構造の数理

2011 年 11 月 24 日　第 6 回目の講義

Sakaé Fuchino (渕野 昌)

Dept. of Computer Sciences
Kobe University
(神戸大学大学院 システム情報学研究科)

http://fuchino.ddo.jp/

平面グラフ
— オイラーの公式とクラトフスキーの定理 (2)

(8. April 2018 (13:49 JST) version)

神戸大学 2011 年度後期の講義

This presentation is typeset by pLATEX with beamer class.

オイラーの公式

- 注意: オイラーの公式とよばれる等式は複数ある．このうち最も有名なのは，解析学で，指数関数／対数関数と三角関数を結びつける公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ であろう．
  - ▷ ここで「オイラーの公式」とよんでいるのは,，「オイラーの票数式」とよばれることもある，通常 $\mathbf{v} - \mathbf{e} + \mathbf{f} = \mathbf{2}$ とあらわされる式のことである．

- ここでの用語: G が平面グラフなら，G の平面上の表現で，異なる辺の交差がないようなものが存在するが，このような G の表現のことを G の平面への 良い埋め込み とよぶことにする．混乱の恐れがないときには，平面グラフと，その平面への良い埋め込み (の 1 つ) を同一視して議論する．
- G を (有限な) 平面グラフとするとき，G (の平面への良い埋め込み) は，平面をいくつかの面 (face, 辺で区切られた領域) に分割する．このような面の数を $\mathbf{f}$ であらわす．ただし，G を取り囲む無限に広がる領域も面の 1 つとして数えることにする．

オイラーの公式

- **注意:** オイラーの公式とよばれる等式は複数ある．このうち最も有名なのは，解析学で，指数関数／対数関数と三角関数を結びつける公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ であろう．
  - ここで「オイラーの公式」とよんでいるのは，，「オイラーの票数式」とよばれることもある，通常 $\mathbf{v} - \mathbf{e} + \mathbf{f} = \mathbf{2}$ とあらわされる式のことである．
- **ここでの用語:** G が平面グラフなら，G の平面上の表現で，異る辺の交差がないようなものが存在するが，このような G の表現のことを G の平面への **良い埋め込み** とよぶことにする．混乱の恐れがないときには，平面グラフと，その平面への良い埋め込み (の 1 つ) を同一視して議論する．
- G を (有限な) 平面グラフとするとき，G (の平面への良い埋め込み) は，平面をいくつかの面 (face, 辺で区切られた領域) に分割する．このような面の数を $\mathbf{f}$ であらわす．ただし，G を取り囲む無限に広がる領域も面の 1 つとして数えることにする．

オイラーの公式

- **注意:** オイラーの公式とよばれる等式は複数ある．このうち最も有名なのは，解析学で，指数関数／対数関数と三角関数を結びつける公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ であろう．
  - ここで「オイラーの公式」とよんでいるのは,，「オイラーの票数式」とよばれることもある，通常 $\mathbf{v} - \mathbf{e} + \mathbf{f} = \mathbf{2}$ とあらわされる式のことである．

- **ここでの用語:** G が平面グラフなら，G の平面上の表現で，異る辺の交差がないようなものが存在するが，このような G の表現のことを G の平面への **良い埋め込み** とよぶことにする．混乱の恐れがないときには，平面グラフと，その平面への良い埋め込み (の 1 つ) を同一視して議論する．
- G を (有限な) 平面グラフとするとき，G (の平面への良い埋め込み) は，平面をいくつかの面 (face, 辺で区切られた領域) に分割する．このような面の数を $\mathbf{f}$ であらわす．ただし，G を取り囲む無限に広がる領域も面の 1 つとして数えることにする．

オイラーの公式

- **注意:** オイラーの公式とよばれる等式は複数ある．このうち最も有名なのは，解析学で，指数関数／対数関数と三角関数を結びつける公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ であろう．
  - ここで「オイラーの公式」とよんでいるのは,，「オイラーの票数式」とよばれることもある，通常 $\mathbf{v} - \mathbf{e} + \mathbf{f} = \mathbf{2}$ とあらわされる式のことである．
- **ここでの用語:** G が平面グラフなら，G の平面上の表現で，異る辺の交差がないようなものが存在するが，このような G の表現のことを G の平面への **良い埋め込み** とよぶことにする．混乱の恐れがないときには，平面グラフと，その平面への良い埋め込み (の１つ) を同一視して議論する．
- G を (有限な) 平面グラフとするとき，G (の平面への良い埋め込み) は，平面をいくつかの面 (face, 辺で区切られた領域) に分割する．このような面の数を $\mathbf{f}$ であらわす．ただし，G を取り囲む無限に広がる領域も面の１つとして数えることにする．

オイラーの公式

- **注意:** オイラーの公式とよばれる等式は複数ある．このうち最も有名なのは，解析学で，指数関数／対数関数と三角関数を結びつける公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ であろう．

▷ ここで「オイラーの公式」とよんでいるのは,,「オイラーの票数式」とよばれることもある，通常 $\mathbf{v} - \mathbf{e} + \mathbf{f} = \mathbf{2}$ とあらわされる式のことである．

- **ここでの用語:** G が平面グラフなら，G の平面上の表現で，異る辺の交差がないようなものが存在するが，このような G の表現のことを G の平面への **良い埋め込み** とよぶことにする．混乱の恐れがないときには，平面グラフと，その平面への良い埋め込み (の 1 つ) を同一視して議論する．

- G を (有限な) 平面グラフとするとき，G (の平面への良い埋め込み) は，平面をいくつかの面 (face, 辺で区切られた領域) に分割する．このような面の数を $\mathbf{f}$ であらわす．ただし，G を取り囲む無限に広がる領域も面の 1 つとして数えることにする．

オイラーの公式

- **注意:** オイラーの公式とよばれる等式は複数ある．このうち最も有名なのは，解析学で，指数関数／対数関数と三角関数を結びつける公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ であろう．
  - ▷ ここで「オイラーの公式」とよんでいるのは,，「オイラーの票数式」とよばれることもある，通常 $\mathbf{v} - \mathbf{e} + \mathbf{f} = \mathbf{2}$ とあらわされる式のことである．
- **ここでの用語:** G が平面グラフなら，G の平面上の表現で，異る辺の交差がないようなものが存在するが，このような G の表現のことを G の平面への **良い埋め込み** とよぶことにする．混乱の恐れがないときには，平面グラフと，その平面への良い埋め込み (の 1 つ) を同一視して議論する．
- G を (有限な) 平面グラフとするとき，G (の平面への良い埋め込み) は，平面をいくつかの面 (face, 辺で区切られた領域) に分割する．このような面の数を $\mathbf{f}$ であらわす．ただし，G を取り囲む無限に広がる領域も面の 1 つとして数えることにする．

オイラーの公式

- **注意:** オイラーの公式とよばれる等式は複数ある．このうち最も有名なのは，解析学で，指数関数／対数関数と三角関数を結びつける公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ であろう．
  - ▷ ここで「オイラーの公式」とよんでいるのは,,「オイラーの票数式」とよばれることもある，通常 $\mathbf{v} - \mathbf{e} + \mathbf{f} = \mathbf{2}$ とあらわされる式のことである．
- **ここでの用語:** G が平面グラフなら，G の平面上の表現で，異る辺の交差がないようなものが存在するが，このような G の表現のことを G の平面への **良い埋め込み** とよぶことにする．混乱の恐れがないときには，平面グラフと，その平面への良い埋め込み (の 1 つ) を同一視して議論する．
- G を (有限な) 平面グラフとするとき，G (の平面への良い埋め込み) は，平面をいくつかの面 (face, 辺で区切られた領域) に分割する．このような面の数を $\mathbf{f}$ であらわす．ただし，G を取り囲む無限に広がる領域も面の 1 つとして数えることにする．

オイラーの公式 (2/5)

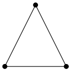
- G を (有限な) 平面グラフとするとき，G (の平面への良い埋め込み) は，平面をいくつかの面 (face, 辺で区切られた領域) に分割する．このような面の数を **f** であらわす．ただし，G を取り囲む無限に広がる領域も面の 1 つとして数えることにする．

オイラーの公式 (2/5)

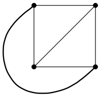
- G を (有限な) 平面グラフとするとき，G (の平面への良い埋め込み) は，平面をいくつかの面 (face, 辺で区切られた領域) に分割する．このような面の数を **f** であらわす．ただし，G を取り囲む無限に広がる領域も面の 1 つとして数えることにする．

$f = 1$

$f = 1$



$f = 2$



$f = 4$

オイラーの公式 (3/5)

- G を (有限な) 平面グラフとするとき，G (の平面への良い埋め込み) は，平面をいくつかの面 (face, 辺で区切られた領域) に分割する．このような面の数を **f** であらわす．ただし，G を取り囲む無限に広がる領域も面の 1 つとして数えることにする．
  - 面の数は G に依存するので，たとえば，f_G などという記号を使うべきであり，この数は G 良い埋め込みにも依存する可能性もあるので，その区別もした方がいいのだが，煩雑なので，G と G の平面への良い埋め込みの 1 つが固定されているときには，これを単に f であらわす．ただし，後で，f の値は G のみに依存し，G の平面への埋め込み方によらないことが示される．
- 有限グラフ G (必ずしも平面グラフでなくてもいい) の 頂点 (vertex, (複数) vertices) と辺 (edges) の数をそれぞれ，**v** と **e** であらわす．これらも G に依存する数なので，区別をする必要があれば，v_G, e_G などとあらわされるべきである．

定理 (オイラーの公式)．任意の連結な平面グラフ G について，$v - e + f = 2$ が成り立つ．

オイラーの公式 (3/5)

- G を (有限な) 平面グラフとするとき，G (の平面への良い埋め込み) は，平面をいくつかの面 (face, 辺で区切られた領域) に分割する．このような面の数を **f** であらわす．ただし，G を取り囲む無限に広がる領域も面の 1 つとして数えることにする．

- 面の数は G に依存するので，たとえば，f_G などという記号を使うべきであり，この数は G 良い埋め込みにも依存する可能性もあるので，その区別もした方がいいのだが，煩雑なので，G と G の平面への良い埋め込みの 1 つが固定されているときには，これを単に f であらわす．ただし，後で，f の値は G のみに依存し，G の平面への埋め込み方によらないことが示される．

- 有限グラフ G (必ずしも平面グラフでなくてもいい) の 頂点 (vertex, (複数) vertices) と辺 (edges) の数をそれぞれ，**v** と **e** であらわす．これらも G に依存する数なので，区別をする必要があれば，v_G, e_G などとあらわされるべきである．

定理 (オイラーの公式). 任意の連結な平面グラフ G について，$v - e + f = 2$ が成り立つ．

オイラーの公式 (3/5)

- G を (有限な) 平面グラフとするとき，G (の平面への良い埋め込み) は，平面をいくつかの面 (face, 辺で区切られた領域) に分割する．このような面の数を **f** であらわす．ただし，G を取り囲む無限に広がる領域も面の 1 つとして数えることにする．

  - 面の数は G に依存するので，たとえば，f_G などという記号を使うべきであり，この数は G 良い埋め込みにも依存する可能性もあるので，その区別もした方がいいのだが，煩雑なので，G と G の平面への良い埋め込みの 1 つが固定されているときには，これを単に f であらわす．ただし，後で，f の値は G のみに依存し，G の平面への埋め込み方によらないことが示される．

- 有限グラフ G (必ずしも平面グラフでなくてもいい) の 頂点 (vertex, (複数) vertices) と辺 (edges) の数をそれぞれ，**v** と **e** であらわす．これらも G に依存する数なので，区別をする必要があれば，v_G, e_G などとあらわされるべきである．

定理 (オイラーの公式)．任意の連結な平面グラフ G について，$v - e + f = 2$ が成り立つ．

オイラーの公式 (3/5)

- G を (有限な) 平面グラフとするとき，G (の平面への良い埋め込み) は，平面をいくつかの面 (face, 辺で区切られた領域) に分割する．このような面の数を **f** であらわす．ただし，G を取り囲む無限に広がる領域も面の 1 つとして数えることにする．

  - 面の数は G に依存するので，たとえば，f_G などという記号を使うべきであり，この数は G 良い埋め込みにも依存する可能性もあるので，その区別もした方がいいのだが，煩雑なので，G と G の平面への良い埋め込みの 1 つが固定されているときには，これを単に f であらわす．ただし，後で，f の値は G のみに依存し，G の平面への埋め込み方によらないことが示される．

- 有限グラフ G (必ずしも平面グラフでなくてもいい) の 頂点 (vertex, (複数) vertices) と辺 (edges) の数をそれぞれ，**v** と **e** であらわす．これらも G に依存する数なので，区別をする必要があれば，v_G, e_G などとあらわされるべきである．

定理 (オイラーの公式). 任意の連結な平面グラフ G について，$v - e + f = 2$ が成り立つ．

オイラーの公式 (3/5)

- G を (有限な) 平面グラフとするとき，G (の平面への良い埋め込み) は，平面をいくつかの面 (face, 辺で区切られた領域) に分割する．このような面の数を **f** であらわす．ただし，G を取り囲む無限に広がる領域も面の 1 つとして数えることにする．
  - 面の数は G に依存するので，たとえば，f_G などという記号を使うべきであり，この数は G 良い埋め込みにも依存する可能性もあるので，その区別もした方がいいのだが，煩雑なので，G と G の平面への良い埋め込みの 1 つが固定されているときには，これを単に f であらわす．ただし，後で，f の値は G のみに依存し，G の平面への埋め込み方によらないことが示される．
- 有限グラフ G (必ずしも平面グラフでなくてもいい) の 頂点 (vertex, (複数) vertices) と辺 (edges) の数をそれぞれ，**v** と **e** であらわす．これらも G に依存する数なので，区別をする必要があれば，v_G, e_G などとあらわされるべきである．

定理 (オイラーの公式)．任意の連結な平面グラフ G について，$v - e + f = 2$ が成り立つ．

オイラーの公式 (3/5)

- G を (有限な) 平面グラフとするとき，G (の平面への良い埋め込み) は，平面をいくつかの面 (face, 辺で区切られた領域) に分割する．このような面の数を **f** であらわす．ただし，G を取り囲む無限に広がる領域も面の 1 つとして数えることにする．
  - 面の数は G に依存するので，たとえば，f_G などという記号を使うべきであり，この数は G 良い埋め込みにも依存する可能性もあるので，その区別もした方がいいのだが，煩雑なので，G と G の平面への良い埋め込みの 1 つが固定されているときには，これを単に f であらわす．ただし，後で，f の値は G のみに依存し，G の平面への埋め込み方によらないことが示される．
- 有限グラフ G (必ずしも平面グラフでなくてもいい) の 頂点 (vertex, (複数) vertices) と辺 (edges) の数をそれぞれ，**v** と **e** であらわす．これらも G に依存する数なので，区別をする必要があれば，v_G, e_G などとあらわされるべきである．

定理 (オイラーの公式). 任意の連結な平面グラフ G について，$v - e + f = 2$ が成り立つ．

オイラーの公式 (4/5)

定理 (オイラーの公式). 任意の連結な平面グラフ G について, $v - e + f = 2$ が成り立つ.

v: G の頂点の数 **e**: G の辺の数 **f**: G の作る面の数

例:

オイラーの公式 (4/5)

定理 (オイラーの公式). 任意の連結な平面グラフ G について, $v - e + f = 2$ が成り立つ.

v: G の頂点の数 **e**: G の辺の数 **f**: G の作る面の数

例:

オイラーの公式 (4/5)

定理 (オイラーの公式). 任意の連結な平面グラフ G について, $v - e + f = 2$ が成り立つ.

v: G の頂点の数　**e**: G の辺の数　**f**: G の作る面の数

例:

オイラーの公式 (4/5)

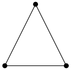
定理 (オイラーの公式). 任意の連結な平面グラフ G について，$v - e + f = 2$ が成り立つ.

v: G の頂点の数　**e**: G の辺の数　**f**: G の作る面の数

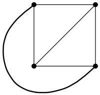
例:

$f = 1$
$v = 1$
$e = 0$

$f = 1$
$v = 2$
$e = 1$



$f = 2$
$v = 3$
$e = 3$



$f = 4$
$v = 4$
$e = 6$

オイラーの公式 (5/5)

定理 (オイラーの公式). 任意の連結な平面グラフ G について, $v - e + f = 2$ が成り立つ.

v: G の頂点の数 **e**: G の辺の数 **f**: G の作る面の数

系. f の値は, 平面グラフ G の平面への良い埋め込みに依存しない.

証明. オイラーの公式から, $f = 2 - v + e$ となるが, この数は, グラフの良い埋め込みに依存せずに決まるものになっている (v と e は与えられたグラフのみに依存して決まる数である). □

オイラーの公式 (5/5)

定理 (オイラーの公式). 任意の連結な平面グラフ G について，$v - e + f = 2$ が成り立つ．

v: G の頂点の数　**e**: G の辺の数　**f**: G の作る面の数

系. f の値は，平面グラフ G の平面への良い埋め込みに依存しない．

証明. オイラーの公式から，$f = 2 - v + e$ となるが，この数は，グラフの良い埋め込みに依存せずに決まるものになっている (v と e は与えられたグラフのみに依存して決まる数である)． □

オイラーの公式 (5/5)

定理 (オイラーの公式). 任意の連結な平面グラフ G について, $v - e + f = 2$ が成り立つ.

v: G の頂点の数　**e**: G の辺の数　**f**: G の作る面の数

系. f の値は, 平面グラフ G の平面への良い埋め込みに依存しない.

証明. オイラーの公式から, $f = 2 - v + e$ となるが, この数は, グラフの良い埋め込みに依存せずに決まるものになっている (v と e は与えられたグラフのみに依存して決まる数である). □

オイラーの公式の証明 (1/2)

定理 (オイラーの公式). 任意の連結な平面グラフ G について，$v - e + f = 2$ が成り立つ．

v: G の頂点の数　**e**: G の辺の数　**f**: G の作る面の数

系. f の値は，平面グラフ G の平面への良い埋め込みに依存しない．

オイラーの公式の証明: ▶ 平面グラフの面の数 f に関する帰納法で証明する．

▷ 証明は，頂点の数に関する帰納法にはうまく乗らない (と思う).

▷ 辺の数に関する帰納法でも証明できるが，証明は，面の数に関する証明より複雑で長くなってしまう．

オイラーの公式の証明 (1/2)

定理 (オイラーの公式). 任意の連結な平面グラフ G について，$v - e + f = 2$ が成り立つ．

v: G の頂点の数　**e**: G の辺の数　**f**: G の作る面の数

系． f の値は，平面グラフ G の平面への良い埋め込みに依存しない．

オイラーの公式の証明: ▶ 平面グラフの面の数 f に関する帰納法で証明する．

▷ 証明は，頂点の数に関する帰納法にはうまく乗らない (と思う).

▷ 辺の数に関する帰納法でも証明できるが，証明は，面の数に関する証明より複雑で長くなってしまう．

オイラーの公式の証明 (1/2)

定理 (オイラーの公式). 任意の連結な平面グラフ G について, $v - e + f = 2$ が成り立つ.

v: G の頂点の数　**e**: G の辺の数　**f**: G の作る面の数

系. f の値は, 平面グラフ G の平面への良い埋め込みに依存しない.

オイラーの公式の証明: ▶ 平面グラフの面の数 f に関する帰納法で証明する.

▷ 証明は, 頂点の数に関する帰納法にはうまく乗らない (と思う).

▷ 辺の数に関する帰納法でも証明できるが, 証明は, 面の数に関する証明より複雑で長くなってしまう.

オイラーの公式の証明 (1/2)

定理 (オイラーの公式). 任意の連結な平面グラフ G について, $v - e + f = 2$ が成り立つ.

v: G の頂点の数　**e**: G の辺の数　**f**: G の作る面の数

系. f の値は, 平面グラフ G の平面への良い埋め込みに依存しない.

オイラーの公式の証明: ▶ 平面グラフの面の数 f に関する帰納法で証明する.

▷ 証明は, 頂点の数に関する帰納法にはうまく乗らない (と思う).

▷ 辺の数に関する帰納法でも証明できるが, 証明は, 面の数に関する証明より複雑で長くなってしまう.

オイラーの公式の証明 (2/3)

定理 (オイラーの公式). 任意の連結な平面グラフ G について, $v - e + f = 2$ が成り立つ.

v: G の頂点の数　**e**: G の辺の数　**f**: G の作る面の数

オイラーの定理の証明: ▶ 平面グラフの面の数 f に関する帰納法で証明する.

▶ 面の数が 1 の場合 (帰納法の初め): (面の数が 0 の場合はあり得ないので, ここでは 1 から始めることになる.) この場合には, グラフの外の無限の領域が唯一の面になるので, グラフ G はサーキット (周) を含まないから, G に木の半順序を入れて G の 2 つの頂点が繋がっていることと, この半順序で片方の頂点がもう片方の頂点の直後の点になっていることが一致するようできる.

▷ このとき, この木の半順序では, 木の根 (root) 以外の頂点 p は, この頂点と, これと (木の順序での) 直前の頂点とを結ぶ辺 ℓ とが一対一に対応するので, $v - e = 1$ となり, したがって $v - e + f = 2$ である.

オイラーの公式の証明 (2/3)

定理 (オイラーの公式). 任意の連結な平面グラフ G について, $v - e + f = 2$ が成り立つ.

v: G の頂点の数　**e**: G の辺の数　**f**: G の作る面の数

オイラーの定理の証明: ▶ 平面グラフの面の数 f に関する帰納法で証明する.

▶ 面の数が 1 の場合 (帰納法の初め): (面の数が 0 の場合はあり得ないので, ここでは 1 から始めることになる.) この場合には, グラフの外の無限の領域が唯一の面になるので, グラフ G はサーキット (周) を含まないから, G に木の半順序を入れて G の 2 つの頂点が繋がっていることと, この半順序で片方の頂点がもう片方の頂点の直後の点になっていることが一致するようできる.

▷ このとき, この木の半順序では, 木の根 (root) 以外の頂点 p は, この頂点と, これと (木の順序での) 直前の頂点とを結ぶ辺 ℓ とが一対一に対応するので, $v - e = 1$ となり, したがって $v - e + f = 2$ である.

オイラーの公式の証明 (2/3)

定理 (オイラーの公式). 任意の連結な平面グラフ G について，$v - e + f = 2$ が成り立つ．

v: G の頂点の数　**e**: G の辺の数　**f**: G の作る面の数

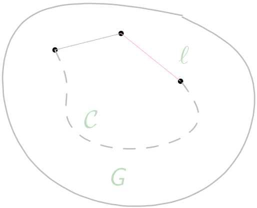
オイラーの定理の証明: ▶ 平面グラフの面の数 f に関する帰納法で証明する．

▶ 面の数が 1 の場合 (帰納法の初め): (面の数が 0 の場合はあり得ないので，ここでは 1 から始めることになる．) この場合には，グラフの外の無限の領域が唯一の面になるので，グラフ G はサーキット (周) を含まないから，G に木の半順序を入れて G の 2 つの頂点が繋がっていることと，この半順序で片方の頂点がもう片方の頂点の直後の点になっていることが一致するようできる．

▷ このとき，この木の半順序では，木の根 (root) 以外の頂点 p は，この頂点と，これと (木の順序での) 直前の頂点とを結ぶ辺 ℓ とが一対一に対応するので，$v - e = 1$ となり，したがって $v - e + f = 2$ である．

オイラーの公式の証明 (3/3)

- 自然数 $k > 1$ に対し，面の数が k 個未満のすべての連結な平面グラフに対して，定理の式が成り立つとして，面の数が k の連結な平面グラフ (の平面への良い埋め込み) に対しても定理の式が成り立つことを示す (帰納法のステップ).
  - G を連結な平面グラフで，(その平面への 1 つの良い埋め込みでの) 面の数 f が k となっているようなものとする．v と e をそれぞれ G の頂点の数と辺の数とする．このとき，$v - e + f = 2$ が成り立つことを示せばよい.
  - $f = k > 1$ により，G は少なくとも 1 つのサーキット (ある面の周) C を持つが，ℓ を G の辺で，このサーキット C の一辺になっているものとする.

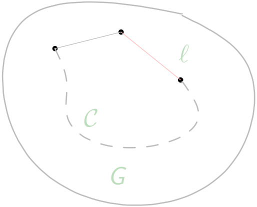


オイラーの公式の証明 (3/3)

- 自然数 $k > 1$ に対し，面の数が k 個未満のすべての連結な平面グラフに対して，定理の式が成り立つとして，面の数が k の連結な平面グラフ (の平面への良い埋め込み) に対しても定理の式が成り立つことを示す (帰納法のステップ).

- G を連結な平面グラフで，(その平面への 1 つの良い埋め込みでの) 面の数 f が k となっているようなものとする．v と e をそれぞれ G の頂点の数と辺の数とする．このとき，$v - e + f = 2$ が成り立つことを示せばよい．

- $f = k > 1$ により，G は少なくとも 1 つのサーキット (ある面の周) C を持つが，ℓ を G の辺で，このサーキット C の一辺になっているものとする．

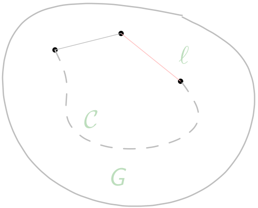


オイラーの公式の証明 (3/3)

- 自然数 $k > 1$ に対し，面の数が k 個未満のすべての連結な平面グラフに対して，定理の式が成り立つとして，面の数が k の連結な平面グラフ (の平面への良い埋め込み) に対しても定理の式が成り立つことを示す (帰納法のステップ).

- G を連結な平面グラフで，(その平面への 1 つの良い埋め込みでの) 面の数 f が k となっているようなものとする．v と e をそれぞれ G の頂点の数と辺の数とする．このとき，$v - e + f = 2$ が成り立つことを示せばよい.

- $f = k > 1$ により，G は少なくとも 1 つのサーキット (ある面の周) $\mathcal{C}$ を持つが，ℓ を G の辺で，このサーキット $\mathcal{C}$ の一辺になっているものとする.

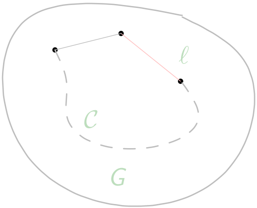


オイラーの公式の証明 (3/3)

- 自然数 $k > 1$ に対し，面の数が k 個未満のすべての連結な平面グラフに対して，定理の式が成り立つとして，面の数が k の連結な平面グラフ (の平面への良い埋め込み) に対しても定理の式が成り立つことを示す (帰納法のステップ).

▷ G を連結な平面グラフで，(その平面への 1 つの良い埋め込みでの) 面の数 f が k となっているようなものとする．v と e をそれぞれ G の頂点の数と辺の数とする．このとき，$v - e + f = 2$ が成り立つことを示せばよい.

▷ $f = k > 1$ により，G は少なくとも 1 つのサーキット (ある面の周) $\mathcal{C}$ を持つが，ℓ を G の辺で，このサーキット $\mathcal{C}$ の一辺になっているものとする.

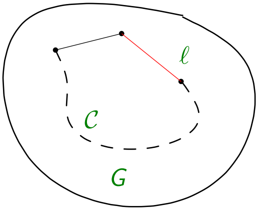


オイラーの公式の証明 (3/3)

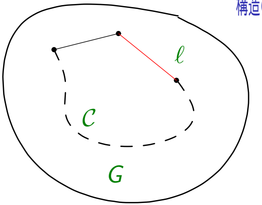
- 自然数 $k > 1$ に対し，面の数が k 個未満のすべての連結な平面グラフに対して，定理の式が成り立つとして，面の数が k の連結な平面グラフ (の平面への良い埋め込み) に対しても定理の式が成り立つことを示す (帰納法のステップ).

▷ G を連結な平面グラフで，(その平面への 1 つの良い埋め込みでの) 面の数 f が k となっているようなものとする．v と e をそれぞれ G の頂点の数と辺の数とする．このとき，$v - e + f = 2$ が成り立つことを示せばよい.

▷ $f = k > 1$ により，G は少なくとも 1 つのサーキット (ある面の周) $\mathcal{C}$ を持つが，ℓ を G の辺で，このサーキット $\mathcal{C}$ の一辺になっているものとする.



オイラーの公式の証明 (4/3)



▷ G から辺 ℓ を取り除いて得られる平面グラフを G' として，G' の頂点の数，辺の数，面の数をそれぞれ v', e', f' とする．

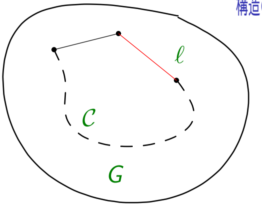
G で $\mathcal{C}$ で囲まれていた面は，ℓ を取り去ったことで，G' では ℓ の反対側にあった面と一緒になっているので，$f' = f - 1$ (つまり $f = f' + 1$) である．ℓ がサーキット $\mathcal{C}$ の辺であることから，G' は連結なので，帰納法の仮定が適用でき，$v' - e' + f' = 2$ である．

一方，$v' = v$, $e' = e - 1$ (つまり $e = e' + 1$) ある．

▷ したがって，
$v - e + f = v' - (e' + 1) + (f' + 1) = v' - e' + f' = 2$ となる．

▷ よって，帰納法のステップの証明ができたので，定理の証明も完了した．$\square$

オイラーの公式の証明 (4/3)



▷ G から辺 ℓ を取り除いて得られる平面グラフを G' として，G' の頂点の数，辺の数，面の数をそれぞれ v', e', f' とする．

G で $\mathcal{C}$ で囲まれていた面は，ℓ を取り去ったことで，G' では ℓ の反対側にあった面と一緒になっているので，$f' = f - 1$ (つまり $f = f' + 1$) である．ℓ がサーキット $\mathcal{C}$ の辺であることから，G' は連結なので，帰納法の仮定が適用でき，$v' - e' + f' = 2$ である．

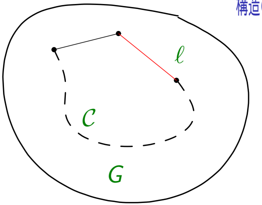
一方，$v' = v$, $e' = e - 1$ (つまり $e = e' + 1$) ある．

▷ したがって，

$v - e + f = v' - (e' + 1) + (f' + 1) = v' - e' + f' = 2$ となる．

▷ よって，帰納法のステップの証明ができたので，定理の証明も完了した．□

オイラーの公式の証明 (4/3)



▷ G から辺 ℓ を取り除いて得られる平面グラフを G' として，G' の頂点の数，辺の数，面の数をそれぞれ v', e', f' とする．

G で $\mathcal{C}$ で囲まれていた面は，ℓ を取り去ったことで，G' では ℓ の反対側にあった面と一緒になっているので，$f' = f - 1$ (つまり $f = f' + 1$) である．ℓ がサーキット $\mathcal{C}$ の辺であることから，G' は連結なので，帰納法の仮定が適用でき，$v' - e' + f' = 2$ である．

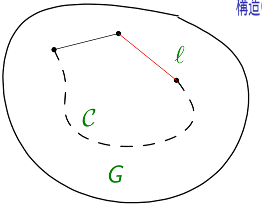
一方，$v' = v$, $e' = e - 1$ (つまり $e = e' + 1$) ある．

▷ したがって，

$v - e + f = v' - (e' + 1) + (f' + 1) = v' - e' + f' = 2$ となる．

▷ よって，帰納法のステップの証明ができたので，定理の証明も完了した．$\square$

オイラーの公式の証明 (4/3)



▷ G から辺 ℓ を取り除いて得られる平面グラフを G' として，G' の頂点の数，辺の数，面の数をそれぞれ v', e', f' とする．

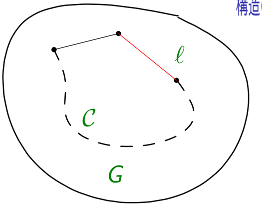
G で $\mathcal{C}$ で囲まれていた面は，ℓ を取り去ったことで，G' では ℓ の反対側にあった面と一緒になっているので，$f' = f - 1$ (つまり $f = f' + 1$) である．ℓ がサーキット $\mathcal{C}$ の辺であることから，G' は連結なので，帰納法の仮定が適用でき，$v' - e' + f' = 2$ である．

一方，$v' = v$, $e' = e - 1$ (つまり $e = e' + 1$) ある．

▷ したがって，
$v - e + f = v' - (e' + 1) + (f' + 1) = v' - e' + f' = 2$ となる．

▷ よって，帰納法のステップの証明ができたので，定理の証明も完了した．□

オイラーの公式の証明 (4/3)



▷ G から辺 ℓ を取り除いて得られる平面グラフを G' として，G' の頂点の数，辺の数，面の数をそれぞれ v', e', f' とする．

G で $\mathcal{C}$ で囲まれていた面は，ℓ を取り去ったことで，G' では ℓ の反対側にあった面と一緒になっているので，$f' = f - 1$ (つまり $f = f' + 1$) である．ℓ がサーキット $\mathcal{C}$ の辺であることから，G' は連結なので，帰納法の仮定が適用でき，$v' - e' + f' = 2$ である．

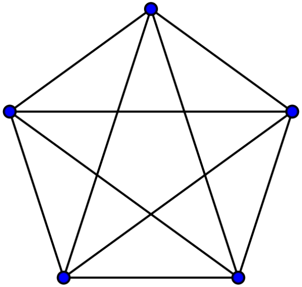
一方，$v' = v$, $e' = e - 1$ (つまり $e = e' + 1$) ある．

▷ したがって，

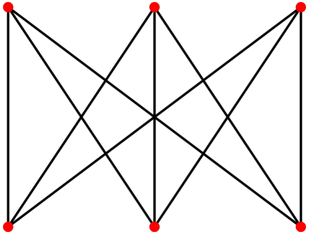
$v - e + f = v' - (e' + 1) + (f' + 1) = v' - e' + f' = 2$ となる．

▷ よって，帰納法のステップの証明ができたので，定理の証明も完了した．□

K_5 と $K_{3,3,}$ — 前回の復習



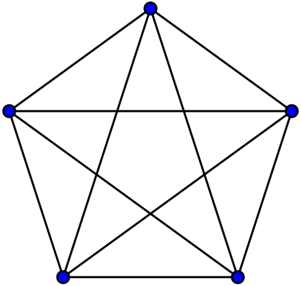
K_5



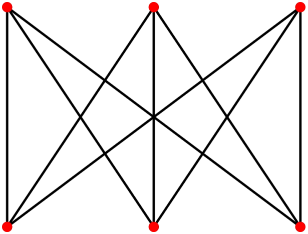
$K_{3,3}$

- K_5 は頂点を 5 つ持つ完全グラフで，$K_{3,3}$ は，3 つの頂点からなる 2 つのグループ上の完全 2 部グラフである．

K_5 と $K_{3,3,}$ — 前回の復習



K_5



$K_{3,3}$

- K_5 は頂点を 5 つ持つ完全グラフで，$K_{3,3}$ は，3 つの頂点からなる 2 つのグループ上の完全 2 部グラフである．

オイラーの公式の応用

定理. (1) K_5 は平面グラフではない.
(2) $K_{3,3,}$ は平面グラフではない.

証明. (1) を示す. (2) も同様に証明できる (演習).

▶ G を K_5 とする. G の平面への良い埋め込みが存在したとして矛盾を示す.

▷ v と e をそれぞれ G の頂点の数と辺の数とすると, $v=5$ で $e={}_5C_2=10$ となる. したがって, G の平面への良い埋め込みでの面の数はオイラーの公式から, $f=e-v+2=10-5+2=7$ 個でなくてはならない. F をこの埋め込みでの面の全体として, $x\in F$ に対し, n_x で, この面を囲んでいる G の辺の数とする.

▷ 各 $x\in F$ に対し, $n_x\geq 3$ だから, $\sum_{x\in F} n_x \geq f\times 3$ である.

▷ 一方各辺はちょうど 2 つの面の境界となっているから, $\sum_{x\in F} n_x = 2e$ である.

▷ したがって, $e\geq f\times\frac{3}{2}=7\times\frac{3}{2}=10\frac{1}{2}$ となり, $e=10$ に矛盾である. □

オイラーの公式の応用

定理. (1) K_5 は平面グラフではない．
(2) $K_{3,3,}$ は平面グラフではない．

証明. (1) を示す．(2) も同様に証明できる (演習).

▶ G を K_5 とする．G の平面への良い埋め込みが存在したとして矛盾を示す．

▷ v と e をそれぞれ G の頂点の数と辺の数とすると，$v = 5$ で $e = {}_5C_2 = 10$ となる．したがって，G の平面への良い埋め込みでの面の数はオイラーの公式から，$f = e - v + 2 = 10 - 5 + 2 = 7$ 個でなくてはならない．F をこの埋め込みでの面の全体として，$x \in F$ に対し，n_x で，この面を囲んでいる G の辺の数とする．

▷ 各 $x \in F$ に対し，$n_x \geq 3$ だから，$\sum_{x \in F} n_x \geq f \times 3$ である．

▷ 一方各辺はちょうど 2 つの面の境界となっているから，$\sum_{x \in F} n_x = 2e$ である．

▷ したがって，$e \geq f \times \frac{3}{2} = 7 \times \frac{3}{2} = 10\frac{1}{2}$ となり，$e = 10$ に矛盾である．□

オイラーの公式の応用

定理. (1) K_5 は平面グラフではない.
(2) $K_{3,3,}$ は平面グラフではない.

証明. (1) を示す. (2) も同様に証明できる (演習).

▶ G を K_5 とする. G の平面への良い埋め込みが存在したとして矛盾を示す.

▷ v と e をそれぞれ G の頂点の数と辺の数とすると, $v = 5$ で $e = {}_5C_2 = 10$ となる. したがって, G の平面への良い埋め込みでの面の数はオイラーの公式から, $f = e - v + 2 = 10 - 5 + 2 = 7$ 個でなくてはならない. F をこの埋め込みでの面の全体として, $x \in F$ に対し, n_x で, この面を囲んでいる G の辺の数とする.

▷ 各 $x \in F$ に対し, $n_x \geq 3$ だから, $\sum_{x \in F} n_x \geq f \times 3$ である.

▷ 一方各辺はちょうど 2 つの面の境界となっているから, $\sum_{x \in F} n_x = 2e$ である.

▷ したがって, $e \geq f \times \frac{3}{2} = 7 \times \frac{3}{2} = 10\frac{1}{2}$ となり, $e = 10$ に矛盾である. □

オイラーの公式の応用

定理． (1) K_5 は平面グラフではない．
(2) $K_{3,3,}$ は平面グラフではない．

証明． (1) を示す．(2) も同様に証明できる (演習).

▶ G を K_5 とする．G の平面への良い埋め込みが存在したとして矛盾を示す．

▷ v と e をそれぞれ G の頂点の数と辺の数とすると，$v = 5$ で $e = {}_5C_2 = 10$ となる．したがって，G の平面への良い埋め込みでの面の数はオイラーの公式から，$f = e - v + 2 = 10 - 5 + 2 = 7$ 個でなくてはならない．F をこの埋め込みでの面の全体として，$x \in F$ に対し，n_x で，この面を囲んでいる G の辺の数とする．

▷ 各 $x \in F$ に対し，$n_x \geq 3$ だから，$\sum_{x \in F} n_x \geq f \times 3$ である．

▷ 一方各辺はちょうど 2 つの面の境界となっているから，$\sum_{x \in F} n_x = 2e$ である．

▷ したがって，$e \geq f \times \frac{3}{2} = 7 \times \frac{3}{2} = 10\frac{1}{2}$ となり，$e = 10$ に矛盾である．□

オイラーの公式の応用

定理. (1) K_5 は平面グラフではない.
(2) $K_{3,3,}$ は平面グラフではない.

証明. (1) を示す. (2) も同様に証明できる (演習).

▶ G を K_5 とする. G の平面への良い埋め込みが存在したとして矛盾を示す.

▷ v と e をそれぞれ G の頂点の数と辺の数とすると, $v = 5$ で $e = {}_5C_2 = 10$ となる. したがって, G の平面への良い埋め込みでの面の数はオイラーの公式から, $f = e - v + 2 = 10 - 5 + 2 = 7$ 個でなくてはならない. F をこの埋め込みでの面の全体として, $x \in F$ に対し, n_x で, この面を囲んでいる G の辺の数とする.

▷ 各 $x \in F$ に対し, $n_x \geq 3$ だから, $\sum_{x \in F} n_x \geq f \times 3$ である.

▷ 一方各辺はちょうど 2 つの面の境界となっているから, $\sum_{x \in F} n_x = 2e$ である.

▷ したがって, $e \geq f \times \frac{3}{2} = 7 \times \frac{3}{2} = 10\frac{1}{2}$ となり, $e = 10$ に矛盾である. □

オイラーの公式の応用

定理． (1) K_5 は平面グラフではない．
(2) $K_{3,3}$ は平面グラフではない．

証明． (1) を示す．(2) も同様に証明できる (演習)．

▶ G を K_5 とする．G の平面への良い埋め込みが存在したとして矛盾を示す．

▷ v と e をそれぞれ G の頂点の数と辺の数とすると，$v = 5$ で $e = {}_5C_2 = 10$ となる．したがって，G の平面への良い埋め込みでの面の数はオイラーの公式から，$f = e - v + 2 = 10 - 5 + 2 = 7$ 個でなくてはならない．F をこの埋め込みでの面の全体として，$x \in F$ に対し，n_x で，この面を囲んでいる G の辺の数とする．

▷ 各 $x \in F$ に対し，$n_x \geq 3$ だから，$\sum_{x \in F} n_x \geq f \times 3$ である．

▷ 一方各辺はちょうど 2 つの面の境界となっているから，$\sum_{x \in F} n_x = 2e$ である．

▷ したがって，$e \geq f \times \frac{3}{2} = 7 \times \frac{3}{2} = 10\frac{1}{2}$ となり，$e = 10$ に矛盾である．□

オイラーの公式の応用

定理. (1) K_5 は平面グラフではない.
(2) $K_{3,3,}$ は平面グラフではない.

証明. (1) を示す. (2) も同様に証明できる (演習).

▶ G を K_5 とする. G の平面への良い埋め込みが存在したとして矛盾を示す.

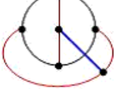
▷ v と e をそれぞれ G の頂点の数と辺の数とすると, $v = 5$ で $e = {}_5C_2 = 10$ となる. したがって, G の平面への良い埋め込みでの面の数はオイラーの公式から, $f = e - v + 2 = 10 - 5 + 2 = 7$ 個でなくてはならない. F をこの埋め込みでの面の全体として, $x \in F$ に対し, n_x で, この面を囲んでいる G の辺の数とする.

▷ 各 $x \in F$ に対し, $n_x \geq 3$ だから, $\sum_{x \in F} n_x \geq f \times 3$ である.

▷ 一方各辺はちょうど 2 つの面の境界となっているから, $\sum_{x \in F} n_x = 2e$ である.

▷ したがって, $e \geq f \times \frac{3}{2} = 7 \times \frac{3}{2} = 10\frac{1}{2}$ となり, $e = 10$ に矛盾である. □

演習問題

(1) 右の図式  は，$K_{3,3,}$ の (別の) 表現になっていることを示せ (初級問題).

(2) ジョルダンの定理は，平面上のどの閉曲線も平面を 2 つの領域に分離することを主張するものである (あたりまえに見えるがきちん証明するのは簡単ではない)．オイラーの公式の証明の帰納法の始めでは，この定理が暗に使われている．この定理がどう使われているかが明確に分るようにこの証明を書きなおせ (中級問題).

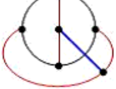
(3) G をグラフとして，H を G の subdivision とする (subdivision という用語は前回の講義で説明している)．G が平面グラフでないなら，H も平面グラフでないことを示せ (初級問題).

(4) K_5 も $K_{3,3,}$ もドーナツ状の立体 (トーラス) の表面に辺の交差なく埋め込むことができることを示せ (中級問題).

(5) 2 部グラフのサーキットはすべて 4 個以上の偶数個の辺を持つことを示せ (中級問題).

(6) $K_{3,3,}$ が平面グラフでないことを示せ (中-上級問題，ヒント: (3) とオイラーの公式を用いる).

演習問題

(1) 右の図式  は， $K_{3,3,}$ の (別の) 表現になっていることを示せ (初級問題).

(2) ジョルダンの定理は，平面上のどの閉曲線も平面を 2 つの領域に分離することを主張するものである (あたりまえに見えるがきちん証明するのは簡単ではない)．オイラーの公式の証明の帰納法の始めでは，この定理が暗に使われている．この定理がどう使われているかが明確に分るようにこの証明を書きなおせ (中級問題).

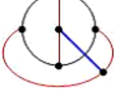
(3) G をグラフとして， H を G の subdivision とする (subdivision という用語は前回の講義で説明している)． G が平面グラフでないなら， H も平面グラフでないことを示せ (初級問題).

(4) K_5 も $K_{3,3,}$ もドーナツ状の立体 (トーラス) の表面に辺の交差なく埋め込むことができることを示せ (中級問題).

(5) 2 部グラフのサーキットはすべて 4 個以上の偶数個の辺を持つことを示せ (中級問題).

(6) $K_{3,3,}$ が平面グラフでないことを示せ (中-上級問題，ヒント: (3) とオイラーの公式を用いる).

演習問題

(1) 右の図式  は， $K_{3,3,}$ の (別の) 表現になっていることを示せ (初級問題).

(2) ジョルダンの定理は，平面上のどの閉曲線も平面を 2 つの領域に分離することを主張するものである (あたりまえに見えるがきちん証明するのは簡単ではない)．オイラーの公式の証明の帰納法の始めでは，この定理が暗に使われている．この定理がどう使われているかが明確に分るようにこの証明を書きなおせ (中級問題).

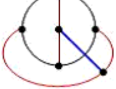
(3) G をグラフとして，H を G の subdivision とする (subdivision という用語は前回の講義で説明している)． G が平面グラフでないなら，H も平面グラフでないことを示せ (初級問題).

(4) K_5 も $K_{3,3,}$ もドーナツ状の立体 (トーラス) の表面に辺の交差なく埋め込むことができることを示せ (中級問題).

(5) 2 部グラフのサーキットはすべて 4 個以上の偶数個の辺を持つことを示せ (中級問題).

(6) $K_{3,3,}$ が平面グラフでないことを示せ (中-上級問題，ヒント: (3) とオイラーの公式を用いる).

演習問題

(1) 右の図式  は， $K_{3,3,}$ の (別の) 表現になっていることを示せ (初級問題).

(2) ジョルダンの定理は，平面上のどの閉曲線も平面を 2 つの領域に分離することを主張するものである (あたりまえに見えるがきちん証明するのは簡単ではない). オイラーの公式の証明の帰納法の始めでは，この定理が暗に使われている. この定理がどう使われているかが明確に分るようにこの証明を書きなおせ (中級問題).

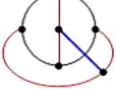
(3) G をグラフとして，H を G の subdivision とする (subdivision という用語は前回の講義で説明している). G が平面グラフでないなら，H も平面グラフでないことを示せ (初級問題).

(4) K_5 も $K_{3,3,}$ もドーナツ状の立体 (トーラス) の表面に辺の交差なく埋め込むことができることを示せ (中級問題).

(5) 2 部グラフのサーキットはすべて 4 個以上の偶数個の辺を持つことを示せ (中級問題).

(6) $K_{3,3,}$ が平面グラフでないことを示せ (中-上級問題，ヒント: (3) とオイラーの公式を用いる).

演習問題

(1) 右の図式  は, $K_{3,3}$, の (別の) 表現になっていることを示せ (初級問題).

(2) ジョルダンの定理は，平面上のどの閉曲線も平面を 2 つの領域に分離することを主張するものである (あたりまえに見えるがきちん証明するのは簡単ではない). オイラーの公式の証明の帰納法の始めでは，この定理が暗に使われている. この定理がどう使われているかが明確に分るようにこの証明を書きなおせ (中級問題).

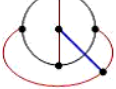
(3) G をグラフとして，H を G の subdivision とする (subdivision という用語は前回の講義で説明している). G が平面グラフでないなら，H も平面グラフでないことを示せ (初級問題).

(4) K_5 も $K_{3,3}$, もドーナツ状の立体 (トーラス) の表面に辺の交差なく埋め込むことができることを示せ (中級問題).

(5) 2 部グラフのサーキットはすべて 4 個以上の偶数個の辺を持つことを示せ (中級問題).

(6) $K_{3,3}$, が平面グラフでないことを示せ (中-上級問題，ヒント: (3) とオイラーの公式を用いる).

演習問題

(1) 右の図式  は，$K_{3,3,}$ の (別の) 表現になっていることを示せ (初級問題).

(2) ジョルダンの定理は，平面上のどの閉曲線も平面を 2 つの領域に分離することを主張するものである (あたりまえに見えるがきちん証明するのは簡単ではない)．オイラーの公式の証明の帰納法の始めでは，この定理が暗に使われている．この定理がどう使われているかが明確に分るようにこの証明を書きなおせ (中級問題).

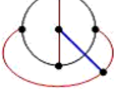
(3) G をグラフとして，H を G の subdivision とする (subdivision という用語は前回の講義で説明している)．G が平面グラフでないなら，H も平面グラフでないことを示せ (初級問題).

(4) K_5 も $K_{3,3,}$ もドーナツ状の立体 (トーラス) の表面に辺の交差なく埋め込むことができることを示せ (中級問題).

(5) 2 部グラフのサーキットはすべて 4 個以上の偶数個の辺を持つことを示せ (中級問題).

(6) $K_{3,3,}$ が平面グラフでないことを示せ (中-上級問題，ヒント: (3) とオイラーの公式を用いる).

演習問題

(1) 右の図式  は，$K_{3,3,}$ の (別の) 表現になっていることを示せ (初級問題).

(2) ジョルダンの定理は，平面上のどの閉曲線も平面を 2 つの領域に分離することを主張するものである (あたりまえに見えるがきちん証明するのは簡単ではない)．オイラーの公式の証明の帰納法の始めでは，この定理が暗に使われている．この定理がどう使われているかが明確に分るようにこの証明を書きなおせ (中級問題).

(3) G をグラフとして，H を G の subdivision とする (subdivision という用語は前回の講義で説明している)．G が平面グラフでないなら，H も平面グラフでないことを示せ (初級問題).

(4) K_5 も $K_{3,3,}$ もドーナツ状の立体 (トーラス) の表面に辺の交差なく埋め込むことができることを示せ (中級問題).

(5) 2 部グラフのサーキットはすべて 4 個以上の偶数個の辺を持つことを示せ (中級問題).

(6) $K_{3,3,}$ が平面グラフでないことを示せ (中-上級問題，ヒント: (3) とオイラーの公式を用いる).