

構造の数理

2012 年 02 月 02 日 第 13 回目の講義

Sakaé Fuchino (湊野 昌)

Dept. of Computer Sciences
Kobe University

(神戸大学大学院 システム情報学研究科)

<http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/>

無限グラフ

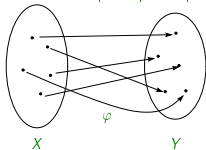
(2. Februar 2012 (13:13 JST) version)

神戸大学 2011 年度後期の講義

This presentation is typeset by p^AT_EX with beamer class.

- ▶ 数学では無限の対象 (要素を無限に持つ集まり) を扱おう必要が出てくることが多い. 有限の対象を扱っているときも, それらの全体は無限になる場合も多い: たとえば有限グラフは無限に存在する.
- ▶ 無限を数学的に厳密に扱おうために, 「集合」(しゅうごう, (英) set, (独) Menge, (仏) ensemble) の理論 (集合論) が必要になる.
- ▶ 数や, 平面上の点, グラフなど数学で扱おう対象のいくつかを集めてひとまとまりにしたものを **集合** とよぶ.
- ▶ “何も集めない” という対象の集めかたをして作る集合 (**空集合**: くうしゅうごう) も考えることにする. この集合を \emptyset であらわす.
- ▶ 集合 X に数学的对象 x が**要素** (**element**) として含まれているとき, これを $x \in X$ とあらわす. x が X に用途として含まれていないときには, $x \notin X$ と書く.

▶ 2つの集合 X , Y の **要素の数が等しい** とは, X の各要素 x に対し Y の要素 $\varphi(x)$ を対応させる “写像” で, この対応が X の要素一つ一つに異なる Y の要素をもれなく対応させるもの (**双射**) が存在することとする. このとき $|X| = |Y|$ と書くことにする.



▶ 一つ一つの自然数は集合として導入することができる:

▷ 0 (ゼロ) は空集合 \emptyset のことだとする.

▷ 1 は 0 だけを集めてできる集合 $\{0\}$ (つまり, $\{\emptyset\}$) とする.

▷ 2 は, 0 と 1 を集めてできる集合 $\{0, 1\}$ (つまり, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$)

⋮

▷ 一般に, n ($n > 0$) は, 集合 $\{0, 1, \dots, n-1\}$ のこととする.

▶ これにより, ある集合 X が n 個の要素を持つとは, $|X| = |n|$ となることと定義できる. このことを $|X| = n$ と略記する.

- ▶ 集合 X, Y で, Y の要素の全部を X の要素に 1 対 1 に対応させることができないとき, Y は X より本質的に (サイズの) 大きな集合と考えることができる. このことを Y は X より **濃度 (cardinality)** が大きいといい, $|X| < |Y|$ とあらわす.
- ▶ $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$ (G. Cantor, 1873 (明治 6)). すべての集合 X に対し, X より濃度の大きな集合が存在する (Cantor, 1891 (明治 24)).
- ▶ 頂点の全体の集合が無限集合になるグラフを**無限グラフ** とよぶ. 無限グラフでないグラフを**有限グラフ** とよぶ.
- ▶ 有限グラフ G が平面グラフになるのは, G が K_5 および $K_{3,3}$ のどの subdivision も部分グラフとして含まないときだった (Kratowski の定理).
- ▶ この定理は, 無限グラフに対しては成り立たない. たとえば, 平面の点全体の集合より濃度の大きな集合の各要素を頂点とするような空グラフ G を考えると, G は K_5 および $K_{3,3}$ のどの subdivision も部分グラフとして含まないが, G の頂点は平面に 1 対 1 に埋め込めないから, G は平面グラフではありえない.

- ▶ 有限グラフに対して成立する (自明でない) 定理で, 無限グラフに対しても拡張のできるものもある.

定理. 任意の (必ずしも有限ではない) 一重グラフ G が, K_5 および $K_{3,3}$ のどの subdivision も部分グラフとして含まないなら, G の頂点を 4 色で塗り分けて, 辺で結ばれたどの G の 2 頂点も違う色で塗られているようにできる.

- ▶ 有限グラフに対しては「 K_5 および $K_{3,3}$ のどの subdivision も部分グラフとして含まない」という条件は平面グラフであることと同値だから, 四色定理の言い換えになっている.
- ▶ 定理の証明は, 四色定理を仮定すると, 命題論理コンパクト性定理と呼ばれる数理論理学の定理を用いて数行でできる.

系. 任意の (必ずしも有限ではない) 一重グラフ G が平面グラフなら, G の頂点を 4 色で塗り分けて, 辺で結ばれたどの G の 2 頂点も違う色で塗られているようにできる.

証明. (有限または無限の) 平面グラフは K_5 および $K_{3,3}$ のどの subdivision も部分グラフとして含まないから, 定理から系が導かれる. \square

