構造の数理

2012 年 01 月 26 日　第 12 回目の講義

Sakaé Fuchino (渕野 昌)

Dept. of Computer Sciences
Kobe University
(神戸大学大学院 システム情報学研究科)

http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/

Ramsey の定理　(3)

(2. Februar 2012 (14:01 JST) version)

神戸大学 2011 年度後期の講義

This presentation is typeset by pLaTeX with beamer class.

Ramsey の定理の特殊形とその言い換え

- 前回の講義で，次が成り立つことが証明できた:

定理． (Ramsey 1928 (昭和 3), Erdős&Szekeres 1935 (昭和 10 年))
任意の自然数 m に対して,

- k 個以上の頂点を持つすべてのグラフ G に，K_m か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる

が成り立つような数 k が存在する.

- 上のような k のうち最小のものを，$r(m)$ と書いて，m に対する Ramsey 数呼ぶことにしたのだった.

- この定理は次のように言い換えることもできる:

Ramsey の定理の特殊形とその言い換え

- 前回の講義で，次が成り立つことが証明できた:

定理. (Ramsey 1928 (昭和 3), Erdős&Szekeres 1935 (昭和 10 年))
任意の自然数 m に対して,

- k 個以上の頂点を持つすべてのグラフ G に，K_m か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる

が成り立つような数 k が存在する.

- 上のような k のうち最小のものを，$r(m)$ と書いて，m に対する Ramsey 数呼ぶことにしたのだった.

- この定理は次のように言い換えることもできる:

Ramsey の定理の特殊形とその言い換え

- 前回の講義で，次が成り立つことが証明できた:

定理. (Ramsey 1928 (昭和 3), Erdős&Szekeres 1935 (昭和 10 年))
任意の自然数 m に対して，

- k 個以上の頂点を持つすべてのグラフ G に，K_m か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる

が成り立つような数 k が存在する.

- 上のような k のうち最小のものを，$r(m)$ と書いて，m に対する Ramsey 数呼ぶことにしたのだった.

- この定理は次のように言い換えることもできる:

Ramsey の定理の特殊形とその言い換え

- 前回の講義で，次が成り立つことが証明できた:

定理. (Ramsey 1928 (昭和 3), Erdős&Szekeres 1935 (昭和 10 年))
任意の自然数 m に対して,

- k 個以上の頂点を持つすべてのグラフ G に，K_m か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる

が成り立つような数 k が存在する.

- この定理は次のように言い換えることもできる:

定理. (Ramsey, Erdös-Szekeres の定理の言い換え)
任意の自然数 m に対して,

- 任意の $n \geq k$ と K_n の辺の二色の色分け C に対し，K_n の m 個の頂点を持つ完全部分グラフで，すべての辺が (C での色分けで) 一色で塗られているようなものが存在する

が成り立つような数 k が存在する.

Ramsey の定理の特殊形とその言い換え

- 前回の講義で，次が成り立つことが証明できた:

定理．(Ramsey 1928 (昭和 3), Erdős&Szekeres 1935 (昭和 10 年))
任意の自然数 m に対して，

- k 個以上の頂点を持つすべてのグラフ G に，K_m か E_m の少なくとも 1 つを誘導された部分グラフとして埋め込むことができる

が成り立つような数 k が存在する．

- この定理は次のように言い換えることもできる:

定理．(Ramsey, Erdös-Szekeres の定理の言い換え)
任意の自然数 m に対して，

- 任意の $n \geq k$ と K_n の辺の二色の色分け C に対し，K_n の m 個の頂点を持つ完全部分グラフで，すべての辺が (C での色分けで) 一色で塗られているようなものが存在する

が成り立つような数 k が存在する．

Ramsey の定理の特殊形とその言い換え

定理. (Ramsey, Erdös-Szekeres の定理の言い換え)
任意の自然数 m に対して,

- 任意の $n \geq k$ と K_n の辺の二色の色分け C に対し, K_n の m 個の頂点を持つ完全部分グラフで, すべての辺が (C での色分けで) 一色で塗られているようなものが存在する

が成り立つような数 k が存在する.

- たとえば, $m = 3$ のときは, $k = 6$ として:

Ramsey の定理の特殊形とその言い換え

定理. (Ramsey, Erdös-Szekeres の定理の言い換え)
任意の自然数 m に対して,

- 任意の $n \geq k$ と K_n の辺の二色の色分け C に対し, K_n の m 個の頂点を持つ完全部分グラフで, すべての辺が (C での色分けで) 一色で塗られているようなものが存在する

が成り立つような数 k が存在する.

- たとえば, $m = 3$ のときは, $k = 6$ として:

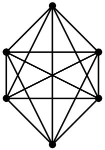
Ramsey の定理の特殊形とその言い換え

定理．(Ramsey, Erdös-Szekeres の定理の言い換え)
任意の自然数 m に対して,

- 任意の $n \geq k$ と K_n の辺の二色の色分け C に対し，K_n の m 個の頂点を持つ完全部分グラフで，すべての辺が (C での色分けで) 一色で塗られているようなものが存在する

が成り立つような数 k が存在する.

- たとえば，$m = 3$ のときは，$k = 6$ として:



K_6

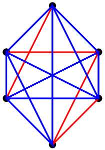
Ramsey の定理の特殊形とその言い換え

定理. (Ramsey, Erdös-Szekeres の定理の言い換え)
任意の自然数 m に対して,

- 任意の $n \geq k$ と K_n の辺の二色の色分け C に対し, K_n の m 個の頂点を持つ完全部分グラフで, すべての辺が (C での色分けで) 一色で塗られているようなものが存在する

が成り立つような数 k が存在する.

- たとえば, $m = 3$ のときは, $k = 6$ として:



K_6

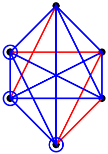
Ramsey の定理の特殊形とその言い換え

定理. (Ramsey, Erdös-Szekeres の定理の言い換え)
任意の自然数 m に対して,

- 任意の $n \geq k$ と K_n の辺の二色の色分け C に対し, K_n の m 個の頂点を持つ完全部分グラフで, すべての辺が (C での色分けで) 一色で塗られているようなものが存在する

が成り立つような数 k が存在する.

- たとえば, $m = 3$ のときは, $k = 6$ として:



K_6

Ramsey の定理の特殊形とその言い換え

定理． (Ramsey, Erdös-Szekeres の定理の言い換え)
任意の自然数 m に対して，

- 任意の $n \geq k$ と K_n の辺の 2 色の色分け C に対し，K_n の m 個の頂点を持つ完全部分グラフで，すべての辺が (C での色分けで) 一色で塗られているようなものが存在する

が成り立つような数 k が存在する．

- 上の定理が Ramsey, Erdös-Szekeres の定理の言い換えになっていることを見るには，K_n の辺の 2 色の色分け (たとえば赤と青) のうちの 1 つの色 (たとえば青) の辺だけを持つようなグラフを考えることにして，このグラフに Ramsey, Erdös-Szekeres の定理を応用することを考えればよい．たとえば:

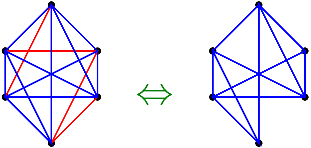
上の形の言い換えをすると，“2 色” を “ℓ 色” ($\ell \geq 1$) で置き換えた形の一般化が自然に考えられるようになる．

定理. (Ramsey, Erdös-Szekeres の定理の言い換え)
任意の自然数 m に対して,

- 任意の $n \geq k$ と K_n の辺の 2 色の色分け C に対し, K_n の m 個の頂点を持つ完全部分グラフで, すべての辺が (C での色分けで) 一色で塗られているようなものが存在する

が成り立つような数 k が存在する.

- 上の定理が Ramsey, Erdös-Szekeres の定理の言い換えになっていることを見るには, K_n の辺の 2 色の色分け (たとえば赤と青) のうちの 1 つの色 (たとえば青) の辺だけを持つようなグラフを考えることにして, このグラフに Ramsey, Erdös-Szekeres の定理を応用することを考えればよい. たとえば:



上の形の言い換えをすると, "2 色" を "ℓ 色" ($\ell \geq 1$) で置き換えた形の一般化が自然に考えられるようになる.

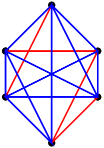
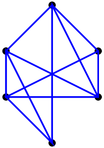
Ramsey の定理の特殊形とその言い換え

定理. (Ramsey, Erdös-Szekeres の定理の言い換え)
任意の自然数 m に対して,

- 任意の $n \geq k$ と K_n の辺の 2 色の色分け C に対し, K_n の m 個の頂点を持つ完全部分グラフで, すべての辺が (C での色分けで) 一色で塗られているようなものが存在する

が成り立つような数 k が存在する.

- 上の定理が Ramsey, Erdös-Szekeres の定理の言い換えになっていることを見るには, K_n の辺の 2 色の色分け (たとえば赤と青) のうちの 1 つの色 (たとえば青) の辺だけを持つようなグラフを考えることにして, このグラフに Ramsey, Erdös-Szekeres の定理を応用することを考えればよい. たとえば:

 $\Leftrightarrow$ 

上の形の言い換えをすると, "2 色" を "ℓ 色" ($\ell \geq 1$) で置き換えた形の一般化が自然に考えられるようになる.

Ramsey の定理

定理. (Ramsey の定理, 1928 (昭和 3))
任意の正の自然数 m, ℓ に対して,

(*) 任意の $n \geq k$ と K_n の辺の ℓ 色の色分け C に対し，K_n の m 個の頂点を持つ完全部分グラフで，すべての辺が (C での色分けで) 一色で塗られているようなものが存在する

が成り立つような数 k が存在する.

証明. 正の自然数 ℓ に関する帰納法で,

(**) 「すべての正の自然数 m に対して，(*) が成りつような k が存在する」

ことを示す.

- (**) が成り立つときには，そこでの数 k のうち最小なものがとれるが，これを，$c_\ell(m)$ とあらわすことにする.
- (帰納法の初め) $\ell = 1$ のときには，$c_1(m) = m$ とすればよい.

Ramsey の定理

定理. (Ramsey の定理, 1928 (昭和 3))
任意の正の自然数 m, ℓ に対して,

(*) 任意の $n \geq k$ と K_n の辺の ℓ 色の色分け C に対し, K_n の m 個の頂点を持つ完全部分グラフで, すべての辺が (C での色分けで) 一色で塗られているようなものが存在する

が成り立つような数 k が存在する.

証明. 正の自然数 ℓ に関する帰納法で,

(**) 「すべての正の自然数 m に対して, (*) が成りつような k が存在する」

ことを示す.

- (**) が成り立つときには, そこでの数 k のうち最小なものがとれるが, これを, $c_\ell(m)$ とあらわすことにする.

- (帰納法の初め) $\ell = 1$ のときには, $c_1(m) = m$ とすればよい.

Ramsey の定理

定理. (Ramsey の定理, 1928 (昭和 3))
任意の正の自然数 m, ℓ に対して,

(*) 任意の $n \geq k$ と K_n の辺の ℓ 色の色分け C に対し, K_n の m 個の頂点を持つ完全部分グラフで, すべての辺が (C での色分けで) 一色で塗られているようなものが存在する

が成り立つような数 k が存在する.

証明. 正の自然数 ℓ に関する帰納法で,

(**) 「すべての正の自然数 m に対して, (*) が成りつような k が存在する」

ことを示す.

- (**) が成り立つときには, そこでの数 k のうち最小なものがとれるが, これを, $c_\ell(m)$ とあらわすことにする.
- (帰納法の初め) $\ell = 1$ のときには, $c_1(m) = m$ とすればよい.

Ramsey の定理

定理. (Ramsey の定理, 1928 (昭和 3))
任意の正の自然数 m, ℓ に対して,

(*) 任意の $n \geq k$ と K_n の辺の ℓ 色の色分け C に対し, K_n の m 個の頂点を持つ完全部分グラフで, すべての辺が (C での色分けで) 一色で塗られているようなものが存在する

が成り立つような数 k が存在する.

証明. 正の自然数 ℓ に関する帰納法で,

(**) 「すべての正の自然数 m に対して, (*) が成りつような k が存在する」

ことを示す.

- (**) が成り立つときには, そこでの数 k のうち最小なものがとれるが, これを, $c_\ell(m)$ とあらわすことにする.
- (帰納法の初め) $\ell = 1$ のときには, $c_1(m) = m$ とすればよい.

Ramsey の定理

定理. (Ramsey の定理, 1928 (昭和 3))
任意の正の自然数 m, ℓ に対して,

(*) 任意の $n \geq k$ と K_n の辺の ℓ 色の色分け C に対し, K_n の m 個の頂点を持つ完全部分グラフで, すべての辺が (C での色分けで) 一色で塗られているようなものが存在する

が成り立つような数 k が存在する.

証明. 正の自然数 ℓ に関する帰納法で,

(**) 「すべての正の自然数 m に対して, (*) が成りつような k が存在する」

ことを示す.

- (**) が成り立つときには, そこでの数 k のうち最小なものがとれるが, これを, $c_\ell(m)$ とあらわすことにする.
- (帰納法の初め) $\ell = 1$ のときには, $c_1(m) = m$ とすればよい.

Ramsey の定理 (2/3)

正の自然数 ℓ に関する帰納法で,

(**) 「すべての正の自然数 m に対して, (*) が成りつような k が存在する」

ことを示す.

- (**) が成り立つときには, そこでの数 k のうち最小なものがとれるが, これを, $c_\ell(m)$ とあらわすことにする.

▷ (帰納法の初め) $\ell = 1$ のときには, $c_1(m) = m$ とすればよい.
$\ell = 2$ のときには, $c_2(m) = r(m)$ とすればよい.
($r(m)$ は Ramsey 数).

▷ (帰納法のステップ) $\ell > 2$ として, すべての $\ell' < \ell$ に対して, (**) が成り立つとき, 正の自然数 m に対し,「$k = c_2(c_{\ell-1}(m))$ とすると, k は, ℓ と m に対する (*) を満たす」 ことを示せばよい.

これにより, $c_\ell(m) \leq c_2(c_{\ell-1}(m))$ が成り立つことも, 示せたことになる.

Ramsey の定理 (2/3)

正の自然数 ℓ に関する帰納法で,

(**) 「すべての正の自然数 m に対して, (*) が成りつような k が存在する」

ことを示す.

- (**) が成り立つときには, そこでの数 k のうち最小なものがとれるが, これを, $c_\ell(m)$ とあらわすことにする.

▷ (帰納法の初め) $\ell = 1$ のときには, $c_1(m) = m$ とすればよい.
$\ell = 2$ のときには, $c_2(m) = r(m)$ とすればよい.
($r(m)$ は Ramsey 数).

▷ (帰納法のステップ) $\ell > 2$ として, すべての $\ell' < \ell$ に対して, (**) が成り立つとき, 正の自然数 m に対し,「$k = c_2(c_{\ell-1}(m))$ とすると, k は, ℓ と m に対する (*) を満たす」 ことを示せばよい.

これにより, $c_\ell(m) \le c_2(c_{\ell-1}(m))$ が成り立つことも, 示せたことになる.

Ramsey の定理 (2/3)

正の自然数 ℓ に関する帰納法で,

(**) 「すべての正の自然数 m に対して, (*) が成りつような k が存在する」

ことを示す.

- (**) が成り立つときには, そこでの数 k のうち最小なものがとれるが, これを, $c_\ell(m)$ とあらわすことにする.

- (帰納法の初め) $\ell = 1$ のときには, $c_1(m) = m$ とすればよい. $\ell = 2$ のときには, $c_2(m) = r(m)$ とすればよい. ($r(m)$ は Ramsey 数).

- (帰納法のステップ) $\ell > 2$ として, すべての $\ell' < \ell$ に対して, (**) が成り立つとき, 正の自然数 m に対し,「$k = c_2(c_{\ell-1}(m))$ とすると, k は, ℓ と m に対する (*) を満たす」 ことを示せばよい.

これにより, $c_\ell(m) \leq c_2(c_{\ell-1}(m))$ が成り立つことも, 示せたことになる.

Ramsey の定理 (2/3)

正の自然数 ℓ に関する帰納法で,

(**) 「すべての正の自然数 m に対して，(*) が成りつような k が存在する」

ことを示す.

▶ (**) が成り立つときには，そこでの数 k のうち最小なものがとれるが，これを，$c_\ell(m)$ とあらわすことにする.

▷ (帰納法の初め) $\ell = 1$ のときには，$c_1(m) = m$ とすればよい. $\ell = 2$ のときには，$c_2(m) = r(m)$ とすればよい. ($r(m)$ は Ramsey 数).

▷ (帰納法のステップ) $\ell > 2$ として，すべての $\ell' < \ell$ に対して，(**) が成り立つとき，正の自然数 m に対し,「$k = c_2(c_{\ell-1}(m))$ とすると，k は，ℓ と m に対する (*) を満たす」 ことを示せばよい.

これにより，$c_\ell(m) \le c_2(c_{\ell-1}(m))$ が成り立つことも，示せたことになる.

Ramsey の定理 (3/3)

▷ (帰納法のステップ) $\ell > 2$ として，すべての $\ell' < \ell$ に対して，(**) が成り立つとき，正の自然数 m に対し，**「$k = c_2(c_{\ell-1}(m))$ とすると，k は，ℓ と m に対する (*) を満たす」** ことを示せばよい．

▷ これにより，$c_\ell(m) \le c_2(c_{\ell-1}(m))$ が成り立つことも，示せたことになる．

$k = c_2(c_{\ell-1}(m))$ 個以上の頂点を持つ完全グラフ K_n の辺の任意の ℓ 色の色分け C を考える．
C で使った色を $c_0, c_1, \ldots, c_{\ell-1}$ として，$c_1, \ldots, c_{\ell-1}$ をすべて同じ色 d だと思ったときの，G の二色への色分け C' だと思うと，k のとりかたから，G のサイズが $c_\ell(m)$ の完全部分グラフ G' で，辺が一色で塗られたものがとれる．G' が c_0 で塗られていれば，これは，色分け C で一色で塗られた完全部分グラフでもあるからよい．
もし G' が d 一色で塗られていれば，色分け C に関して G' は $\ell - 1$ 色で色分けされた $c_{\ell-1}(m)$ 個の頂点を持つグラフだから，サイズが m の部分グラフで，辺の色が一色のものがとれるから，この場合にもよい．□

Ramsey の定理 (3/3)

▷ (帰納法のステップ) $\ell > 2$ として，すべての $\ell' < \ell$ に対して，(**) が成り立つとき，正の自然数 m に対し，**「$k = c_2(c_{\ell-1}(m))$ とすると，k は，ℓ と m に対する (*) を満たす」** ことを示せばよい．

▷ これにより，$c_\ell(m) \le c_2(c_{\ell-1}(m))$ が成り立つことも，示せたことになる．

$k = c_2(c_{\ell-1}(m))$ 個以上の頂点を持つ完全グラフ K_n の辺の任意の ℓ 色の色分け C を考える．

C で使った色を $c_0, c_1, \ldots, c_{\ell-1}$ として，$c_1, \ldots, c_{\ell-1}$ をすべて同じ色 d だと思ったときの，G の二色への色分け C' だと思うと，k のとりかたから，G のサイズが $c_\ell(m)$ の完全部分グラフ G' で，辺が一色で塗られたものがとれる．G' が c_0 で塗られていれば，これは，色分け C で一色で塗られた完全部分グラフでもあるからよい．もし G' が d 一色で塗られていれば，色分け C に関して G' は $\ell - 1$ 色で色分けされた $c_{\ell-1}(m)$ 個の頂点を持つグラフだから，サイズが m の部分グラフで，辺の色が一色のものがとれるから，この場合にもよい．□

Ramsey の定理 (3/3)

▷ (帰納法のステップ) $\ell > 2$ として，すべての $\ell' < \ell$ に対して，(**) が成り立つとき，正の自然数 m に対し，**「$k = c_2(c_{\ell-1}(m))$ とすると，k は，ℓ と m に対する (*) を満たす」** ことを示せばよい．

▷ これにより，$c_\ell(m) \le c_2(c_{\ell-1}(m))$ が成り立つことも，示せたことになる．

$k = c_2(c_{\ell-1}(m))$ 個以上の頂点を持つ完全グラフ K_n の辺の任意の ℓ 色の色分け C を考える．

C で使った色を $c_0, c_1, \ldots, c_{\ell-1}$ として，$c_1, \ldots, c_{\ell-1}$ をすべて同じ色 d だと思ったときの，G の二色への色分け C' だと思うと，k のとりかたから，G のサイズが $c_\ell(m)$ の完全部分グラフ G' で，辺が一色で塗られたものがとれる．G' が c_0 で塗られていれば，これは，色分け C で一色で塗られた完全部分グラフでもあるからよい．もし G' が d 一色で塗られていれば，色分け C に関して G' は $\ell - 1$ 色で色分けされた $c_{\ell-1}(m)$ 個の頂点を持つグラフだから，サイズが m の部分グラフで，辺の色が一色のものがとれるから，この場合にもよい．□

Ramsey の定理 (3/3)

▷ (帰納法のステップ) $\ell > 2$ として，すべての $\ell' < \ell$ に対して，(**) が成り立つとき，正の自然数 m に対し，**「$k = c_2(c_{\ell-1}(m))$ とすると，k は，ℓ と m に対する (*) を満たす」** ことを示せばよい．

▷ これにより，$c_\ell(m) \leq c_2(c_{\ell-1}(m))$ が成り立つことも，示せたことになる．

$k = c_2(c_{\ell-1}(m))$ 個以上の頂点を持つ完全グラフ K_n の辺の任意の ℓ 色の色分け C を考える．
C で使った色を $c_0, c_1, \ldots, c_{\ell-1}$ として，$c_1, \ldots, c_{\ell-1}$ をすべて同じ色 d だと思ったときの，G の二色への色分け C' だと思うと，k のとりかたから，G のサイズが $c_\ell(m)$ の完全部分グラフ G' で，辺が一色で塗られたものがとれる．G' が c_0 で塗られていれば，これは，色分け C で一色で塗られた完全部分グラフでもあるからよい．
もし G' が d 一色で塗られていれば，色分け C に関して G' は $\ell - 1$ 色で色分けされた $c_{\ell-1}(m)$ 個の頂点を持つグラフだから，サイズが m の部分グラフで，辺の色が一色のものがとれるから，この場合にもよい．□

Ramsey の定理 (3/3)

▷ (帰納法のステップ) $\ell > 2$ として，すべての $\ell' < \ell$ に対して，(**) が成り立つとき，正の自然数 m に対し，**「$k = c_2(c_{\ell-1}(m))$ とすると，k は，ℓ と m に対する (*) を満たす」** ことを示せばよい．

▷ これにより，$c_\ell(m) \le c_2(c_{\ell-1}(m))$ が成り立つことも，示せたことになる．

$k = c_2(c_{\ell-1}(m))$ 個以上の頂点を持つ完全グラフ K_n の辺の任意の ℓ 色の色分け C を考える．
C で使った色を $c_0, c_1, \dots, c_{\ell-1}$ として，$c_1, \dots, c_{\ell-1}$ をすべて同じ色 d だと思ったときの，G の二色への色分け C' だと思うと，k のとりかたから，G のサイズが $c_\ell(m)$ の完全部分グラフ G' で，辺が一色で塗られたものがとれる．G' が c_0 で塗られていれば，これは，色分け C で一色で塗られた完全部分グラフでもあるからよい．
もし G' が d 一色で塗られていれば，色分け C に関して G' は $\ell - 1$ 色で色分けされた $c_{\ell-1}(m)$ 個の頂点を持つグラフだから，サイズが m の部分グラフで，辺の色が一色のものがとれるから，この場合にもよい．$\square$

エルデシュ (Paul Erdős)

Paul Erdős (1992, Copyright: MFO)
(26 March 1913 (大正 2) in Budapest, Hungary
— 20 Sept 1996 (平成 8) in Warsaw, Poland)

- Erdős は，いくつもの重要な数学の研究結果を残したが，多くの共著者を持っていたことでも知られている — 生涯に (少なくとも) 511 人の数学者と共著論文を書いている．Erdős は，天才的な数学者が個人プレーで行なうことが多かったこれまでの数学の研究スタイルに加えて，国際的な共同研究での研究，という新しい研究スタイルを確立することにも大きな貢献をした，とも言えるだろう．