

構造の数理

2012 年 01 月 26 日 第 12 回目の講義

Sakaé Fuchino (湊野 昌)

Dept. of Computer Sciences
Kobe University

(神戸大学大学院 システム情報学研究科)

<http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/>

Ramsey の定理 (3)

(2. Februar 2012 (14:04 JST) version)

神戸大学 2011 年度後期の講義

This presentation is typeset by p^AT_EX with beamer class.

- ▶ 前回の講義で、次が成り立つことが証明できた:

定理 . (Ramsey 1928 (昭和 3), Erdős&Szekeres 1935 (昭和 10 年))
任意の自然数 m に対して、

- ▶ k 個以上の頂点を持つすべてのグラフ G に、 K_m か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる

が成り立つような数 k が存在する .

- ▶ 上のような k のうち最小のものを、 $r(m)$ と書いて、 m に対する Ramsey 数呼ぶことにしたのだった .

- ▶ この定理は次のように言い換えることもできる:

- ▶ 前回の講義で，次が成り立つことが証明できた:

定理 . (Ramsey 1928 (昭和 3), Erdős&Szekeres 1935 (昭和 10 年))
任意の自然数 m に対して，

- ▶ k 個以上の頂点を持つすべてのグラフ G に， K_m が E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる

が成り立つような数 k が存在する .

- ▶ この定理は次のように言い換えることもできる:

定理 . (Ramsey, Erdős-Szekeres の定理の言い換え)
任意の自然数 m に対して，

- ▶ 任意の $n \geq k$ と K_n の辺の二色の色分け C に対し， K_n の m 個の頂点を持つ完全部分グラフで，すべての辺が (C の色分けで) 一色で塗られているようなものが存在する

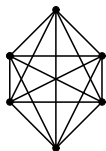
が成り立つような数 k が存在する .

定理 . (Ramsey, Erdős-Szekeres の定理の言い換え)

任意の自然数 m に対して ,

- ▶ 任意の $n \geq k$ と K_n の辺の二色の色分け C に対し , K_n の m 個の頂点を持つ完全部分グラフで , すべての辺が (C の色分けで) 一色で塗られているようなものが存在する
が成り立つような数 k が存在する .

- ▶ たとえば , $m = 3$ のときは , $k = 6$ として:



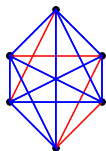
K_6

定理 . (Ramsey, Erdős-Szekeres の定理の言い換え)

任意の自然数 m に対して ,

- ▶ 任意の $n \geq k$ と K_n の辺の二色の色分け C に対し , K_n の m 個の頂点を持つ完全部分グラフで , すべての辺が (C の色分けで) 一色で塗られているようなものが存在する
が成り立つような数 k が存在する .

- ▶ たとえば , $m = 3$ のときは , $k = 6$ として:



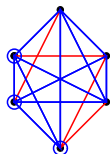
K_6

定理 . (Ramsey, Erdős-Szekeres の定理の言い換え)

任意の自然数 m に対して ,

- ▶ 任意の $n \geq k$ と K_n の辺の二色の色分け C に対し , K_n の m 個の頂点を持つ完全部分グラフで , すべての辺が (C の色分けで) 一色で塗られているようなものが存在する
が成り立つような数 k が存在する .

- ▶ たとえば , $m = 3$ のときは , $k = 6$ として:



K_6

定理 . (Ramsey, Erdős-Szekeres の定理の言い換え)

任意の自然数 m に対して ,

- ▶ 任意の $n \geq k$ と K_n の辺の 2 色の色分け C に対し , K_n の m 個の頂点を持つ完全部分グラフで , すべての辺が (C の色分けで) 一色で塗られているようなものが存在する

が成り立つような数 k が存在する .

- ▶ 上の定理が Ramsey, Erdős-Szekeres の定理の言い換えになっていることを見るには , K_n の辺の 2 色の色分け (たとえば赤と青) のうちの 1 つの色 (たとえば青) の辺だけを持つようなグラフを考えることにして , このグラフに Ramsey, Erdős-Szekeres の定理を応用することを考えればよい . たとえば:

上の形の言い換えをすると , “2 色” を “ l 色” ($l \geq 1$) で置き換えた形の一般化が自然に考えられるようになる .

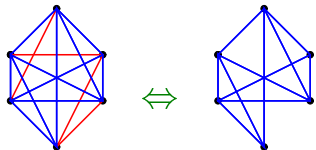
定理 . (Ramsey, Erdős-Szekeres の定理の言い換え)

任意の自然数 m に対して ,

- ▶ 任意の $n \geq k$ と K_n の辺の 2 色の色分け C に対し , K_n の m 個の頂点を持つ完全部分グラフで , すべての辺が (C での色分けで) 一色で塗られているようなものが存在する

が成り立つような数 k が存在する .

- ▶ 上の定理が Ramsey, Erdős-Szekeres の定理の言い換えになっていることを見るには , K_n の辺の 2 色の色分け (たとえば赤と青) のうちの 1 つの色 (たとえば青) の辺だけを持つようなグラフを考えることにして , このグラフに Ramsey, Erdős-Szekeres の定理を応用することを考えればよい . たとえば:



上の形の言い換えをすると , “2 色” を “ l 色” ($l \geq 1$) で置き換えた形の一般化が自然に考えられるようになる .

定理 . (Ramsey の定理, 1928 (昭和 3))

任意の正の自然数 m, ℓ に対して ,

(*) 任意の $n \geq k$ と K_n の辺の ℓ 色の色分け C に対し , K_n の m 個の頂点を持つ完全部分グラフで , すべての辺が (C での色分けで) 一色で塗られているようなものが存在する
が成り立つような数 k が存在する .

証明 . 正の自然数 ℓ に関する帰納法で ,

(**) 「すべての正の自然数 m に対して , (*) が成り立つような k が存在する」

ことを示す .

▶ (**) が成り立つときには , そこでの数 k のうち最小なものがとれるが , これを , $c_\ell(m)$ とあらわすことにする .

▷ (帰納法の初め) $\ell = 1$ のときには , $c_1(m) = m$ とすればよい .

正の自然数 ℓ に関する帰納法で、

(**) 「すべての正の自然数 m に対して、 $(*)$ が成りつような k が存在する」

ことを示す。

▶ (***) が成り立つときには、そこでの数 k のうち最小なものがとれるが、これを、 $c_\ell(m)$ とあらわすことにする。

▷ (帰納法の初め) $\ell = 1$ のときには、 $c_1(m) = m$ とすればよい。
 $\ell = 2$ のときには、 $c_2(m) = r(m)$ とすればよい。
($r(m)$ は Ramsey 数).

▷ (帰納法のステップ) $\ell > 2$ として、すべての $\ell' < \ell$ に対して、(***) が成り立つとき、正の自然数 m に対し、「 $k = c_2(c_{\ell-1}(m))$ とすると、 k は、 ℓ と m に対する $(*)$ を満たす」ことを示せばよい。

これにより、 $c_\ell(m) \leq c_2(c_{\ell-1}(m))$ が成り立つことも、示せたことになる。

▷ (帰納法のステップ) $\ell > 2$ として, すべての $\ell' < \ell$ に対して, (**) が成り立つとき, 正の自然数 m に対し, 「 $k = c_2(c_{\ell-1}(m))$ とすると, k は, ℓ と m に対する (*) を満たす」ことを示せばよい.

▷ これにより, $c_\ell(m) \leq c_2(c_{\ell-1}(m))$ が成り立つことも, 示せたことになる.

$k = c_2(c_{\ell-1}(m))$ 個以上の頂点を持つ完全グラフ K_n の辺の任意の ℓ 色の色分け C を考える.

C で使った色を $c_0, c_1, \dots, c_{\ell-1}$ として, $c_1, \dots, c_{\ell-1}$ をすべて同じ色 d だと思ったときの, G の二色への色分け C' だと思おうと, k のとりかたから, G のサイズが $c_\ell(m)$ の完全部分グラフ G' で, 辺が一色で塗られたものがとれる. G' が c_0 で塗られていれば, これは, 色分け C で一色で塗られた完全部分グラフでもあるからよい. もし G' が d 一色で塗られていれば, 色分け C に関して G' は $\ell - 1$ 色で色分けされた $c_{\ell-1}(m)$ 個の頂点を持つグラフだから, サイズが m の部分グラフで, 辺の色が一色のものがとれるから, この場合にもよい. □



Paul Erdős (1992, Copyright: MFO)
(26 March 1913 (大正 2) in Budapest, Hungary
— 20 Sept 1996 (平成 8) in Warsaw, Poland)

▶ Erdős は、いくつかの重要な数学の研究結果を残したが、多くの共著者を持っていたことでも知られている — 生涯に (少なくとも) 511 人の数学者と共著論文を書いている。Erdős は、天才的な数学者が個人プレーで行なうことが多かったこれまでの数学の研究スタイルに加えて、国際的な共同研究での研究、という新しい研究スタイルを確立することにも大きな貢献をした、とも言えるだろう。