

# 構造の数理

2011年12月08日 第8回目の講義

Sakaé Fuchino (湊野 昌)

Dept. of Computer Sciences  
Kobe University

(神戸大学大学院 システム情報学研究科)

<http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/>

## 四色問題 (1)

(20. Dezember 2011 (11:39 JST) version)

神戸大学 2011 年度後期の講義

This presentation is typeset by p<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X with beamer class.

- ▶ **四色問題** (ししょくもんだい) (**four color problem**) — あるいは現在では問題は解けているので: **四色定理** (ししょくていり) (**four color theorem**) — は次のような主張である:

定理 . (四色定理 , K. Appel and W. Haken, 1976(昭和 51) / N. Robertson, D.P. Sanders, P. Seymour and R. Thomas, 1997(平成 9 年))  
すべての地図は国境に接する国が異なる色になるように、四つの色だけを使って塗り分けることができる . ただし , 1 点だけで接している国については同色で塗ってもよいこととする . また , どの国も飛び地を持たないものとする .



Wikipedia: [Four color theorem](#)  
の項目から引用

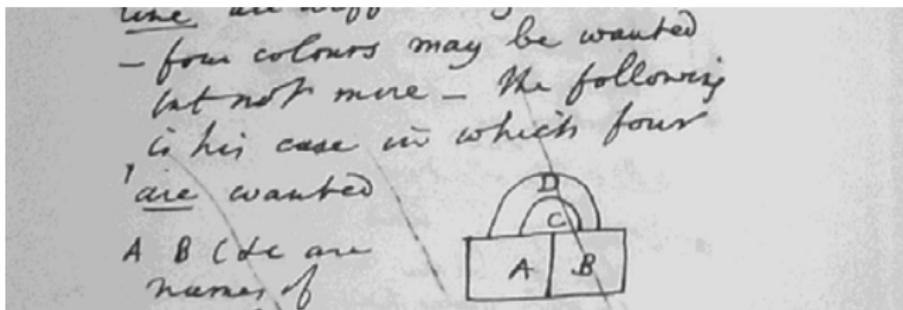




Augustus De Morgan

A student of mine asked me to day to give him a reason for a fact which I did not know was a fact – and do not yet. He says that if a figure be any how divided and the compartments differently coloured so that figures with any portion of common boundary line are differently coloured – four colours may be wanted but not more – the following is his case in which four are wanted. ...

ド・モルガンの手紙のオリジナル

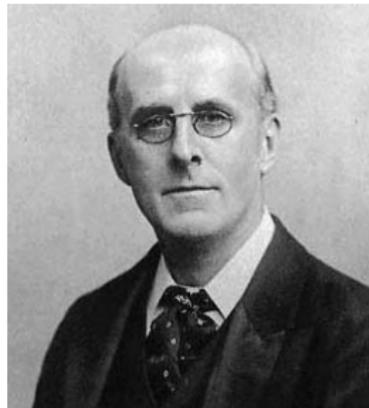


## 四色問題の歴史 (3/5)

構造の数理 11/12/08 (5/13)

- ▶ 1879年(明治12年)に Alfred Kempe は四色定理の証明を発表した。この証明は後に間違いを含んでいることが分ったが、1879年から11年間、この間違いは誰にも発見されず、四色問題は解決したと思われていた。
- ▶ 1890年(明治23年)に Percy Heawood は Kempe の証明の間違いを指摘した。ただし Heawood は Kempe の方法によって“五色問題”は解けることを示した。この主張の証明は、後で詳しく見る。Kempe のアイデアは、後の(正しい)四色問題の解決でも、重要な役割をはたすことになる。

Alfred Kempe  
(1849(嘉永2) London - 1922(大正11) London)



▶ 1960年代になると、コンピュータを補助手段として用いる四色定理の証明の可能性が研究されはじめた。

▷ ドイツの Heinrich Heesch はこのために必要なアイデアを出している。しかし、十分な計算時間（当時のスーパーコンピュータの計算割りあて）を入手できなかったという事情もあったようで、計算のテストはしているが、証明を実行するにはいたらなかった。

1976年に Kenneth Appel and Wolfgang Haken は四色問題の証明のために作成したプログラムをイリノイ大学の（当時の）スーパー・コンピュータで延べ 1000 時間以上かけて実行し、その結果を用いて証明を完成させた。

▶ Appel と Haken の証明では、コンピュータの使用は、手でチェックしたのでは、非現実的な時間がかかってしまう（有限だが）大きな個数の場合を、すべてチェックするために用いられているにすぎない。

1976 年に Kenneth Appel and Wolfgang Haken は四色問題の証明のために作成したプログラムを，イリノイ大学の（当時の）スーパー・コンピュータで延べ 1000 時間以上かけて実行し，その結果を用いて証明を完成させた．

- ▶ コンピュータを本質的に用いた証明では，この証明の場合のように，証明が正しいかどうかを人間が現実的な時間内にチェックすることが不可能なことがある．この証明も，この観点から受け入れられないとする意見もある．
- ▶ 1980 年代には，Appel と Haken の証明が間違っていたという噂が広まったことがあった．
- ▷ Appel と Haken は 1989 年に出版した本で，1976 年の証明の細部のほころびはすべて修正可能であることを示した．
- ▶ 1996 年には，Neil Robertson, Daniel P. Sanders, Paul Seymour, and Robin Thomas による（やはりコンピュータを使う）別証明が得られている．

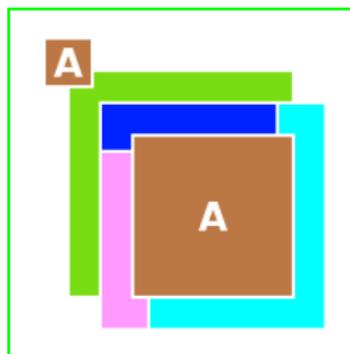
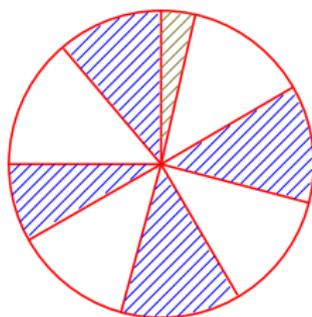
## K. Appel and W. Haken による四色定理の証明 1976(昭和 51)

証明には、延べ、1300 時間以上 (一説には 1500 時間以上) 当時のスーパー・コンピュータを稼働させた。

## N. Robertson, D.P. Sanders, P. Seymour and R. Thomas による四色定理の証明, 1997(平成 9 年)

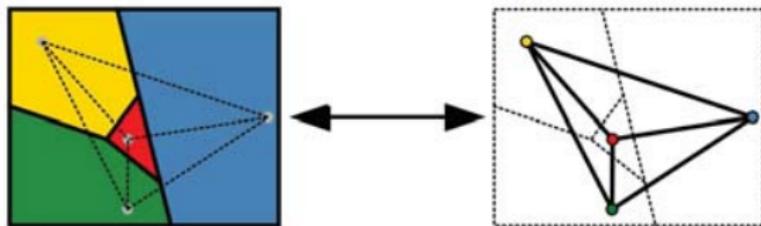
機械証明の部分はワークステーション (pc より多少パワフルなマシン) で5分くらいで完了する: 人手でやれば6ヵ月くらいの作業量 (Seymour の講演でのリマーク)。

定理 . (四色定理 , K. Appel and W. Haken, 1976(昭和 51) /  
N. Robertson, D.P. Sanders, P. Seymour and R. Thomas, 1997(平成 9 年))  
すべての地図は , 四つの色だけを使って , 国境を接する国の  
色がすべて異なるように塗り分けることができる . ただし ,  
1 点だけで接している国については同色で塗ってもよい ことと  
する . また , どの国も飛び地を持たない ものとする .



▶ 上のような塗り分けに四色の必要な地図があることは既に見た  
ので , 上の定理の “四つの色” は最良の結果になっている .

- ▶ 平面上の一つ一つ国をそれぞれ頂点に対応させ、2つの国が隣接していることを対応する頂点が辺で結ばれていることに対応させることによって、地図の色分けを単一な平面グラフの頂点の色分けに対応させることができる。



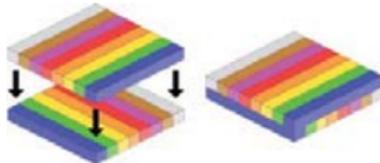
Wikipedia: [Four color theorem](#)  
の項目から引用

- ▶ 前のスライドの対応により，四色定理はグラフに対する命題に翻訳される．

定理．(四色定理のグラフによる定式化，K. Appel and W. Haken, 1976(昭和 51) / N. Robertson, D.P. Sanders, P. Seymour and R. Thomas, 1997(平成 9 年))

すべての平面グラフの頂点は，四つの色だけを使って，すべての辺でつながった異なる頂点が別の色になるように塗り分けることができる．

- (1) 3次元の領域を互いに面で接している領域が違う色になるように色分けするには、いくらでも多くの数が必要になることを示せ (中級問題 ヒント: 右の図)



ドイツ語版 wikipedia: Vier Farben Satz からの引用

- (2) 空間領域をグラフの頂点と考え、2つの領域が面で接しているときにそれらの頂点を結ぶ辺がある、と考えることにする。すべての (有限な) 一重グラフは、空間領域をこのようなやりかたでグラフと解釈することで得られることを示せ (上級問題)。
- (3) 5つの国のうちすべての2つの国の組が国境で接しているような地図は存在しないことを示せ (中級問題)。

来週 12月15日の講義は出張のため休講とします。

来週 12 月 15 日の講義は出張のため休講とします。

- ▶ 一松信,  
四色問題 — その誕生から解決まで,  
講談社ブルーバックス (1978).
- ▶ Alexander Soifer,  
Mathematical Coloring Book,  
Springer (2009).
- ▶ Wikipedia の [Four color theorem の項目](#)
- ▶ MacTutor の [Four colour theorem の項目](#)