構造の数理

2011年11月17日　第5回目の講義

Sakaé Fuchino (渕野 昌)

Dept. of Computer Sciences
Kobe University
(神戸大学大学院 システム情報学研究科)

http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/

平面グラフ
— オイラーの公式とクラトフスキーの定理 (1)

(19. November 2011 (11:51 JST) version)

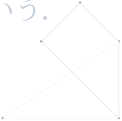
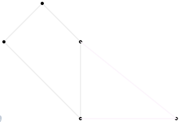
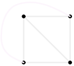
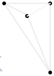
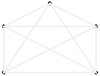
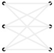
神戸大学 2011 年度後期の講義

This presentation is typeset by pLaTeX with beamer class.

平面グラフ

(多重) グラフ G を，異なる辺どうしが交差することなく平面上に描くことができるとき，このグラフ G は **平面グラフ (planer graph)** である，という．

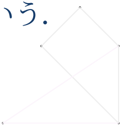
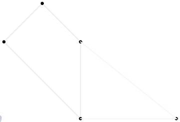
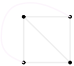
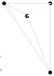
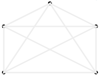
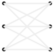
例．

- グラフ  は，この描き方では辺の交差があるが，これは，  とも描けるので，平面グラフである．
- 同様に，  は  または  とも描けるので平面グラフである．
- これに対し，後で示すように，  K_5 や  $K_{3,3}$ は平面グラフではない．つまり，どう工夫して描いても辺の交差がないように描くことはできない．

平面グラフ

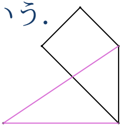
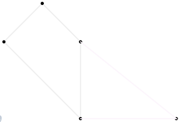
(多重) グラフ G を，異なる辺どうしが交差することなく平面上に描くことができるとき，このグラフ G は **平面グラフ (planer graph)** である，という．

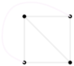
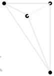
例．

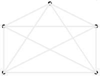
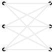
- グラフ  は，この描き方では辺の交差があるが，これは， とも描けるので，平面グラフである．
- 同様に， は  または  とも描けるので平面グラフである．
- これに対し，後で示すように，
K_5
や 
$K_{3,3}$
は平面グラフではない．つまり，どう工夫して描いても辺の交差がないように描くことはできない．

平面グラフ

(多重) グラフ G を，異なる辺どうしが交差することなく平面上に描くことができるとき，このグラフ G は **平面グラフ (planer graph)** である，という．

例． ▶ グラフ  は，この描き方では辺の交差があるが，これは， とも描けるので，平面グラフである．

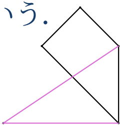
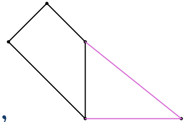
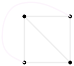
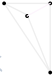
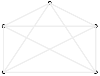
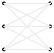
▶ 同様に， は  または  とも描けるので平面グラフである．

▶ これに対し，後で示すように， K_5 や  $K_{3,3}$ は平面グラフではない．つまり，どう工夫して描いても辺の交差がないように描くことはできない．

平面グラフ

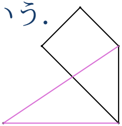
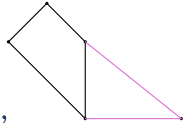
(多重) グラフ G を，異なる辺どうしが交差することなく平面上に描くことができるとき，このグラフ G は **平面グラフ (planer graph)** である，という．

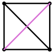
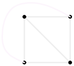
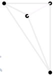
例．

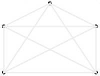
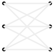
- グラフ  は，この描き方では辺の交差があるが，これは，  とも描けるので，平面グラフである．
- 同様に，  は  または  とも描けるので平面グラフである．
- これに対し，後で示すように， 
K_5
や 
$K_{3,3}$
は平面グラフではない．つまり，どう工夫して描いても辺の交差がないように描くことはできない．

平面グラフ

(多重) グラフ G を，異なる辺どうしが交差することなく平面上に描くことができるとき，このグラフ G は **平面グラフ (planer graph)** である，という．

例． ▶ グラフ  は，この描き方では辺の交差があるが，これは， とも描けるので，平面グラフである．

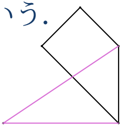
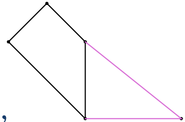
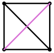
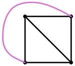
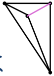
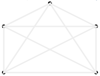
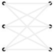
▶ 同様に， は  または  とも描けるので平面グラフである．

▶ これに対し，後で示すように， K_5 や  $K_{3,3}$ は平面グラフではない．つまり，どう工夫して描いても辺の交差がないように描くことはできない．

平面グラフ

(多重) グラフ G を，異なる辺どうしが交差することなく平面上に描くことができるとき，このグラフ G は **平面グラフ (planer graph)** である，という.

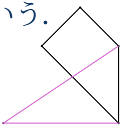
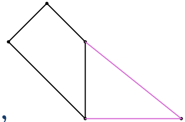
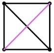
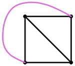
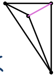
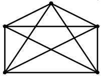
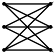
例.

- グラフ  は，この描き方では辺の交差があるが，これは，  とも描けるので，平面グラフである.
- 同様に，  は  または  とも描けるので平面グラフである.
- これに対し，後で示すように，  K_5 や  $K_{3,3}$ は平面グラフではない．つまり，どう工夫して描いても辺の交差がないように描くことはできない.

平面グラフ

(多重) グラフ G を，異なる辺どうしが交差することなく平面上に描くことができるとき，このグラフ G は **平面グラフ (planer graph)** である，という．

例．

- グラフ  は，この描き方では辺の交差があるが，これは，  とも描けるので，平面グラフである．
- 同様に，  は  または  とも描けるので平面グラフである．
- これに対し，後で示すように，  や  は平面グラフではない．つまり，どう工夫して描いても辺の交差がないように描くことはできない．

K_5 $K_{3,3}$

３次元空間へのグラフの埋め込み

- １つ前のスライドの最後の例でのように，平面グラフでない有限グラフは存在するので，どのグラフが平面グラフか，という問題は意味のあるものになる．

- 実は前のスライドの最後の例での K_5 と $K_{3,3}$ は平面グラフでないグラフをある意味で代表するようなものになっていることが後で明らかになる．

- 平面での状況と異なり，３次元空間については次の結果が知られている:

定理． すべての有限 (多重) グラフは，すべての異なる２辺どうしが交じわらないようなやりかたで，３次元空間に埋め込むことができる．

３次元空間へのグラフの埋め込み

- １つ前のスライドの最後の例でのように，平面グラフでない有限グラフは存在するので，どのグラフが平面グラフか，という問題は意味のあるものになる．

- 実は前のスライドの最後の例での K_5 と $K_{3,3}$ は平面グラフでないグラフをある意味で代表するようなものになっていることが後で明らかになる．

- 平面での状況と異なり，３次元空間については次の結果が知られている:

定理． すべての有限 (多重) グラフは，すべての異なる２辺どうしが交じわらないようなやりかたで，３次元空間に埋め込むことができる．

３次元空間へのグラフの埋め込み

- １つ前のスライドの最後の例でのように，平面グラフでない有限グラフは存在するので，どのグラフが平面グラフか，という問題は意味のあるものになる．

- 実は前のスライドの最後の例での K_5 と $K_{3,3}$ は平面グラフでないグラフをある意味で代表するようなものになっていることが後で明らかになる．

- 平面での状況と異なり，３次元空間については次の結果が知られている:

定理． すべての有限 (多重) グラフは，すべての異なる２辺どうしが交じわらないようなやりかたで，３次元空間に埋め込むことができる．

３次元空間へのグラフの埋め込み

- １つ前のスライドの最後の例でのように，平面グラフでない有限グラフは存在するので，どのグラフが平面グラフか，という問題は意味のあるものになる．

- 実は前のスライドの最後の例での K_5 と $K_{3,3}$ は平面グラフでないグラフをある意味で代表するようなものになっていることが後で明らかになる．

- 平面での状況と異なり，３次元空間については次の結果が知られている:

定理． すべての有限 (多重) グラフは，すべての異なる２辺どうしが交じわらないようなやりかたで，３次元空間に埋め込むことができる．

３次元空間へのグラフの埋め込み

- １つ前のスライドの最後の例でのように，平面グラフでない有限グラフは存在するので，どのグラフが平面グラフか，という問題は意味のあるものになる．
- 実は前のスライドの最後の例での K_5 と $K_{3,3}$ は平面グラフでないグラフをある意味で代表するようなものになっていることが後で明らかになる．
- 平面での状況と異なり，３次元空間については次の結果が知られている:

定理． すべての有限 (多重) グラフは，すべての異なる２辺どうしが交じわらないようなやりかたで，３次元空間に埋め込むことができる．

3 次元空間へのグラフの埋め込み (2/6)

定理. すべての有限 (多重) グラフは，すべての異なる 2 辺どうしが交じわらないようなやりかたで，3 次元空間に埋め込むことができる.

証明. グラフの辺の数に関する帰納法で証明する.

- 辺の数が 0 のグラフでは，定理の主張は明らかに成り立つ. (帰納法の初め)

- $0 < k$ となる自然数 k で，すべての，辺の数が $< k$ のグラフに対して，定理の主張が成り立つとして，辺の数が k の任意のグラフ G に対しても，定理の主張が成り立つ，つまり G はすべての異なる 2 辺どうしが交じわらないようなやりかたで，3 次元空間に埋め込むことができることを示す. (帰納法のステップ)

  - G を k 個の辺を持つグラフとする. ℓ_0 を G の辺の 1 つとして G' を G から ℓ_0 をとりのぞいて得られるグラフとする.

3次元空間へのグラフの埋め込み (2/6)

定理. すべての有限 (多重) グラフは，すべての異なる2辺どうしが交じわらないようなやりかたで，3次元空間に埋め込むことができる.

証明. グラフの辺の数に関する帰納法で証明する.

- 辺の数が 0 のグラフでは，定理の主張は明らかに成り立つ. (帰納法の初め)
- $0 < k$ となる自然数 k で，すべての，辺の数が $< k$ のグラフに対して，定理の主張が成り立つとして，辺の数が k の任意のグラフ G に対しても，定理の主張が成り立つ，つまり G はすべての異なる2辺どうしが交じわらないようなやりかたで，3次元空間に埋め込むことができることを示す. (帰納法のステップ)

▷ G を k 個の辺を持つグラフとする. ℓ_0 を G の辺の1つとして G' を G から ℓ_0 をとりのぞいて得られるグラフとする.

3 次元空間へのグラフの埋め込み (2/6)

定理. すべての有限 (多重) グラフは，すべての異なる 2 辺どうしが交じわらないようなやりかたで，3 次元空間に埋め込むことができる.

証明. グラフの辺の数に関する帰納法で証明する.

- 辺の数が 0 のグラフでは，定理の主張は明らかに成り立つ. (帰納法の初め)
- $0 < k$ となる自然数 k で，すべての，辺の数が $< k$ のグラフに対して，定理の主張が成り立つとして，辺の数が k の任意のグラフ G に対しても，定理の主張が成り立つ，つまり G はすべての異なる 2 辺どうしが交じわらないようなやりかたで，3 次元空間に埋め込むことができることを示す. (帰納法のステップ)
  - G を k 個の辺を持つグラフとする. ℓ_0 を G の辺の 1 つとして G' を G から ℓ_0 をとりのぞいて得られるグラフとする.

3次元空間へのグラフの埋め込み (2/6)

定理. すべての有限 (多重) グラフは，すべての異なる2辺どうしが交じわらないようなやりかたで，3次元空間に埋め込むことができる.

証明. グラフの辺の数に関する帰納法で証明する.

- 辺の数が 0 のグラフでは，定理の主張は明らかに成り立つ. (帰納法の初め)
- $0 < k$ となる自然数 k で，すべての，辺の数が $< k$ のグラフに対して，定理の主張が成り立つとして，辺の数が k の任意のグラフ G に対しても，定理の主張が成り立つ，つまり G はすべての異なる2辺どうしが交じわらないようなやりかたで，3次元空間に埋め込むことができることを示す. (帰納法のステップ)
  - G を k 個の辺を持つグラフとする. ℓ_0 を G の辺の1つとして G' を G から ℓ_0 をとりのぞいて得られるグラフとする.

３次元空間へのグラフの埋め込み (2/6)

定理． すべての有限 (多重) グラフは，すべての異なる２辺どうしが交じわらないようなやりかたで，３次元空間に埋め込むことができる．

証明． グラフの辺の数に関する帰納法で証明する．

- 辺の数が 0 のグラフでは，定理の主張は明らかに成り立つ．
(帰納法の初め)

- $0 < k$ となる自然数 k で，すべての，辺の数が $< k$ のグラフに対して，定理の主張が成り立つとして，辺の数が k の任意のグラフ G に対しても，定理の主張が成り立つ，つまり G はすべての異なる２辺どうしが交じわらないようなやりかたで，３次元空間に埋め込むことができることを示す． (帰納法のステップ)

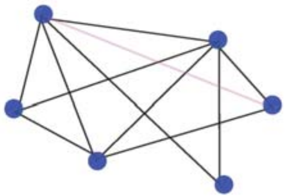
▷ G を k 個の辺を持つグラフとする．ℓ_0 を G の辺の１つとして G' を G から ℓ_0 をとりのぞいて得られるグラフとする．

３次元空間へのグラフの埋め込み (3/6)

▷ G を k 個の辺を持つグラフとする．ℓ_0 を G の辺の 1 つとして G' を G から ℓ_0 をとりのぞいて得られるグラフとする．

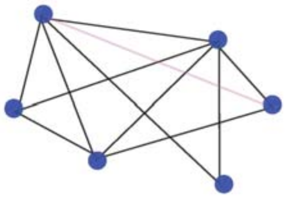
3次元空間へのグラフの埋め込み (3/6)

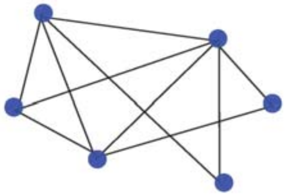
▷ G を k 個の辺を持つグラフとする．ℓ_0 を G の辺の 1 つとして G' を G から ℓ_0 をとりのぞいて得られるグラフとする．



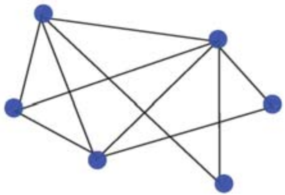
３次元空間へのグラフの埋め込み (3/6)

▷ G を k 個の辺を持つグラフとする．ℓ_0 を G の辺の１つとして G' を G から ℓ_0 をとりのぞいて得られるグラフとする．



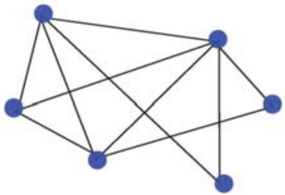


３次元空間へのグラフの埋め込み (4/6)

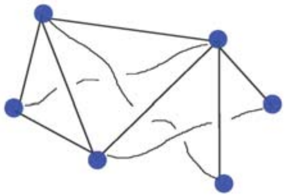


▷ G' の辺の数は $< k$ だから，帰納法の仮定により， G' はすべての辺が互いに交差しないように３次元空間に埋め込める:

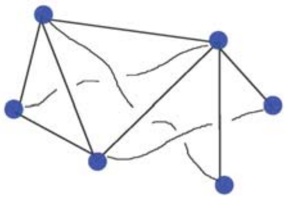
3次元空間へのグラフの埋め込み (4/6)



▷ G' の辺の数は $< k$ だから，帰納法の仮定により，G' はすべての辺が互いに交差しないように3次元空間に埋め込める:

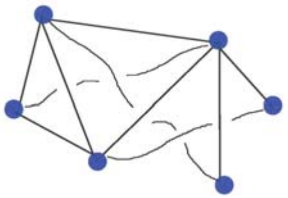


3次元空間へのグラフの埋め込み (5/6)



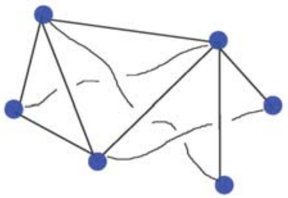
- 各々の辺を十分に直径が小さく，頂点に近づくと直系も 0 に収束するようなチューブで覆って，異る辺を覆うチューブは共通部分を持たないようにする．さらに，取り除いた辺 ℓ_0 を対応する頂点の間に再び取り付ける．

3 次元空間へのグラフの埋め込み (5/6)



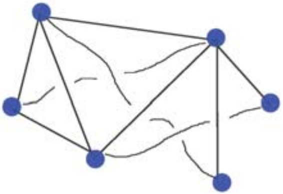
- 各々の辺を十分に直径が小さく，頂点に近づくと直系も 0 に収束するようなチューブで覆って，異る辺を覆うチューブは共通部分を持たないようにする．さらに，取り除いた辺 ℓ_0 を対応する頂点の間に再び取り付ける．

3 次元空間へのグラフの埋め込み (5/6)

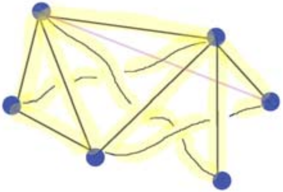


- 各々の辺を十分に直径が小さく，頂点に近づくと直系も 0 に収束するようなチューブで覆って，異る辺を覆うチューブは共通部分を持たないようにする．さらに，取り除いた辺 ℓ_0 を対応する頂点の間に再び取り付ける．

3次元空間へのグラフの埋め込み (5/6)



- 各々の辺を十分に直径が小さく，頂点に近づくと直系も 0 に収束するようなチューブで覆って，異る辺を覆うチューブは共通部分を持たないようにする．さらに，取り除いた辺 ℓ_0 を対応する頂点の間に再び取り付ける．



３次元空間へのグラフの埋め込み (6/6)

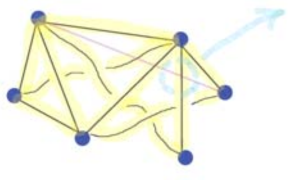
- 取り付け直した ℓ_0 が他の辺と交じわらなければ，これが求めていたような G の３次元空間への埋め込みになっている．
- そうでなければ，ℓ_0 の，ℓ_0 と交差する各辺 ℓ' の回りのチューブの中の部分をチューブの中で変形して，ℓ_0 と ℓ' の交差を解消することができる．

３次元空間へのグラフの埋め込み (6/6)

- 取り付け直した ℓ_0 が他の辺と交じわらなければ，これが求めていたような G の３次元空間への埋め込みになっている．
  - そうでなければ，ℓ_0 の，ℓ_0 と交差する各辺 ℓ' の回りのチューブの中の部分をチューブの中で変形して，ℓ_0 と ℓ' の交差を解消することができる．

3次元空間へのグラフの埋め込み (6/6)

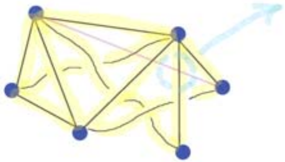
- 取り付け直した ℓ_0 が他の辺と交じわらなければ，これが求めていたような G の3次元空間への埋め込みになっている．
- そうでなければ，ℓ_0 の，ℓ_0 と交差する各辺 ℓ' の回りのチューブの中の部分をチューブの中で変形して，ℓ_0 と ℓ' の交差を解消することができる．

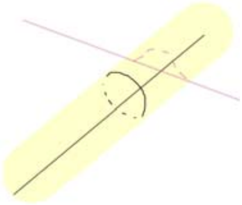


３次元空間へのグラフの埋め込み (6/6)

- 取り付け直した ℓ_0 が他の辺と交じわらなければ，これが求めていたような G の３次元空間への埋め込みになっている．

- そうでなければ，ℓ_0 の，ℓ_0 と交差する各辺 ℓ' の回りのチューブの中の部分をチューブの中で変形して，ℓ_0 と ℓ' の交差を解消することができる．

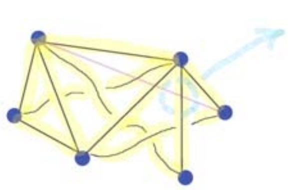


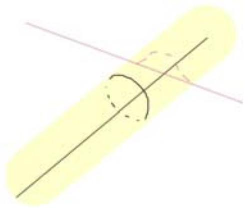


３次元空間へのグラフの埋め込み (6/6)

- 取り付け直した ℓ_0 が他の辺と交じわらなければ，これが求めていたような G の３次元空間への埋め込みになっている．

  - そうでなければ，ℓ_0 の，ℓ_0 と交差する各辺 ℓ' の回りのチューブの中の部分をチューブの中で変形して，ℓ_0 と ℓ' の交差を解消することができる．



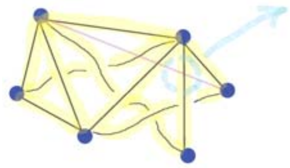


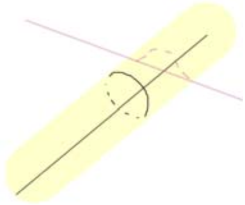
ℓ' の回りのチューブの中の変形なので，辺 ℓ が，変形した後で ℓ' 以外の辺と交差してしまうことが絶対にないことに注意．

３次元空間へのグラフの埋め込み (6/6)

▶ 取り付け直した ℓ_0 が他の辺と交じわらなければ，これが求めていたような G の３次元空間への埋め込みになっている．

▷ そうでなければ，ℓ_0 の，ℓ_0 と交差する各辺 ℓ' の回りのチューブの中の部分をチューブの中で変形して，ℓ_0 と ℓ' の交差を解消することができる．





ℓ' の回りのチューブの中の変形なので，辺 ℓ が，変形した後で ℓ' 以外の辺と交差してしまうことが絶対にないことに注意．

▶ これによって，再び G の求めたような３次元空間への埋め込みが得られたので，帰納法のステップの証明が完了して，定理が証明できた．□

完全グラフ K_n

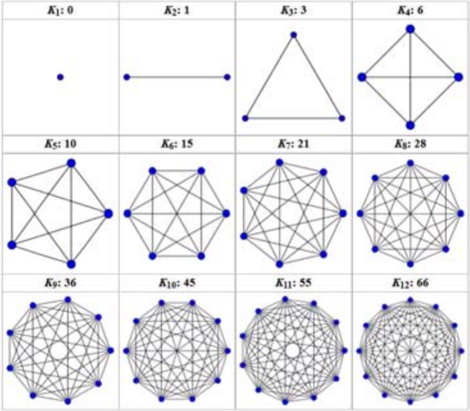
- $n > 0$ を自然数とする．n 個の頂点を持ち，それらの頂点のうちのどの異なる 2 つもちょうど 1 つの辺でつながっているような単純グラフを，位数が n の **完全グラフ** (**complete graph**) といい，これを K_n とあらわす．

完全グラフ K_n

- $n > 0$ を自然数とする． n 個の頂点を持ち，それらの頂点のうちのどの異なる 2 つもちょうど 1 つの辺でつながっているような単純グラフを，位数が n の **完全グラフ (complete graph)** といい，これを K_n とあらわす．

完全グラフ K_n

- $n > 0$ を自然数とする． n 個の頂点を持ち，それらの頂点のうちのどの異なる 2 つもちょうど 1 つの辺でつながっているような単純グラフを，位数が n の **完全グラフ (complete graph)** といい，これを K_n とあらわす．



Wikipedia: `http://en.wikipedia.org/wiki/Complete_graph` より引用．
“:” の後の数字は辺の数 ${}_nC_2$ である．

完全２部グラフ $K_{m,n}$

- $m, n > 0$ を自然数とする．m 個の頂点のグループと，これらとは異る n 個の頂点のグループからなるグラフで，２つのグループから１つづづとった頂点の組がどれもちょうど１つの辺でつながっていて，それ以外の辺はないようなグラフを (m, n) 型の **完全２部グラフ** (**complete bitartite graph**) とよび，$K_{m,n}$ であらわす．$K_{m,n}$ と $K_{n,m}$ は同じグラフである．
- $K_{m,1}$ は **星** (**star**) と呼ばれることもある，たとえば $K_{7,1}$ は:

完全２部グラフ $K_{m,n}$

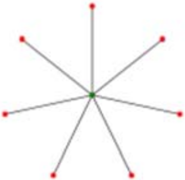
- $m, n > 0$ を自然数とする．m 個の頂点のグループと，これらとは異る n 個の頂点のグループからなるグラフで，２つのグループから１つづづとった頂点の組がどれもちょうど１つの辺でつながっていて，それ以外の辺はないようなグラフを (m, n) 型の **完全２部グラフ** (**complete bitartite graph**) とよび，$K_{m,n}$ であらわす．$K_{m,n}$ と $K_{n,m}$ は同じグラフである．
- $K_{m,1}$ は **星** (**star**) と呼ばれることもある，たとえば $K_{7,1}$ は:

完全２部グラフ $K_{m,n}$

- $m, n > 0$ を自然数とする．m 個の頂点のグループと，これらとは異る n 個の頂点のグループからなるグラフで，2 つのグループから 1 つづづとった頂点の組がどれもちょうど 1 つの辺でつながっていて，それ以外の辺はないようなグラフを (m, n) 型の **完全２部グラフ** (**complete bitartite graph**) とよび，$K_{m,n}$ であらわす．$K_{m,n}$ と $K_{n,m}$ は同じグラフである．
- $K_{m,1}$ は **星** (**star**) と呼ばれることもある，たとえば $K_{7,1}$ は:

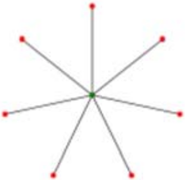
完全２部グラフ $K_{m,n}$

- $m, n > 0$ を自然数とする．m 個の頂点のグループと，これらとは異る n 個の頂点のグループからなるグラフで，２つのグループから１つづづとった頂点の組がどれもちょうど１つの辺でつながっていて，それ以外の辺はないようなグラフを (m, n) 型の **完全２部グラフ (complete bitartite graph)** とよび，$K_{m,n}$ であらわす．$K_{m,n}$ と $K_{n,m}$ は同じグラフである．
  - $K_{m,1}$ は **星 (star)** と呼ばれることもある，たとえば $K_{7,1}$ は:

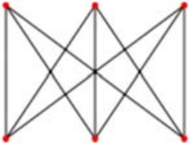


完全２部グラフ $K_{m,n}$

- $m, n > 0$ を自然数とする． m 個の頂点のグループと，これらとは異る n 個の頂点のグループからなるグラフで，2 つのグループから 1 つづづとった頂点の組がどれもちょうど 1 つの辺でつながっていて，それ以外の辺はないようなグラフを (m, n) 型の **完全２部グラフ (complete bitartite graph)** とよび，$K_{m,n}$ であらわす． $K_{m,n}$ と $K_{n,m}$ は同じグラフである．
  - $K_{m,1}$ は **星 (star)** と呼ばれることもある，たとえば $K_{7,1}$ は:



  - 次は $K_{3,2}$ と $K_{3,3}$ である:



クラトフスキーの定理

- グラフ H がグラフ G の **subdivision** であるとは，H が G から出発して辺上に新しい頂点を挿入する操作の 0 回以上の繰り返しにより得られるグラフであること，とする．

定理． (K. Kuratowski, 1930 (昭和 5 年))
有限グラフ G が平面グラフとならないのは，G が完全グラフ K_5 か完全 2 部グラフ $K_{3,3}$ の subdivision を部分として含む，ちょうどそのときである．

- 次回に，K_5 も $K_{3,3}$ 平面グラフでないことの証明する．このことからクラトフスキーの簡単な方の implication が示せる．余裕があればクラトフスキーの証明の難しい方の implication の証明も見ることにする．

クラトフスキーの定理

- グラフ H がグラフ G の **subdivision** であるとは，H が G から出発して辺上に新しい頂点を挿入する操作の 0 回以上の繰り返しにより得られるグラフであること，とする．

定理． (K. Kuratowski, 1930 (昭和 5 年))
有限グラフ G が平面グラフとならないのは，G が完全グラフ K_5 か完全 2 部グラフ $K_{3,3}$ の subdivision を部分として含む，ちょうどそのときである．

- 次回に，K_5 も $K_{3,3}$ 平面グラフでないことの証明する．このことからクラトフスキーの簡単な方の implication が示せる．余裕があればクラトフスキーの証明の難しい方の implication の証明も見ることにする．

クラトフスキーの定理

- グラフ H がグラフ G の **subdivision** であるとは，H が G から出発して辺上に新しい頂点を挿入する操作の 0 回以上の繰り返しにより得られるグラフであること，とする．

定理． (K. Kuratowski, 1930 (昭和 5 年))
有限グラフ G が平面グラフとならないのは，G が完全グラフ K_5 か完全 2 部グラフ $K_{3,3}$ の subdivision を部分として含む，ちょうどそのときである．

- 次回に，K_5 も $K_{3,3}$ 平面グラフでないことの証明する．このことからクラトフスキーの簡単な方の implication が示せる．余裕があればクラトフスキーの証明の難しい方の implication の証明も見ることにする．

クラトフスキーの定理

- グラフ H がグラフ G の **subdivision** であるとは，H が G から出発して辺上に新しい頂点を挿入する操作の 0 回以上の繰り返しにより得られるグラフであること，とする．

定理． (K. Kuratowski, 1930 (昭和 5 年))
有限グラフ G が平面グラフとならないのは，G が完全グラフ K_5 か完全 2 部グラフ $K_{3,3}$ の subdivision を部分として含む，ちょうどそのときである．

- 次回に，K_5 も $K_{3,3}$ 平面グラフでないことの証明する．このことからクラトフスキーの簡単な方の implication が示せる．余裕があればクラトフスキーの証明の難しい方の implication の証明も見ることにする．

演習問題

(1) すべての有限グラフが３次元空間に辺の交差なしに埋め込めることの証明の最後の方で G' の各辺をチューブの中に埋め込んで各々のチューブは共通点を持たないようにする，という議論があったが，この議論を省略してしまうと，証明のどこがうまくゆかなくなるかを説明せよ (初-中級問題).

(2) すべての自然数 k に対し，$K_{k,2}$ は平面グラフになることを示せ (初級問題).

(3) すべての有限な単純グラフ G について，もし G が平面グラフなら，G は各辺が直線になるようにして平面上に (辺の交差なく) 埋め込めることを示せ (中-上級問題).

(4) 多重グラフでは上の主張は一般には成り立たないことを示せ (初-中級問題).

- 上の演習問題は自習用ですが，うまく解けた場合に，内容や表現などの添削をして欲しければ，レポートとして提出してくれてもいいです．逆に，どうしても分からなくて気になる場合には個別に質問をしてください．

演習問題

(1) すべての有限グラフが３次元空間に辺の交差なしに埋め込めることの証明の最後の方で G' の各辺をチューブの中に埋め込んで各々のチューブは共通点を持たないようにする，という議論があったが，この議論を省略してしまうと，証明のどこがうまくゆかなくなるかを説明せよ (初-中級問題).

(2) すべての自然数 k に対し，$K_{k,2}$ は平面グラフになることを示せ (初級問題).

(3) すべての有限な単純グラフ G について，もし G が平面グラフなら，G は各辺が直線になるようにして平面上に (辺の交差なく) 埋め込めることを示せ (中-上級問題).

(4) 多重グラフでは上の主張は一般には成り立たないことを示せ (初-中級問題).

- 上の演習問題は自習用ですが，うまく解けた場合に，内容や表現などの添削をして欲しければ，レポートとして提出してくれてもいいです．逆に，どうしても分らなくて気になる場合には個別に質問をしてください．

演習問題

(1) すべての有限グラフが３次元空間に辺の交差なしに埋め込めることの証明の最後の方で G' の各辺をチューブの中に埋め込んで各々のチューブは共通点を持たないようにする，という議論があったが，この議論を省略してしまうと，証明のどこがうまくゆかなくなるかを説明せよ (初-中級問題).

(2) すべての自然数 k に対し，$K_{k,2}$ は平面グラフになることを示せ (初級問題).

(3) すべての有限な単純グラフ G について，もし G が平面グラフなら，G は各辺が直線になるようにして平面上に (辺の交差なく) 埋め込めることを示せ (中-上級問題).

(4) 多重グラフでは上の主張は一般には成り立たないことを示せ (初-中級問題).

- 上の演習問題は自習用ですが，うまく解けた場合に，内容や表現などの添削をして欲しければ，レポートとして提出してくれてもいいです．逆に，どうしても分からなくて気になる場合には個別に質問をしてください．

演習問題

(1) すべての有限グラフが３次元空間に辺の交差なしに埋め込めることの証明の最後の方で G' の各辺をチューブの中に埋め込んで各々のチューブは共通点を持たないようにする，という議論があったが，この議論を省略してしまうと，証明のどこがうまくゆかなくなるかを説明せよ (初-中級問題).

(2) すべての自然数 k に対し，$K_{k,2}$ は平面グラフになることを示せ (初級問題).

(3) すべての有限な単純グラフ G について，もし G が平面グラフなら，G は各辺が直線になるようにして平面上に (辺の交差なく) 埋め込めることを示せ (中-上級問題).

(4) 多重グラフでは上の主張は一般には成り立たないことを示せ (初-中級問題).

- 上の演習問題は自習用ですが，うまく解けた場合に，内容や表現などの添削をして欲しければ，レポートとして提出してくれてもいいです．逆に，どうしても分らなくて気になる場合には個別に質問をしてください．

演習問題

(1) すべての有限グラフが３次元空間に辺の交差なしに埋め込めることの証明の最後の方で G' の各辺をチューブの中に埋め込んで各々のチューブは共通点を持たないようにする，という議論があったが，この議論を省略してしまうと，証明のどこがうまくゆかなくなるかを説明せよ (初-中級問題).

(2) すべての自然数 k に対し，$K_{k,2}$ は平面グラフになることを示せ (初級問題).

(3) すべての有限な単純グラフ G について，もし G が平面グラフなら，G は各辺が直線になるようにして平面上に (辺の交差なく) 埋め込めることを示せ (中-上級問題).

(4) 多重グラフでは上の主張は一般には成り立たないことを示せ (初-中級問題).

- 上の演習問題は自習用ですが，うまく解けた場合に，内容や表現などの添削をして欲しければ，レポートとして提出してくれてもいいです．逆に，どうしても分らなくて気になる場合には個別に質問をしてください．

演習問題

(1) すべての有限グラフが３次元空間に辺の交差なしに埋め込めることの証明の最後の方で G' の各辺をチューブの中に埋め込んで各々のチューブは共通点を持たないようにする，という議論があったが，この議論を省略してしまうと，証明のどこがうまくゆかなくなるかを説明せよ (初-中級問題).

(2) すべての自然数 k に対し，$K_{k,2}$ は平面グラフになることを示せ (初級問題).

(3) すべての有限な単純グラフ G について，もし G が平面グラフなら，G は各辺が直線になるようにして平面上に (辺の交差なく) 埋め込めることを示せ (中-上級問題).

(4) 多重グラフでは上の主張は一般には成り立たないことを示せ (初-中級問題).

- 上の演習問題は自習用ですが，うまく解けた場合に，内容や表現などの添削をして欲しければ，レポートとして提出してくれてもいいです．逆に，どうしても分らなくて気になる場合には個別に質問をしてください．