構造の数理

2011 年 11 月 10 日　第 4 回目の講義

Sakaé Fuchino (渕野 昌)

Dept. of Computer Sciences
Kobe University
(神戸大学大学院 システム情報学研究科)

http://fuchino.ddo.jp/

一筆書きのできる多重グラフの特徴付け
— オイラーの定理とその逆 (2)

(8. April 2018 (10:15 JST) version)

神戸大学 2011 年度後期の講義

This presentation is typeset by pLaTeX with beamer class.

復習: オイラーの定理

定理 (オイラーの定理，1735 (享保（きょうほう）20 年)).

任意の連結な多重グラフ G が一筆書きできるなら，次の (a), (b) のうちの 1 つが成り立つ:

(a) G のすべての頂点の次数は偶数である．
(b) G の頂点で次数が奇数になるものがちょうど 2 つある．

- p をあるグラフ G の頂点の 1 つとするとき，p につながっている辺の数を p の **次数** (**degree**) とよぶ．ただしループは二辺がつながっていると数える．
- 前回に，黒板で話した，この定理逆の証明をスライドで復習することにする．

復習: オイラーの定理

定理 (オイラーの定理，1735 (享保（きょうほう）20 年)).
任意の連結な多重グラフ G が一筆書きできるなら，次の (a), (b) のうちの 1 つが成り立つ:

(a) G のすべての頂点の次数は偶数である.
(b) G の頂点で次数が奇数になるものがちょうど 2 つある.

- p をあるグラフ G の頂点の 1 つとするとき，p につながっている辺の数を p の **次数 (degree)** とよぶ．ただしループは二辺がつながっていると数える.
- 前回に，黒板で話した，この定理逆の証明をスライドで復習することにする.

復習: オイラーの定理

定理 (オイラーの定理，1735 (享保（きょうほう）20 年)).
任意の連結な多重グラフ G が一筆書きできるなら，次の (a), (b) のうちの 1 つが成り立つ:

(a) G のすべての頂点の次数は偶数である．
(b) G の頂点で次数が奇数になるものがちょうど 2 つある．

- p をあるグラフ G の頂点の 1 つとするとき，p につながっている辺の数を p の **次数 (degree)** とよぶ．ただしループは二辺がつながっていると数える．
- 前回に，黒板で話した，この定理逆の証明をスライドで復習することにする．

レオンハルト・オイラー

- オイラー (Leonhard Euler, 1707 (宝永 4 年) – 1783 (天明 3 年)) は，上の定理を証明して，「クーニヒスベルクの橋の問題」に解がないことを示した．後で,「オイラーの公式」について触れることになるが，このオイラーも同一人物である．

- ここでのオイラーの定理は 1735 年に発表されているので，オイラーの 28 才ごろの仕事ということになる．
- オイラーには他にも多くの数学の研究があり,「オイラーの定理」として知られている結果もここでのもの以外に複数ある．グラフに関する研究はオイラーの仕事の全体の中のほんの一部である．

- オイラーの (グラフ理論以外の) 主要な仕事については，例えば
  - 高瀬 正仁 著，無限解析のはじまり — わたしのオイラー，ちくま学芸文庫，(2009).

を参照.

レオンハルト・オイラー

- オイラー (Leonhard Euler, 1707 (宝永 4 年) – 1783 (天明 3 年)) は，上の定理を証明して，「クーニヒスベルクの橋の問題」に解がないことを示した．後で，「オイラーの公式」について触れることになるが，このオイラーも同一人物である．

- ここでのオイラーの定理は 1735 年に発表されているので，オイラーの 28 才ごろの仕事ということになる．
- オイラーには他にも多くの数学の研究があり，「オイラーの定理」として知られている結果もここでのもの以外に複数ある．グラフに関する研究はオイラーの仕事の全体の中のほんの一部である．

- オイラーの (グラフ理論以外の) 主要な仕事については，例えば
  - 高瀬 正仁 著，無限解析のはじまり — わたしのオイラー，ちくま学芸文庫，(2009).

を参照．

レオンハルト・オイラー

- オイラー (Leonhard Euler, 1707 (宝永 4 年) – 1783 (天明 3 年)) は，上の定理を証明して，「クーニヒスベルクの橋の問題」に解がないことを示した．後で，「オイラーの公式」について触れることになるが，このオイラーも同一人物である．

- ここでのオイラーの定理は 1735 年に発表されているので，オイラーの 28 才ごろの仕事ということになる．
- オイラーには他にも多くの数学の研究があり，「オイラーの定理」として知られている結果もここでのもの以外に複数ある．グラフに関する研究はオイラーの仕事の全体の中のほんの一部である．

- オイラーの (グラフ理論以外の) 主要な仕事については，例えば
  - 高瀬 正仁 著，無限解析のはじまり — わたしのオイラー，ちくま学芸文庫，(2009).

を参照．

レオンハルト・オイラー

- オイラー (Leonhard Euler, 1707 (宝永 4 年) – 1783 (天明 3 年)) は，上の定理を証明して，「クーニヒスベルクの橋の問題」に解がないことを示した．後で，「オイラーの公式」について触れることになるが，このオイラーも同一人物である．

- ここでのオイラーの定理は 1735 年に発表されているので，オイラーの 28 才ごろの仕事ということになる．
- オイラーには他にも多くの数学の研究があり，「オイラーの定理」として知られている結果もここでのもの以外に複数ある．グラフに関する研究はオイラーの仕事の全体の中のほんの一部である．

- オイラーの (グラフ理論以外の) 主要な仕事については，例えば
  - 高瀬 正仁 著，無限解析のはじまり — わたしのオイラー，ちくま学芸文庫，(2009).

を参照．

オイラーの定理の逆

定理 (オイラーの定理の逆).

任意の連結な多重グラフ G について，次の (a), (b) のうちの 1 つが成り立つなら G は一筆書きが可能である:

(a) G のすべての頂点の次数は偶数である．
(b) G の頂点で次数が奇数になるものがちょうど 2 つある．

- この証明では，以下の形の 帰納法の原理 を用いる:

ある命題 A がある自然数 k より大きなすべての自然数 n に対して成り立つことを示すためには，次を示せばよい:

(帰納法の始め)　A は $n = k$ のときに成り立つ，

(帰納法のステップ)　すべての $m > k$ に対して，すべての $n = \ell$ $(k \leq \ell < m)$ に対し A が成り立つなら，$n = m$ に対しても A が成り立つ．

オイラーの定理の逆

定理 (オイラーの定理の逆).

任意の連結な多重グラフ G について，次の (a), (b) のうちの 1 つが成り立つなら G は一筆書きが可能である:

(a) G のすべての頂点の次数は偶数である．
(b) G の頂点で次数が奇数になるものがちょうど 2 つある．

- この証明では，以下の形の 帰納法の原理 を用いる:

ある命題 A がある自然数 k より大きなすべての自然数 n に対して成り立つことを示すためには，次を示せばよい:

(帰納法の始め)　A は $n = k$ のときに成り立つ，

(帰納法のステップ)　すべての $m > k$ に対して，すべての $n = \ell$ $(k \leq \ell < m)$ に対し A が成り立つなら，$n = m$ に対しても A が成り立つ．

オイラーの定理の逆

定理 (オイラーの定理の逆).

任意の連結な多重グラフ G について，次の (a), (b) のうちの 1 つが成り立つなら G は一筆書きが可能である:

(a) G のすべての頂点の次数は偶数である．
(b) G の頂点で次数が奇数になるものがちょうど 2 つある．

- この証明では，以下の形の 帰納法の原理 を用いる:

ある命題 A がある自然数 k より大きなすべての自然数 n に対して成り立つことを示すためには，次を示せばよい:

(帰納法の始め) A は $n = k$ のときに成り立つ，

(帰納法のステップ) すべての $m > k$ に対して，すべての $n = \ell$ $(k \leq \ell < m)$ に対し A が成り立つなら，$n = m$ に対しても A が成り立つ．

オイラーの定理の逆

定理 (オイラーの定理の逆).

任意の連結な多重グラフ G について，次の (a), (b) のうちの 1 つが成り立つなら G は一筆書きが可能である:

(a) G のすべての頂点の次数は偶数である.
(b) G の頂点で次数が奇数になるものがちょうど 2 つある.

- この証明では，以下の形の 帰納法の原理 を用いる:

ある命題 A がある自然数 k より大きなすべての自然数 n に対して成り立つことを示すためには，次を示せばよい:

(帰納法の始め) A は $n = k$ のときに成り立つ,

(帰納法のステップ) すべての $m > k$ に対して，すべての $n = \ell$ $(k \leq \ell < m)$ に対し A が成り立つなら，$n = m$ に対しても A が成り立つ.

オイラーの定理の逆の拡張形

- 帰納法を用いる証明では，帰納法がうまく機能するように，証明しなくてはいけない命題よりさらに強い命題を帰納法の議論に乗せることが必要になることが多い． ここでもオイラーの定理の逆をさらに拡張した次の定理を帰納法で示すことになる:

定理 (オイラーの定理の逆の拡張形).

任意の連結な多重グラフ G について，次の (a), (b) のうちの 1 つが成り立つなら G は一筆書きが可能である:

(a) G のすべての頂点の次数は偶数である．
(b) G の頂点で次数が奇数になるものがちょうど 2 つある．

更に，(a) が成り立つときには，G の任意の頂点から出発して同じ頂点に戻る一筆書が存在し，(b) が成り立つときには，次数が奇数の頂点の一つから出発して，もう一つの次数が奇数の頂点で終る一筆書が存在する．

オイラーの定理の逆の拡張形

- 帰納法を用いる証明では，帰納法がうまく機能するように，証明しなくてはいけない命題よりさらに強い命題を帰納法の議論に乗せることが必要になることが多い．ここでもオイラーの定理の逆をさらに拡張した次の定理を帰納法で示すことになる:

定理 (オイラーの定理の逆の拡張形).

任意の連結な多重グラフ G について，次の (a), (b) のうちの 1 つが成り立つなら G は一筆書きが可能である:

(a) G のすべての頂点の次数は偶数である．
(b) G の頂点で次数が奇数になるものがちょうど 2 つある．

更に，(a) が成り立つときには，G の任意の頂点から出発して同じ頂点に戻る一筆書が存在し，(b) が成り立つときには，次数が奇数の頂点の一つから出発して，もう一つの次数が奇数の頂点で終る一筆書が存在する．

オイラーの定理の逆の拡張形

- 帰納法を用いる証明では，帰納法がうまく機能するように，証明しなくてはいけない命題よりさらに強い命題を帰納法の議論に乗せることが必要になることが多い．ここでもオイラーの定理の逆をさらに拡張した次の定理を帰納法で示すことになる:

定理 (オイラーの定理の逆の拡張形).

任意の連結な多重グラフ G について，次の (a), (b) のうちの 1 つが成り立つなら G は一筆書きが可能である:

(a) G のすべての頂点の次数は偶数である．
(b) G の頂点で次数が奇数になるものがちょうど 2 つある．

更に，(a) が成り立つときには，G の任意の頂点から出発して同じ頂点に戻る一筆書が存在し，(b) が成り立つときには，次数が奇数の頂点の一つから出発して，もう一つの次数が奇数の頂点で終る一筆書が存在する．

オイラーの定理の逆の拡張形の証明

- 連結な多重グラフ G の辺の数に関する帰納法で示す．

G の辺の数が 0 のとき (帰納法の始め): このときには，G は連結だから，G は一つの頂点からなるが，辺は一つも存在しないので，一筆書は書きはじめる前に終っている．したがって，定理は無内容的に成り立つ．

- **(帰納法のステップ):** 以下では，$m > 0$ として，すべての $0 \le \ell < m$ に対し，辺の数が ℓ のグラフに対しては，オイラーの定理の逆の拡張形が成り立っていると仮定する．

- G を辺の数が m の連結な多重グラフで 条件 (a) か (b) を満たすものとする．

▷ **場合 1.** G が (a) を満たす場合: つまり，すべての頂点の次数が偶数の場合．この場合には，任意の G の頂点 p_0 から始まって p_0 自身で終る一筆書きが存在することを示す必要がある．p_0 に繋がった辺の一つを v_0 とする (G は連結だから必ず p_0 につながった辺が一つはある)．v_0 のもう一つの端点に繋がった頂点を p_1 とする．

オイラーの定理の逆の拡張形の証明

- 連結な多重グラフ G の辺の数に関する帰納法で示す．

G の辺の数が 0 のとき (帰納法の始め): このときには，G は連結だから，G は一つの頂点からなるが，辺は一つも存在しないので，一筆書は書きはじめる前に終っている．したがって，定理は無内容的に成り立つ．

- **(帰納法のステップ):** 以下では，$m > 0$ として，すべての $0 \leq \ell < m$ に対し，辺の数が ℓ のグラフに対しては，オイラーの定理の逆の拡張形が成り立っていると仮定する．

- G を辺の数が m の連結な多重グラフで 条件 (a) か (b) を満たすものとする．

▷ **場合 1.** G が (a) を満たす場合: つまり，すべての頂点の次数が偶数の場合．この場合には，任意の G の頂点 p_0 から始まって p_0 自身で終る一筆書きが存在することを示す必要がある．p_0 に繋がった辺の一つを v_0 とする (G は連結だから必ず p_0 につながった辺が一つはある)．v_0 のもう一つの端点に繋がった頂点を p_1 とする．

オイラーの定理の逆の拡張形の証明

- 連結な多重グラフ G の辺の数に関する帰納法で示す．

G の辺の数が 0 のとき (帰納法の始め): このときには，G は連結だから，G は一つの頂点からなるが，辺は一つも存在しないので，一筆書は書きはじめる前に終っている．したがって，定理は無内容的に成り立つ．

- **(帰納法のステップ):** 以下では，$m > 0$ として，すべての $0 \leq \ell < m$ に対し，辺の数が ℓ のグラフに対しては，オイラーの定理の逆の拡張形が成り立っていると仮定する．

- G を辺の数が m の連結な多重グラフで 条件 (a) か (b) を満たすものとする．

▷ **場合 1.** G が (a) を満たす場合: つまり，すべての頂点の次数が偶数の場合．この場合には，任意の G の頂点 p_0 から始まって p_0 自身で終る一筆書きが存在することを示す必要がある．p_0 に繋がった辺の一つを v_0 とする (G は連結だから必ず p_0 につながった辺が一つはある)．v_0 のもう一つの端点に繋がった頂点を p_1 とする．

オイラーの定理の逆の拡張形の証明

- 連結な多重グラフ G の辺の数に関する帰納法で示す．

G の辺の数が 0 のとき (帰納法の始め): このときには，G は連結だから，G は一つの頂点からなるが，辺は一つも存在しないので，一筆書は書きはじめる前に終っている．したがって，定理は無内容的に成り立つ．

- **(帰納法のステップ):** 以下では，$m > 0$ として，すべての $0 \leq \ell < m$ に対し，辺の数が ℓ のグラフに対しては，オイラーの定理の逆の拡張形が成り立っていると仮定する．

- G を辺の数が m の連結な多重グラフで 条件 (a) か (b) を満たすものとする．

▷ **場合 1.** G が (a) を満たす場合: つまり，すべての頂点の次数が偶数の場合．この場合には，任意の G の頂点 p_0 から始まって p_0 自身で終る一筆書きが存在することを示す必要がある．p_0 に繋がった辺の一つを v_0 とする (G は連結だから必ず p_0 につながった辺が一つはある)．v_0 のもう一つの端点に繋がった頂点を p_1 とする．

オイラーの定理の逆の拡張形の証明

- 連結な多重グラフ G の辺の数に関する帰納法で示す.

G の辺の数が 0 のとき (帰納法の始め): このときには，G は連結だから，G は一つの頂点からなるが，辺は一つも存在しないので，一筆書は書きはじめる前に終っている．したがって，定理は無内容的に成り立つ.

- **(帰納法のステップ):** 以下では，$m > 0$ として，すべての $0 \leq \ell < m$ に対し，辺の数が ℓ のグラフに対しては，オイラーの定理の逆の拡張形が成り立っていると仮定する.

- G を辺の数が m の連結な多重グラフで 条件 (a) か (b) を満たすものとする.

- **場合 1.** G が (a) を満たす場合: つまり，すべての頂点の次数が偶数の場合．この場合には，任意の G の頂点 p_0 から始まって p_0 自身で終る一筆書きが存在することを示す必要がある．p_0 に繋がった辺の一つを v_0 とする (G は連結だから必ず p_0 につながった辺が一つはある)．v_0 のもう一つの端点に繋がった頂点を p_1 とする.

オイラーの定理の逆の拡張形の証明

- 連結な多重グラフ G の辺の数に関する帰納法で示す.

G の辺の数が 0 のとき (帰納法の始め): このときには，G は連結だから，G は一つの頂点からなるが，辺は一つも存在しないので，一筆書は書きはじめる前に終っている．したがって，定理は無内容的に成り立つ．

- **(帰納法のステップ):** 以下では，$m > 0$ として，すべての $0 \leq \ell < m$ に対し，辺の数が ℓ のグラフに対しては，オイラーの定理の逆の拡張形が成り立っていると仮定する．

- G を辺の数が m の連結な多重グラフで 条件 (a) か (b) を満たすものとする．

▷ **場合 1.** G が (a) を満たす場合: つまり，すべての頂点の次数が偶数の場合．この場合には，任意の G の頂点 p_0 から始まって p_0 自身で終る一筆書きが存在することを示す必要がある．p_0 に繋がった辺の一つを v_0 とする (G は連結だから必ず p_0 につながった辺が一つはある)．v_0 のもう一つの端点に繋がった頂点を p_1 とする．

オイラーの定理の逆の拡張形の証明

- 連結な多重グラフ G の辺の数に関する帰納法で示す.

G の辺の数が 0 のとき (帰納法の始め): このときには，G は連結だから，G は一つの頂点からなるが，辺は一つも存在しないので，一筆書は書きはじめる前に終っている．したがって，定理は無内容的に成り立つ.

- **(帰納法のステップ):** 以下では，$m > 0$ として，すべての $0 \leq \ell < m$ に対し，辺の数が ℓ のグラフに対しては，オイラーの定理の逆の拡張形が成り立っていると仮定する.

- G を辺の数が m の連結な多重グラフで 条件 (a) か (b) を満たすものとする.

▷ **場合 1.** G が (a) を満たす場合: つまり，すべての頂点の次数が偶数の場合．この場合には，任意の G の頂点 p_0 から始まって p_0 自身で終る一筆書きが存在することを示す必要がある．p_0 に繋がった辺の一つを v_0 とする (G は連結だから必ず p_0 につながった辺が一つはある)．v_0 のもう一つの端点に繋がった頂点を p_1 とする.

オイラーの定理の逆の拡張形の証明

▶ 連結な多重グラフ G の辺の数に関する帰納法で示す．

G の辺の数が 0 のとき (帰納法の始め): このときには，G は連結だから，G は一つの頂点からなるが，辺は一つも存在しないので，一筆書は書きはじめる前に終っている．したがって，定理は無内容的に成り立つ．

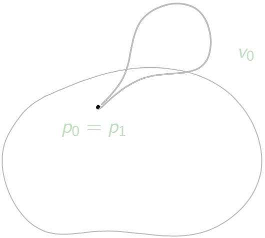
▶ **(帰納法のステップ):** 以下では，$m > 0$ として，すべての $0 \leq \ell < m$ に対し，辺の数が ℓ のグラフに対しては，オイラーの定理の逆の拡張形が成り立っていると仮定する．

▶ G を辺の数が m の連結な多重グラフで 条件 (a) か (b) を満たすものとする．

▷ **場合 1.** G が (a) を満たす場合: つまり，すべての頂点の次数が偶数の場合．この場合には，任意の G の頂点 p_0 から始まって p_0 自身で終る一筆書きが存在することを示す必要がある．p_0 に繋がった辺の一つを v_0 とする (G は連結だから必ず p_0 につながった辺が一つはある)．v_0 のもう一つの端点に繋がった頂点を p_1 とする．

オイラーの定理の逆の拡張形の証明 (2/4)

▷ **場合 1a.** $p_0 = p_1$ の場合: つまり，v_0 が p_0 にループとして．繋がっている場合．

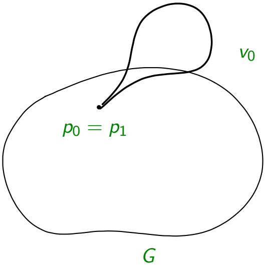


・ この場合には，G から v_0 を取り除いて得られるグラフ G' は，連結で，辺の数は，m より小さい．p_0 の G' での次数は G での次数 -2 なので，偶数である．したがって，G' は条件 (a) を満たすから，帰納法の仮定より，p_0 から出発して p_0 で終る一筆書き $\mathcal{P}$ を持つ．

・ $\mathcal{P}$ に v_0 を繋げたものは，G の一筆書になっている．

オイラーの定理の逆の拡張形の証明 (2/4)

▷ **場合 1a.** $p_0 = p_1$ の場合: つまり，v_0 が p_0 にループとして．繋がっている場合．

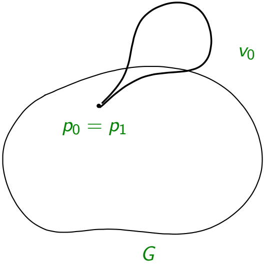


・ この場合には，G から v_0 を取り除いて得られるグラフ G' は，連結で，辺の数は，m より小さい．p_0 の G' での次数は G での次数 -2 なので，偶数である．したがって，G' は条件 (a) を満たすから，帰納法の仮定より，p_0 から出発して p_0 で終る一筆書き $\mathcal{P}$ を持つ．

・ $\mathcal{P}$ に v_0 を繋げたものは，G の一筆書になっている．

オイラーの定理の逆の拡張形の証明 (2/4)

▷ **場合 1a.** $p_0 = p_1$ の場合: つまり，v_0 が p_0 にループとして．繋がっている場合．

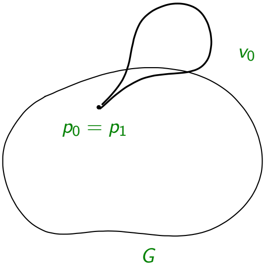


・ この場合には，G から v_0 を取り除いて得られるグラフ G' は，連結で，辺の数は，m より小さい．p_0 の G' での次数は G での次数 -2 なので，偶数である．したがって，G' は条件 (a) を満たすから，帰納法の仮定より，p_0 から出発して p_0 で終る一筆書き $\mathcal{P}$ を持つ．

・ $\mathcal{P}$ に v_0 を繋げたものは，G の一筆書になっている．

オイラーの定理の逆の拡張形の証明 (2/4)

▷ **場合 1a.** $p_0 = p_1$ の場合: つまり，v_0 が p_0 にループとして．繋がっている場合．

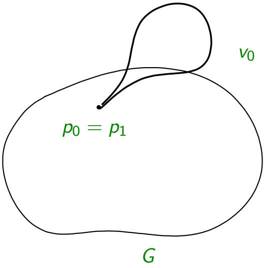


・ この場合には，G から v_0 を取り除いて得られるグラフ G' は，連結で，辺の数は，m より小さい．p_0 の G' での次数は G での次数 -2 なので，偶数である．したがって，G' は条件 (a) を満たすから，帰納法の仮定より，p_0 から出発して p_0 で終る一筆書き $\mathcal{P}$ を持つ．

・ $\mathcal{P}$ に v_0 を繋げたものは，G の一筆書になっている．

オイラーの定理の逆の拡張形の証明 (2/4)

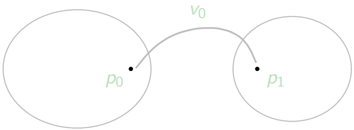
▷ **場合 1a.** $p_0 = p_1$ の場合: つまり, v_0 が p_0 にループとして.
繋がっている場合.

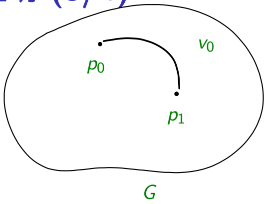


・ この場合には, G から v_0 を取り除いて得られるグラフ G' は, 連結で, 辺の数は, m より小さい. p_0 の G' での次数は G での次数 -2 なので, 偶数である. したがって, G' は条件 (a) を満たすから, 帰納法の仮定より, p_0 から出発して p_0 で終る一筆書き $\mathcal{P}$ を持つ.
・ $\mathcal{P}$ に v_0 を繋げたものは, G の一筆書になっている.

オイラーの定理の逆の拡張形の証明 (3/4)

▷ **場合 1b.** $p_0 \neq p_1$ の場合:





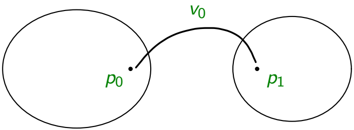
・ この場合には G から v_0 を取り除いて得られるグラフ G' は連結である．[そうでないとすると，G' は 2 つの連結な成分を持ち，各連結成分は偶数の次数を持つ頂点を一つだけ持つことになるから，連結成分の頂点の次数の和は奇数である．ところが任意のグラフの頂点の次数の和は辺の数の 2 倍になるから奇数になることはありえない．]

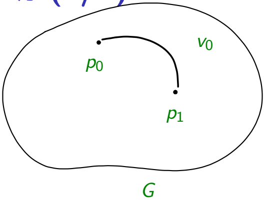
・ したがって，G' は連結で，辺の数は m より小さく，p_0 と p_1 のみが奇数の次数を持つから，帰納法の仮定から，G' の一筆書き $\mathcal{P}$ で p_0 で始まり，p_1 で終るものが存在する．

・ $\mathcal{P}$ に v_0 を p_1 から p_0 にたどる一画を付け加えたものは，G の一筆書きである．

オイラーの定理の逆の拡張形の証明 (3/4)

▷ **場合 1b.** $p_0 \neq p_1$ の場合:





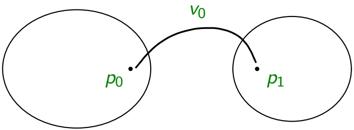
・ この場合には G から v_0 を取り除いて得られるグラフ G' は連結である. [そうでないとすると, G' は 2 つの連結な成分を持ち, 各連結成分は偶数の次数を持つ頂点を一つだけ持つことになるから, 連結成分の頂点の次数の和は奇数である. ところが任意のグラフの頂点の次数の和は辺の数の 2 倍になるから奇数になることはありえない.]

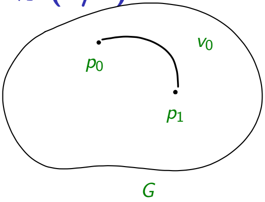
・ したがって, G' は連結で, 辺の数は m より小さく, p_0 と p_1 のみが奇数の次数を持つから, 帰納法の仮定から, G' の一筆書き $\mathcal{P}$ で p_0 で始まり, p_1 で終るものが存在する.

・ $\mathcal{P}$ に v_0 を p_1 から p_0 にたどる一画を付け加えたものは, G の一筆書きである.

オイラーの定理の逆の拡張形の証明 (3/4)

▷ **場合 1b.** $p_0 \neq p_1$ の場合:





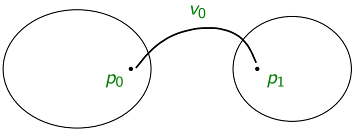
・ この場合には G から v_0 を取り除いて得られるグラフ G' は連結である．[そうでないとすると，G' は 2 つの連結な成分を持ち，各連結成分は偶数の次数を持つ頂点を一つだけ持つことになるから，連結成分の頂点の次数の和は奇数である．ところが任意のグラフの頂点の次数の和は辺の数の 2 倍になるから奇数になることはありえない．]

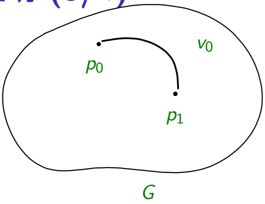
・ したがって，G' は連結で，辺の数は m より小さく，p_0 と p_1 のみが奇数の次数を持つから，帰納法の仮定から，G' の一筆書き $\mathcal{P}$ で p_0 で始まり，p_1 で終るものが存在する．

・ $\mathcal{P}$ に v_0 を p_1 から p_0 にたどる一画を付け加えたものは，G の一筆書きである．

オイラーの定理の逆の拡張形の証明 (3/4)

▷ **場合 1b.** $p_0 \neq p_1$ の場合:





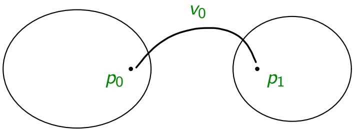
・ この場合には G から v_0 を取り除いて得られるグラフ G' は連結である．[そうでないとすると，G' は 2 つの連結な成分を持ち，各連結成分は偶数の次数を持つ頂点を一つだけ持つことになるから，連結成分の頂点の次数の和は奇数である．ところが任意のグラフの頂点の次数の和は辺の数の 2 倍になるから奇数になることはありえない．]

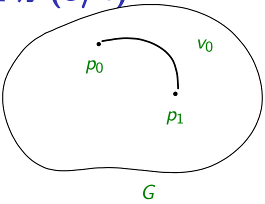
・ したがって，G' は連結で，辺の数は m より小さく，p_0 と p_1 のみが奇数の次数を持つから，帰納法の仮定から，G' の一筆書き $\mathcal{P}$ で p_0 で始まり，p_1 で終るものが存在する．

・ $\mathcal{P}$ に v_0 を p_1 から p_0 にたどる一画を付け加えたものは，G の一筆書きである．

オイラーの定理の逆の拡張形の証明 (3/4)

▷ **場合 1b.** $p_0 \neq p_1$ の場合:





・ この場合には G から v_0 を取り除いて得られるグラフ G' は連結である. [そうでないとすると, G' は 2 つの連結な成分を持ち, 各連結成分は偶数の次数を持つ頂点を一つだけ持つことになるから, 連結成分の頂点の次数の和は奇数である. ところが任意のグラフの頂点の次数の和は辺の数の 2 倍になるから奇数になることはありえない.]

・ したがって, G' は連結で, 辺の数は m より小さく, p_0 と p_1 のみが奇数の次数を持つから, 帰納法の仮定から, G' の一筆書き $\mathcal{P}$ で p_0 で始まり, p_1 で終るものが存在する.

・ $\mathcal{P}$ に v_0 を p_1 から p_0 にたどる一画を付け加えたものは, G の一筆書きである.

オイラーの定理の逆の拡張形の証明 (4/4)

▷ **場合 2.** G が (b) を満たす場合: つまり，2 つの頂点 p_0, p_1 のみが奇数の次数を持っている場合. この場合には，p_0 から出発して p_1 で終る G の一筆書きが存在することを示す必要がある. v_0 を p_0 に繋がった辺の一つとする.

以下証明は，場合 1. と同様に，以下のような更なる場合分けをして行なうことができる.

場合 2a. v_0 が p_1 と繋がっている場合.

- **場合 2aα.** G から v_0 を除いたグラフが連結の場合
- **場合 2aβ.** G から v_0 を除いたグラフが連結でない場合

場合 2b. v_0 が p_1 と繋がっていない場合.

- **場合 2bα.** G から v_0 を除いたグラフが連結の場合
- **場合 2bβ.** G から v_0 を除いたグラフが連結でない場合

▶ 証明の詳細は，2006 年の秋に行なった講義の 講義録 の 1.7 節を参照.

オイラーの定理の逆の拡張形の証明 (4/4)

▷ **場合 2.** G が (b) を満たす場合: つまり，2 つの頂点 p_0，p_1 のみが奇数の次数を持っている場合．この場合には，p_0 から出発して p_1 で終る G の一筆書きが存在することを示す必要がある．v_0 を p_0 に繋がった辺の一つとする．

以下証明は，場合 1. と同様に，以下のような更なる場合分けをして行なうことができる．

場合 2a. v_0 が p_1 と繋がっている場合．

場合 2aα. G から v_0 を除いたグラフが連結の場合

場合 2aβ. G から v_0 を除いたグラフが連結でない場合

場合 2b. v_0 が p_1 と繋がっていない場合．

場合 2bα. G から v_0 を除いたグラフが連結の場合

場合 2bβ. G から v_0 を除いたグラフが連結でない場合

▶ 証明の詳細は，2006 年の秋に行なった講義の 講義録 の 1.7 節を参照．

オイラーの定理の逆の拡張形の証明 (4/4)

▷ **場合 2.** G が (b) を満たす場合: つまり，2 つの頂点 p_0, p_1 のみが奇数の次数を持っている場合．この場合には，p_0 から出発して p_1 で終る G の一筆書きが存在することを示す必要がある．v_0 を p_0 に繋がった辺の一つとする．

以下証明は，場合 1. と同様に，以下のような更なる場合分けをして行なうことができる．

場合 2a. v_0 が p_1 と繋がっている場合．

場合 2aα. G から v_0 を除いたグラフが連結の場合

場合 2aβ. G から v_0 を除いたグラフが連結でない場合

場合 2b. v_0 が p_1 と繋がっていない場合．

場合 2bα. G から v_0 を除いたグラフが連結の場合

場合 2bβ. G から v_0 を除いたグラフが連結でない場合

▶ 証明の詳細は，2006 年の秋に行なった講義の 講義録 の 1.7 節を参照．

オイラーの定理の逆の拡張形の証明 (4/4)

▷ **場合 2.** G が (b) を満たす場合: つまり，2 つの頂点 p_0, p_1 のみが奇数の次数を持っている場合．この場合には，p_0 から出発して p_1 で終る G の一筆書きが存在することを示す必要がある．v_0 を p_0 に繋がった辺の一つとする．

以下証明は，場合 1. と同様に，以下のような更なる場合分けをして行なうことができる．

場合 2a. v_0 が p_1 と繋がっている場合．

場合 2aα. G から v_0 を除いたグラフが連結の場合

場合 2aβ. G から v_0 を除いたグラフが連結でない場合

場合 2b. v_0 が p_1 と繋がっていない場合．

場合 2bα. G から v_0 を除いたグラフが連結の場合

場合 2bβ. G から v_0 を除いたグラフが連結でない場合

▶ 証明の詳細は，2006 年の秋に行なった講義の 講義録 の 1.7 節を参照．

オイラーの定理の逆の拡張形の証明 (4/4)

▷ **場合 2.** G が (b) を満たす場合: つまり，2 つの頂点 p_0, p_1 のみが奇数の次数を持っている場合．この場合には，p_0 から出発して p_1 で終る G の一筆書きが存在することを示す必要がある．v_0 を p_0 に繋がった辺の一つとする．

以下証明は，場合 1. と同様に，以下のような更なる場合分けをして行なうことができる．

場合 2a. v_0 が p_1 と繋がっている場合．

- **場合 2aα.** G から v_0 を除いたグラフが連結の場合
- **場合 2aβ.** G から v_0 を除いたグラフが連結でない場合

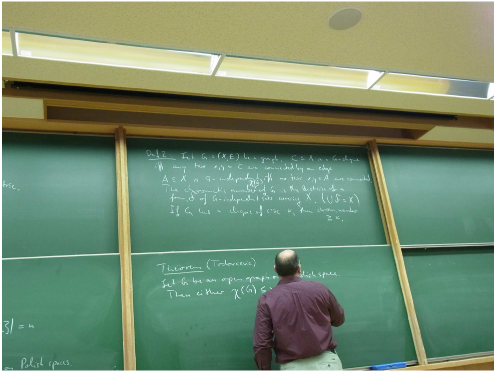
場合 2b. v_0 が p_1 と繋がっていない場合．

- **場合 2bα.** G から v_0 を除いたグラフが連結の場合
- **場合 2bβ.** G から v_0 を除いたグラフが連結でない場合

▶ 証明の詳細は，2006 年の秋に行なった講義の 講義録 の 1.7 節を参照．

黒板で行なう数学の講義 (1/2)

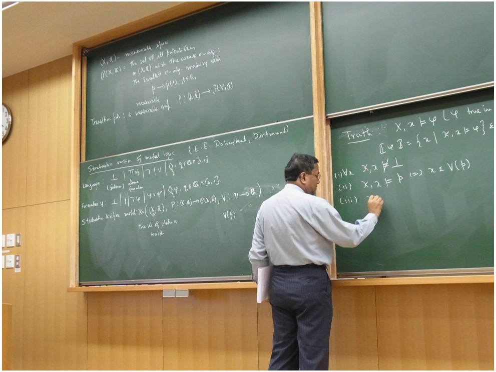
- 数学や（理論）物理学の講義や講演では，「構造の数理」の講義をしているこの教室よりずっと 広い黒板が必要になることが多い.



(京都大学 数理解析研究所で行なわれた研究集会での Professor Dr. Stefan Geschke (ボン大学) の講演)

黒板で行なう数学の講義 (2/2)

- 数学や（理論）物理学の講義や講演では，「構造の数理」の講義をしているこの教室よりずっと 広い黒板が必要になることが多い.



(京都大学 数理解析研究所で行なわれた研究集会での Professor Dr. Shashi Mohan Srivastava (Indian Statistical Institute at Kolkata) の講演)