 (3/4)

$$\binom{n+m+2}{n-1} = \binom{n+m-3}{n-1} + \binom{n+m-3}{n-2}$$

この式を少し変形して

$$\binom{n+m+2}{n-1} - 1 > \left[\binom{n+(m-1)-2}{n-1} - 1\right] + \left[\binom{(n-1)+m-2}{(n-1)-1} - 1\right]$$

- ここで，頂点の数が，$\binom{n+m-2}{n-1}$ 以上のグラフ G を考える．

G の頂点の 1 つ x^* を固定して，G から x^* を除いて得られるグラフを G' とする．このとき，上の不等式から，

- x^* は，

(a) $\binom{n+(m-1)-2}{n-1}$ 個以上の頂点のどれとも繋がっていないか，

(b) $\binom{(n-1)+m-2}{(n-1)-1}$ 個の以上の頂点のどれとも繋がっているか

のどちらかが成り立つ．

Erdös-Szekeres の定理の証明 (3/4)

$$\binom{n+m+2}{n-1} = \binom{n+m-3}{n-1} + \binom{n+m-3}{n-2}$$

この式を少し変形して

$$\binom{n+m+2}{n-1} - 1 > \left[\binom{n+(m-1)-2}{n-1} - 1\right] + \left[\binom{(n-1)+m-2}{(n-1)-1} - 1\right]$$

- ここで，頂点の数が，$\binom{n+m-2}{n-1}$ 以上のグラフ G を考える．

G の頂点の 1 つ x^* を固定して，G から x^* を除いて得られるグラフを G' とする．このとき，上の不等式から，

- x^* は，

(a) $\binom{n+(m-1)-2}{n-1}$ 個以上の頂点のどれとも繋がっていないか，

(b) $\binom{(n-1)+m-2}{(n-1)-1}$ 個の以上の頂点のどれとも繋がっているか

のどちらかが成り立つ．

Erdös-Szekeres の定理の証明 (4/4)

▷ x^* は,

(a) $\binom{n+(m-1)-2}{n-1}$ 個以上の頂点のどれとも繋がっていないか,

(b) $\binom{(n-1)+m-2}{(n-1)-1}$ 個の以上の頂点のどれとも繋がっているか

のどちらかが成り立つ.

▶ (a) の場合には, G' の x^* と繋がっていない頂点の全体から誘導された G の部分グラフを G'' とすると, 帰納法の仮定から, G'' に (α) K_n か (β) E_{m-1} を誘導された部分グラフとして埋め込める.

(α) の場合には, K_n は G にも埋め込めるからよい. (β) の場合には, E_{m-1} 埋めこんだ先を $E' \subseteq G''$ とすると, E' に x^* を加えたものは, E_m の G への誘導された部分グラフとしての埋め込みになっている. したがって両方の場合について定理が成り立つ.

▶ (b) の場合にも同様である (演習). □

Erdös-Szekeres の定理の証明 (4/4)

▷ x^* は,

(a) $\binom{n+(m-1)-2}{n-1}$ 個以上の頂点のどれとも繋がっていないか,

(b) $\binom{(n-1)+m-2}{(n-1)-1}$ 個の以上の頂点のどれとも繋がっているか

のどちらかが成り立つ.

▶ (a) の場合には, G' の x^* と繋がっていない頂点の全体から誘導された G の部分グラフを G'' とすると, 帰納法の仮定から, G'' に (α) K_n か (β) E_{m-1} を誘導された部分グラフとして埋め込める.

(α) の場合には, K_n は G にも埋め込めるからよい. (β) の場合には, E_{m-1} 埋めこんだ先を $E' \subseteq G''$ とすると, E' に x^* を加えたものは, E_m の G への誘導された部分グラフとしての埋め込みになっている. したがって両方の場合について定理が成り立つ.

▶ (b) の場合にも同様である (演習). □

Erdös-Szekeres の定理の証明 (4/4)

▷ x^* は,

(a) $\binom{n+(m-1)-2}{n-1}$ 個以上の頂点のどれとも繋がっていないか,

(b) $\binom{(n-1)+m-2}{(n-1)-1}$ 個の以上の頂点のどれとも繋がっているか

のどちらかが成り立つ.

▶ (a) の場合には, G' の x^* と繋がっていない頂点の全体から誘導された G の部分グラフを G'' とすると, 帰納法の仮定から, G'' に (α) K_n か (β) E_{m-1} を誘導された部分グラフとして埋め込める.

(α) の場合には, K_n は G にも埋め込めるからよい. (β) の場合には, E_{m-1} 埋めこんだ先を $E' \subseteq G''$ とすると, E' に x^* を加えたものは, E_m の G への誘導された部分グラフとしての埋め込みになっている. したがって両方の場合について定理が成り立つ.

▶ (b) の場合にも同様である (演習). □

Erdös-Szekeres の定理の証明 (4/4)

▷ x^* は,

(a) $\binom{n+(m-1)-2}{n-1}$ 個以上の頂点のどれとも繋がっていないか,

(b) $\binom{(n-1)+m-2}{(n-1)-1}$ 個の以上の頂点のどれとも繋がっているか

のどちらかが成り立つ.

▶ (a) の場合には, G' の x^* と繋がっていない頂点の全体から誘導された G の部分グラフを G'' とすると, 帰納法の仮定から, G'' に (α) K_n か (β) E_{m-1} を誘導された部分グラフとして埋め込める.

(α) の場合には, K_n は G にも埋め込めるからよい. (β) の場合には, E_{m-1} 埋めこんだ先を $E' \subseteq G''$ とすると, E' に x^* を加えたものは, E_m の G への誘導された部分グラフとしての埋め込みになっている. したがって両方の場合について定理が成り立つ.

▶ (b) の場合にも同様である (演習). □

Erdös-Szekeres の定理の証明 (4/4)

▷ x^* は,

(a) $\binom{n+(m-1)-2}{n-1}$ 個以上の頂点のどれとも繋がっていないか,

(b) $\binom{(n-1)+m-2}{(n-1)-1}$ 個の以上の頂点のどれとも繋がっているか

のどちらかが成り立つ.

▶ (a) の場合には, G' の x^* と繋がっていない頂点の全体から誘導された G の部分グラフを G'' とすると, 帰納法の仮定から, G'' に (α) K_n か (β) E_{m-1} を誘導された部分グラフとして埋め込める.

(α) の場合には, K_n は G にも埋め込めるからよい. (β) の場合には, E_{m-1} 埋めこんだ先を $E' \subseteq G''$ とすると, E' に x^* を加えたものは, E_m の G への誘導された部分グラフとしての埋め込みになっている. したがって両方の場合について定理が成り立つ.

▶ (b) の場合にも同様である (演習). □

Erdös-Szekeres の定理の証明 (4/4)

▷ x^* は,

(a) $\binom{n+(m-1)-2}{n-1}$ 個以上の頂点のどれとも繋がっていないか,

(b) $\binom{(n-1)+m-2}{(n-1)-1}$ 個の以上の頂点のどれとも繋がっているか

のどちらかが成り立つ.

▶ (a) の場合には, G' の x^* と繋がっていない頂点の全体から誘導された G の部分グラフを G'' とすると, 帰納法の仮定から, G'' に (α) K_n か (β) E_{m-1} を誘導された部分グラフとして埋め込める.

(α) の場合には, K_n は G にも埋め込めるからよい. (β) の場合には, E_{m-1} 埋めこんだ先を $E' \subseteq G''$ とすると, E' に x^* を加えたものは, E_m の G への誘導された部分グラフとしての埋め込みになっている. したがって両方の場合について定理が成り立つ.

▶ (b) の場合にも同様である (演習). □

ラムズィー数 (Ramsey numbers)

- 上の定理から次が得られた:

系. 頂点の数が $\binom{2m-2}{m-1}$ 以上の任意のグラフには, K_m か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる.

- 自然数 m に対し,

頂点の数が k 以上の任意のグラフに K_m か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる.

を満たすような数のうち最小のものを $r(m)$ と書く. $r(m)$ は (m に対応する) **ラムズィー数 (Ramsey number)** と呼ばれている.

前回に示した Erdős の定理と, Erdős-Szekeres の定理の系により

$$2^{\frac{m}{2}} < r(m) \leq \binom{2m-2}{m-1}$$

である.

ラムズィー数 (Ramsey numbers)

- 上の定理から次が得られた:

系. 頂点の数が $\binom{2m-2}{m-1}$ 以上の任意のグラフには, K_m か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる.

- 自然数 m に対し,

頂点の数が k 以上の任意のグラフに K_m か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる.

を満たすような数のうち最小のものを $r(m)$ と書く. $r(m)$ は (m に対応する) **ラムズィー数 (Ramsey number)** と呼ばれている.

前回に示した Erdős の定理と, Erdős-Szekeres の定理の系により

$$2^{\frac{m}{2}} < r(m) \leq \binom{2m-2}{m-1}$$

である.

ラムズィー数 (Ramsey numbers)

- 上の定理から次が得られた:

系． 頂点の数が $\binom{2m-2}{m-1}$ 以上の任意のグラフには，K_m か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる．

- 自然数 m に対し，

頂点の数が k 以上の任意のグラフに K_m か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる．

を満たすような数のうち最小のものを $r(m)$ と書く．$r(m)$ は (m に対応する) **ラムズィー数 (Ramsey number)** と呼ばれている．

前回に示した Erdős の定理と，Erdős-Szekeres の定理の系により

$$2^{\frac{m}{2}} < r(m) \leq \binom{2m-2}{m-1}$$

である．

ラムズィー数 (Ramsey numbers)

- 上の定理から次が得られた:

系． 頂点の数が $\binom{2m-2}{m-1}$ 以上の任意のグラフには, K_m か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる.

- 自然数 m に対し,

頂点の数が k 以上の任意のグラフに K_m か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる.

を満たすような数のうち最小のものを $r(m)$ と書く. $r(m)$ は (m に対応する) **ラムズィー数 (Ramsey number)** と呼ばれている.

前回に示した Erdős の定理と, Erdős-Szekeres の定理の系により

$$2^{\frac{m}{2}} < r(m) \leq \binom{2m-2}{m-1}$$

である.

ラムズィー数 (Ramsey numbers)

- 上の定理から次が得られた:

系. 頂点の数が $\binom{2m-2}{m-1}$ 以上の任意のグラフには，K_m か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる.

- 自然数 m に対し，

頂点の数が k 以上の任意のグラフに K_m か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる.

を満たすような数のうち最小のものを $r(m)$ と書く．$r(m)$ は (m に対応する) **ラムズィー数 (Ramsey number)** と呼ばれている.

前回に示した Erdős の定理と，Erdős-Szekeres の定理の系により

$$2^{\frac{m}{2}} < r(m) \leq \binom{2m-2}{m-1}$$

である.

ラムズィー数 (Ramsey numbers) (2/3)

- 上の証明と，前回に示したことから $r(1) = 1$ $r(2) = 2$ $r(3) = 6$ である．($r(3) \geqq 6$ は演習問題とした).
- $r(4) = 18$ である (Greenwood-Gleason, 1955).
- $r(5)$ から先は値が判っていない.
- $43 \leq r(5) \leq 49$, $102 \leq r(6) \leq 165$ などが知られている.
- $2^{\frac{5}{2}} = 5.65685424949238\cdots$, $2^{\frac{6}{2}} = 8$, $\binom{5 \times 2 - 2}{5 - 1} = 70$, $\binom{6 \times 2 - 2}{6 - 1} = 252$ なので，上の $r(5)$ と $r(6)$ の評価は，Erdős の定理と Erdős-Szekeres の定理による下限と上限の評価よりずっとシャープな (精度の高い) ものになっていることがわかる.
- 上限と下限が判っているので，原理的には有限個の場合についてしらみつぶしに計算すれば値が求まるはずだが，場合の数が多すぎて，そのような計算では宇宙の始まりから今までの時間より長い時間がかかってしまう可能性もある！

ラムズィー数 (Ramsey numbers) (2/3)

- 上の証明と，前回に示したことから $r(1) = 1$ $r(2) = 2$ $r(3) = 6$ である．($r(3) \geqq 6$ は演習問題とした).
- $r(4) = 18$ である (Greenwood-Gleason, 1955).
- $r(5)$ から先は値が判っていない．
- $43 \leq r(5) \leq 49$, $102 \leq r(6) \leq 165$ などが知られている．
- $2^{\frac{5}{2}} = 5.65685424949238\cdots$, $2^{\frac{6}{2}} = 8$, $\binom{5\times 2-2}{5-1} = 70$, $\binom{6\times 2-2}{6-1} = 252$ なので，上の $r(5)$ と $r(6)$ の評価は，Erdős の定理と Erdős-Szekeres の定理による下限と上限の評価よりずっとシャープな (精度の高い) ものになっていることがわかる．
- 上限と下限が判っているので，原理的には有限個の場合についてしらみつぶしに計算すれば値が求まるはずだが，場合の数が多すぎて，そのような計算では宇宙の始まりから今までの時間より長い時間がかかってしまう可能性もある！

- 上の証明と，前回に示したことから $r(1) = 1$ $r(2) = 2$ $r(3) = 6$ である．($r(3) \geqq 6$ は演習問題とした).
- $r(4) = 18$ である (Greenwood-Gleason, 1955).
- $r(5)$ から先は値が判っていない．
- $43 \leq r(5) \leq 49$, $102 \leq r(6) \leq 165$ などが知られている．
- $2^{\frac{5}{2}} = 5.65685424949238\cdots$, $2^{\frac{6}{2}} = 8$, $\binom{5\times 2-2}{5-1} = 70$, $\binom{6\times 2-2}{6-1} = 252$ なので，上の $r(5)$ と $r(6)$ の評価は，Erdős の定理と Erdős-Szekeres の定理による下限と上限の評価よりずっとシャープな (精度の高い) ものになっていることがわかる．
- 上限と下限が判っているので，原理的には有限個の場合についてしらみつぶしに計算すれば値が求まるはずだが，場合の数が多すぎて，そのような計算では宇宙の始まりから今までの時間より長い時間がかかってしまう可能性もある！

ラムズィー数 (Ramsey numbers) (2/3)

- 上の証明と，前回に示したことから $r(1) = 1$ $r(2) = 2$ $r(3) = 6$ である．($r(3) \geqq 6$ は演習問題とした).
- $r(4) = 18$ である (Greenwood-Gleason, 1955).
- $r(5)$ から先は値が判っていない.
- $43 \leq r(5) \leq 49$, $102 \leq r(6) \leq 165$ などが知られている.
- $2^{\frac{5}{2}} = 5.65685424949238\cdots$, $2^{\frac{6}{2}} = 8$, $\binom{5\times 2-2}{5-1} = 70$, $\binom{6\times 2-2}{6-1} = 252$ なので，上の $r(5)$ と $r(6)$ の評価は，Erdős の定理と Erdős-Szekeres の定理による下限と上限の評価よりずっとシャープな (精度の高い) ものになっていることがわかる.
- 上限と下限が判っているので，原理的には有限個の場合についてしらみつぶしに計算すれば値が求まるはずだが，場合の数が多すぎて，そのような計算では宇宙の始まりから今までの時間より長い時間がかかってしまう可能性もある！

ラムズィー数 (Ramsey numbers) (2/3)

- 上の証明と，前回に示したことから $r(1) = 1$ $r(2) = 2$ $r(3) = 6$ である．($r(3) \geqq 6$ は演習問題とした)．
- $r(4) = 18$ である (Greenwood-Gleason, 1955).
- $r(5)$ から先は値が判っていない．
- $43 \leq r(5) \leq 49$, $102 \leq r(6) \leq 165$ などが知られている．
- $2^{\frac{5}{2}} = 5.65685424949238\cdots$, $2^{\frac{6}{2}} = 8$, $\binom{5 \times 2 - 2}{5 - 1} = 70$, $\binom{6 \times 2 - 2}{6 - 1} = 252$ なので，上の $r(5)$ と $r(6)$ の評価は，Erdős の定理と Erdős-Szekeres の定理による下限と上限の評価よりずっとシャープな (精度の高い) ものになっていることがわかる．
- 上限と下限が判っているので，原理的には有限個の場合についてしらみつぶしに計算すれば値が求まるはずだが，場合の数が多すぎて，そのような計算では宇宙の始まりから今までの時間より長い時間がかかってしまう可能性もある！

ラムズィー数 (Ramsey numbers) (2/3)

- 上の証明と，前回に示したことから $r(1) = 1$ $r(2) = 2$ $r(3) = 6$ である．($r(3) \geqq 6$ は演習問題とした).
- $r(4) = 18$ である (Greenwood-Gleason, 1955).
- $r(5)$ から先は値が判っていない．
- $43 \leq r(5) \leq 49$, $102 \leq r(6) \leq 165$ などが知られている．
- $2^{\frac{5}{2}} = 5.65685424949238\cdots$, $2^{\frac{6}{2}} = 8$, $\binom{5 \times 2 - 2}{5 - 1} = 70$, $\binom{6 \times 2 - 2}{6 - 1} = 252$ なので，上の $r(5)$ と $r(6)$ の評価は，Erdős の定理と Erdős-Szekeres の定理による下限と上限の評価よりずっとシャープな (精度の高い) ものになっていることがわかる．
- 上限と下限が判っているので，原理的には有限個の場合についてしらみつぶしに計算すれば値が求まるはずだが，場合の数が多すぎて，そのような計算では宇宙の始まりから今までの時間より長い時間がかかってしまう可能性もある！

ラムズィー数 (Ramsey numbers) (2/3)

- 上の証明と，前回に示したことから $r(1) = 1$ $r(2) = 2$ $r(3) = 6$ である．($r(3) \geqq 6$ は演習問題とした).
- $r(4) = 18$ である (Greenwood-Gleason, 1955).
- $r(5)$ から先は値が判っていない．
- $43 \leq r(5) \leq 49$, $102 \leq r(6) \leq 165$ などが知られている．
- $2^{\frac{5}{2}} = 5.65685424949238\cdots$, $2^{\frac{6}{2}} = 8$, $\binom{5 \times 2 - 2}{5 - 1} = 70$, $\binom{6 \times 2 - 2}{6 - 1} = 252$ なので，上の $r(5)$ と $r(6)$ の評価は，Erdős の定理と Erdős-Szekeres の定理による下限と上限の評価よりずっとシャープな (精度の高い) ものになっていることがわかる．
- 上限と下限が判っているので，原理的には有限個の場合についてしらみつぶしに計算すれば値が求まるはずだが，場合の数が多すぎて，そのような計算では宇宙の始まりから今までの時間より長い時間がかかってしまう可能性もある！

ラムズィー数 (Ramsey numbers) (3/3)

- 次は Erdős が，生前，彼の講演でよく話していたジョークである:

> “ 宇宙人が地球を侵略しに来て $r(5)$ の値を一年の間に求められなければ地球を滅ぼす，と言ったとしたら，世界の最高の知性とコンピュータをかきあつめればなんとかなるだろう．しかし，もし $r(6)$ の値を一年の間に求められなければ地球を滅ぼす，と言ったのだったら，覚悟をきめて宇宙人に反撃する決断を下すべきである．”

演習問題． $r(5)$ や $r(6)$ の値をすべての場合をしらみつぶしに調べるやり方で求めるとすると，最悪どのくらいの時間が必要になるかを評価してみてください．

ラムズィー数 (Ramsey numbers) (3/3)

- 次は Erdős が，生前，彼の講演でよく話していたジョークである:

“ 宇宙人が地球を侵略しに来て $r(5)$ の値を一年の間に求められなければ地球を滅ぼす，と言ったとしたら，世界の最高の知性とコンピュータをかきあつめればなんとかなるだろう．しかし，もし $r(6)$ の値を一年の間に求められなければ地球を滅ぼす，と言ったのだったら，覚悟をきめて宇宙人に反撃する決断を下すべきである． ”

演習問題． $r(5)$ や $r(6)$ の値をすべての場合をしらみつぶしに調べるやり方で求めるとすると，最悪どのくらいの時間が必要になるかを評価してみてください．

ラムズィー数 (Ramsey numbers) (3/3)

- 次は Erdős が，生前，彼の講演でよく話していたジョークである:

“ 宇宙人が地球を侵略しに来て $r(5)$ の値を一年の間に求められなければ地球を滅ぼす，と言ったとしたら，世界の最高の知性とコンピュータをかきあつめればなんとかなるだろう．しかし，もし $r(6)$ の値を一年の間に求められなければ地球を滅ぼす，と言ったのだったら，覚悟をきめて宇宙人に反撃する決断を下すべきである． ”

演習問題． $r(5)$ や $r(6)$ の値をすべての場合をしらみつぶしに調べるやり方で求めるとすると，最悪どのくらいの時間が必要になるかを評価してみてください．

ラムズィー数 (Ramsey numbers) (3/3)

- 次は Erdős が，生前，彼の講演でよく話していたジョークである:

“ 宇宙人が地球を侵略しに来て $r(5)$ の値を一年の間に求められなければ地球を滅ぼす，と言ったとしたら，世界の最高の知性とコンピュータをかきあつめればなんとかなるだろう．しかし，もし $r(6)$ の値を一年の間に求められなければ地球を滅ぼす，と言ったのだったら，覚悟をきめて宇宙人に反撃する決断を下すべきである．”

演習問題． $r(5)$ や $r(6)$ の値をすべての場合をしらみつぶしに調べるやり方で求めるとすると，最悪どのくらいの時間が必要になるかを評価してみてください．

エルデシュ (Paul Erdős)

Paul Erdős (1992, Copyright: MFO)
(26 March 1913 (大正 2) in Budapest, Hungary
— 20 Sept 1996 (平成 8) in Warsaw, Poland)