構造の数理

2011 年 12 月 01 日　第 9 回目の講義

Sakaé Fuchino (渕野 昌)

Dept. of Computer Sciences
Kobe University
(神戸大学大学院 システム情報学研究科)

http://fuchino.ddo.jp/

四色問題 (2)

(8. April 2018 (14:00 JST) version)

神戸大学 2011 年度後期の講義

This presentation is typeset by pLATEX with beamer class.

四色定理

定理. (K. Appel and W. Haken, 1976(昭和 51) / N. Robertson, D.P. Sanders, P. Seymour and R. Thomas, 1997(平成 9 年))

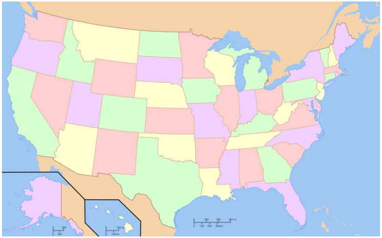
すべての地図は国境に接する国が異る色になるように，四つの色だけを使って塗り分けることができる．ただし，1 点だけで接している国については同色で塗ってもよいこととする．また，どの国も飛び地を持たないものとする．

四色定理

定理. (K. Appel and W. Haken, 1976(昭和 51) / N. Robertson, D.P. Sanders, P. Seymour and R. Thomas, 1997(平成 9 年))
すべての地図は国境に接する国が異る色になるように，四つの色だけを使って塗り分けることができる．ただし，1 点だけで接している国については同色で塗ってもよいこととする．また，どの国も飛び地を持たないものとする．

四色定理

定理. (K. Appel and W. Haken, 1976(昭和 51) / N. Robertson, D.P. Sanders, P. Seymour and R. Thomas, 1997(平成 9 年))
すべての地図は国境に接する国が異る色になるように，四つの色だけを使って塗り分けることができる．ただし，1 点だけで接している国については同色で塗ってもよいこととする．また，どの国も飛び地を持たないものとする．



Wikipedia: Four color theorem の項目から引用

四色定理

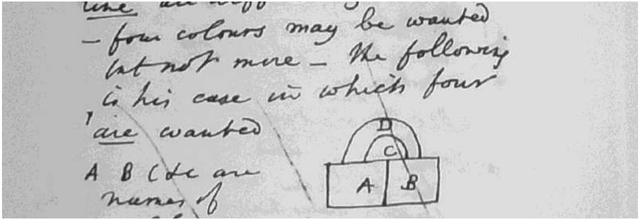
定理. (K. Appel and W. Haken, 1976(昭和 51) / N. Robertson, D.P. Sanders, P. Seymour and R. Thomas, 1997(平成 9 年))

すべての地図は国境に接する国が異る色になるように，四つの色だけを使って塗り分けることができる．ただし，1 点だけで接している国については同色で塗ってもよいこととする．また，どの国も飛び地を持たないものとする．

ド・モルガンの手紙のオリジナルに描かれた，最低で 4 色は必要なことを示す例

四色定理

定理. (K. Appel and W. Haken, 1976(昭和 51) / N. Robertson, D.P. Sanders, P. Seymour and R. Thomas, 1997(平成 9 年))
すべての地図は国境に接する国が異る色になるように，四つの色だけを使って塗り分けることができる．ただし，1 点だけで接している国については同色で塗ってもよいこととする．また，どの国も飛び地を持たないものとする．



ド・モルガンの手紙のオリジナルに描かれた，最低で 4 色は必要なことを示す例

四色定理

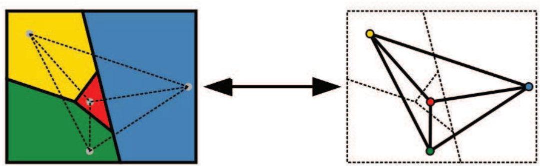
定理． (K. Appel and W. Haken, 1976(昭和 51) / N. Robertson, D.P. Sanders, P. Seymour and R. Thomas, 1997(平成 9 年))

すべての地図は国境に接する国が異る色になるように，四つの色だけを使って塗り分けることができる．ただし，1 点だけで接している国については同色で塗ってもよいこととする．また，どの国も飛び地を持たないものとする．

Wikipedia: Four color theorem
の項目から引用

四色定理

定理. (K. Appel and W. Haken, 1976(昭和 51) / N. Robertson, D.P. Sanders, P. Seymour and R. Thomas, 1997(平成 9 年))
すべての地図は国境に接する国が異る色になるように，四つの色だけを使って塗り分けることができる．ただし，1 点だけで接している国については同色で塗ってもよいこととする．また，どの国も飛び地を持たないものとする．



Wikipedia: Four color theorem
の項目から引用

四色定理

定理. (K. Appel and W. Haken, 1976(昭和 51) / N. Robertson, D.P. Sanders, P. Seymour and R. Thomas, 1997(平成 9 年))

すべての地図は国境に接する国が異る色になるように，四つの色だけを使って塗り分けることができる．ただし，1 点だけで接している国については同色で塗ってもよいこととする．また，どの国も飛び地を持たないものとする．

定理. (四色定理のグラフによる定式化, K. Appel and W. Haken, 1976(昭和 51) / N. Robertson, D.P. Sanders, P. Seymour and R. Thomas, 1997(平成 9 年))

すべての平面グラフの頂点は，四つの色だけを使って，すべての辺でつながった異る頂点が別の色になるように塗り分けることができる．

五色定理

- 以下では，四色定理を少し弱めた次の定理の証明を見てみることにする．

定理. (A. Kempe, P. Heawood, 1890(明治 23))
すべての地図は国境に接する国が異る色になるように，五つの色だけを使って塗り分けることができる．ただし，1 点だけで接している国については同色で塗ってもよいこととする．また，どの国も飛び地を持たないものとする．

定理. (A. Kempe, P. Heawood, 1890(明治 23) — 上の定理のグラフによる定式化)
すべての平面グラフの頂点は，五つの色だけを使って 辺でつながった異る頂点が常に別の色になるように塗り分けることができる．

五色定理

- 以下では，四色定理を少し弱めた次の定理の証明を見てみることにする．

定理． (A. Kempe, P. Heawood, 1890(明治 23))
すべての地図は国境に接する国が異る色になるように，五つの色だけを使って塗り分けることができる．ただし，1 点だけで接している国については同色で塗ってもよいこととする．また，どの国も飛び地を持たないものとする．

定理． (A. Kempe, P. Heawood, 1890(明治 23) — 上の定理のグラフによる定式化)
すべての平面グラフの頂点は，五つの色だけを使って 辺でつながった異る頂点が常に別の色になるように塗り分けることができる．

五色定理

- 以下では，四色定理を少し弱めた次の定理の証明を見てみることにする．

定理． (A. Kempe, P. Heawood, 1890(明治 23))
すべての地図は国境に接する国が異る色になるように，五つの色だけを使って塗り分けることができる．ただし，1 点だけで接している国については同色で塗ってもよいこととする．また，どの国も飛び地を持たないものとする．

定理． (A. Kempe, P. Heawood, 1890(明治 23) — 上の定理のグラフによる定式化)
すべての平面グラフの頂点は，五つの色だけを使って 辺でつながった異る頂点が常に別の色になるように塗り分けることができる．

五色定理 (2)

- 五色定理の証明には，Kempe による次の補題を用いる:

補題. (A.,Kempe, 1879) すべての平面グラフは次数が 5 以下の頂点を少なくとも 1 つは持つ.

五色定理の上の補題からの証明. 平面グラフの頂点の数に関する帰納法で証明する.

- 頂点の数が 5 以下の平面グラフに対しては定理は明らかに成り立つ.
- $k > 5$ として，すべての，頂点の数が k 未満の平面グラフに対しては定理が成り立つと仮定する．つまり，そのような平面グラフの頂点は常に 5 つの色で塗り分けられるとする．G を頂点を k 個持つグラフとする．このとき G の頂点が 5 つの色で色分けできることを示せばよい．補題から，次数が 5 以下の頂点 v がとれる．したがって，次の 2 つの場合を考えればよい: v の次数が 5 より真に小さい場合，v の次数が 5 の場合.

五色定理 (2)

- 五色定理の証明には，Kempe による次の補題を用いる:

補題. (A.,Kempe, 1879) すべての平面グラフは次数が 5 以下の頂点を少なくとも 1 つは持つ.

五色定理の上の補題からの証明. 平面グラフの頂点の数に関する帰納法で証明する.

- 頂点の数が 5 以下の平面グラフに対しては定理は明らかに成り立つ.
- $k > 5$ として，すべての，頂点の数が k 未満の平面グラフに対しては定理が成り立つと仮定する．つまり，そのような平面グラフの頂点は常に 5 つの色で塗り分けられるとする．G を頂点を k 個持つグラフとする．このとき G の頂点が 5 つの色で色分けできることを示せばよい．補題から，次数が 5 以下の頂点 v がとれる．したがって，次の 2 つの場合を考えればよい: v の次数が 5 より真に小さい場合，v の次数が 5 の場合.

五色定理 (2)

- 五色定理の証明には，Kempe による次の補題を用いる:

補題. (A.,Kempe, 1879) すべての平面グラフは次数が 5 以下の頂点を少なくとも 1 つは持つ.

五色定理の上の補題からの証明. 平面グラフの頂点の数に関する帰納法で証明する.

- 頂点の数が 5 以下の平面グラフに対しては定理は明らかに成り立つ.
- $k > 5$ として，すべての，頂点の数が k 未満の平面グラフに対しては定理が成り立つと仮定する．つまり，そのような平面グラフの頂点は常に 5 つの色で塗り分けられるとする．G を頂点を k 個持つグラフとする．このとき G の頂点が 5 つの色で色分けできることを示せばよい．補題から，次数が 5 以下の頂点 v がとれる．したがって，次の 2 つの場合を考えればよい: v の次数が 5 より真に小さい場合，v の次数が 5 の場合.

五色定理 (2)

- 五色定理の証明には，Kempe による次の補題を用いる:

補題. (A.,Kempe, 1879) すべての平面グラフは次数が 5 以下の頂点を少なくとも 1 つは持つ.

五色定理の上の補題からの証明. 平面グラフの頂点の数に関する帰納法で証明する.

- 頂点の数が 5 以下の平面グラフに対しては定理は明らかに成り立つ.
- $k > 5$ として，すべての，頂点の数が k 未満の平面グラフに対しては定理が成り立つと仮定する．つまり，そのような平面グラフの頂点は常に 5 つの色で塗り分けられるとする．G を頂点を k 個持つグラフとする．このとき G の頂点が 5 つの色で色分けできることを示せばよい．補題から，次数が 5 以下の頂点 v がとれる．したがって，次の 2 つの場合を考えればよい: v の次数が 5 より真に小さい場合，v の次数が 5 の場合.

五色定理 (2)

- 五色定理の証明には，Kempe による次の補題を用いる:

補題. (A.,Kempe, 1879) すべての平面グラフは次数が 5 以下の頂点を少なくとも 1 つは持つ．

五色定理の上の補題からの証明. 平面グラフの頂点の数に関する帰納法で証明する．

- 頂点の数が 5 以下の平面グラフに対しては定理は明らかに成り立つ．
- $k > 5$ として，すべての，頂点の数が k 未満の平面グラフに対しては定理が成り立つと仮定する．つまり，そのような平面グラフの頂点は常に 5 つの色で塗り分けられるとする．G を頂点を k 個持つグラフとする．このとき G の頂点が 5 つの色で色分けできることを示せばよい．補題から，次数が 5 以下の頂点 v がとれる．したがって，次の 2 つの場合を考えればよい: v の次数が 5 より真に小さい場合，v の次数が 5 の場合．

五色定理 (2)

- 五色定理の証明には，Kempe による次の補題を用いる:

補題. (A.,Kempe, 1879) すべての平面グラフは次数が 5 以下の頂点を少なくとも 1 つは持つ.

五色定理の上の補題からの証明. 平面グラフの頂点の数に関する帰納法で証明する.

- 頂点の数が 5 以下の平面グラフに対しては定理は明らかに成り立つ.
- $k > 5$ として，すべての，頂点の数が k 未満の平面グラフに対しては定理が成り立つと仮定する．つまり，そのような平面グラフの頂点は常に 5 つの色で塗り分けられるとする．G を頂点を k 個持つグラフとする．このとき G の頂点が 5 つの色で色分けできることを示せばよい．補題から，次数が 5 以下の頂点 v がとれる．したがって，次の 2 つの場合を考えればよい: v の次数が 5 より真に小さい場合，v の次数が 5 の場合.

五色定理 (2)

- 五色定理の証明には，Kempe による次の補題を用いる:

補題. (A.,Kempe, 1879) すべての平面グラフは次数が 5 以下の頂点を少なくとも 1 つは持つ.

五色定理の上の補題からの証明. 平面グラフの頂点の数に関する帰納法で証明する.

- 頂点の数が 5 以下の平面グラフに対しては定理は明らかに成り立つ.
- $k > 5$ として，すべての，頂点の数が k 未満の平面グラフに対しては定理が成り立つと仮定する．つまり，そのような平面グラフの頂点は常に 5 つの色で塗り分けられるとする．G を頂点を k 個持つグラフとする．このとき G の頂点が 5 つの色で色分けできることを示せばよい．補題から，次数が 5 以下の頂点 v がとれる．したがって，次の 2 つの場合を考えればよい: v の次数が 5 より真に小さい場合，v の次数が 5 の場合.

五色定理 (2)

- 五色定理の証明には，Kempe による次の補題を用いる:

補題. (A.,Kempe, 1879) すべての平面グラフは次数が 5 以下の頂点を少なくとも 1 つは持つ.

五色定理の上の補題からの証明. 平面グラフの頂点の数に関する帰納法で証明する.

- 頂点の数が 5 以下の平面グラフに対しては定理は明らかに成り立つ.
- $k > 5$ として，すべての，頂点の数が k 未満の平面グラフに対しては定理が成り立つと仮定する．つまり，そのような平面グラフの頂点は常に 5 つの色で塗り分けられるとする．G を頂点を k 個持つグラフとする．このとき G の頂点が 5 つの色で色分けできることを示せばよい．補題から，次数が 5 以下の頂点 v がとれる．したがって，次の 2 つの場合を考えればよい: v の次数が 5 より真に小さい場合，v の次数が 5 の場合.

五色定理 (2)

- 五色定理の証明には，Kempe による次の補題を用いる:

補題. (A.,Kempe, 1879) すべての平面グラフは次数が 5 以下の頂点を少なくとも 1 つは持つ.

五色定理の上の補題からの証明. 平面グラフの頂点の数に関する帰納法で証明する.

- 頂点の数が 5 以下の平面グラフに対しては定理は明らかに成り立つ.
- $k > 5$ として，すべての，頂点の数が k 未満の平面グラフに対しては定理が成り立つと仮定する．つまり，そのような平面グラフの頂点は常に 5 つの色で塗り分けられるとする．G を頂点を k 個持つグラフとする．このとき G の頂点が 5 つの色で色分けできることを示せばよい．補題から，次数が 5 以下の頂点 v がとれる．したがって，次の 2 つの場合を考えればよい: v の次数が 5 より真に小さい場合，v の次数が 5 の場合.

五色定理 (2)

- 五色定理の証明には，Kempe による次の補題を用いる:

補題. (A.,Kempe, 1879) すべての平面グラフは次数が 5 以下の頂点を少なくとも 1 つは持つ.

五色定理の上の補題からの証明. 平面グラフの頂点の数に関する帰納法で証明する.

- 頂点の数が 5 以下の平面グラフに対しては定理は明らかに成り立つ.
- $k > 5$ として，すべての，頂点の数が k 未満の平面グラフに対しては定理が成り立つと仮定する．つまり，そのような平面グラフの頂点は常に 5 つの色で塗り分けられるとする．G を頂点を k 個持つグラフとする．このとき G の頂点が 5 つの色で色分けできることを示せばよい．補題から，次数が 5 以下の頂点 v がとれる．したがって，次の 2 つの場合を考えればよい: v の次数が 5 より真に小さい場合，v の次数が 5 の場合.

五色定理 (2)

- 五色定理の証明には，Kempe による次の補題を用いる:

補題. (A.,Kempe, 1879) すべての平面グラフは次数が 5 以下の頂点を少なくとも 1 つは持つ.

五色定理の上の補題からの証明. 平面グラフの頂点の数に関する帰納法で証明する.

- 頂点の数が 5 以下の平面グラフに対しては定理は明らかに成り立つ.
- $k > 5$ として，すべての，頂点の数が k 未満の平面グラフに対しては定理が成り立つと仮定する．つまり，そのような平面グラフの頂点は常に 5 つの色で塗り分けられるとする．G を頂点を k 個持つグラフとする．このとき G の頂点が 5 つの色で色分けできることを示せばよい．補題から，次数が 5 以下の頂点 v がとれる．したがって，次の 2 つの場合を考えればよい: v の次数が 5 より真に小さい場合，v の次数が 5 の場合.

五色定理 (2)

- 五色定理の証明には，Kempe による次の補題を用いる:

補題. (A.,Kempe, 1879) すべての平面グラフは次数が 5 以下の頂点を少なくとも 1 つは持つ.

五色定理の上の補題からの証明. 平面グラフの頂点の数に関する帰納法で証明する.

- 頂点の数が 5 以下の平面グラフに対しては定理は明らかに成り立つ.
- $k > 5$ として，すべての，頂点の数が k 未満の平面グラフに対しては定理が成り立つと仮定する．つまり，そのような平面グラフの頂点は常に 5 つの色で塗り分けられるとする．G を頂点を k 個持つグラフとする．このとき G の頂点が 5 つの色で色分けできることを示せばよい．補題から，次数が 5 以下の頂点 v がとれる．したがって，次の 2 つの場合を考えればよい: v の次数が 5 より真に小さい場合，v の次数が 5 の場合.

五色定理 (2)

- 五色定理の証明には，Kempe による次の補題を用いる:

補題. (A.,Kempe, 1879) すべての平面グラフは次数が 5 以下の頂点を少なくとも 1 つは持つ．

五色定理の上の補題からの証明. 平面グラフの頂点の数に関する帰納法で証明する．

- 頂点の数が 5 以下の平面グラフに対しては定理は明らかに成り立つ．
- $k > 5$ として，すべての，頂点の数が k 未満の平面グラフに対しては定理が成り立つと仮定する．つまり，そのような平面グラフの頂点は常に 5 つの色で塗り分けられるとする．G を頂点を k 個持つグラフとする．このとき G の頂点が 5 つの色で色分けできることを示せばよい．補題から，次数が 5 以下の頂点 v がとれる．したがって，次の 2 つの場合を考えればよい: v の次数が 5 より真に小さい場合，v の次数が 5 の場合．

五色定理 (3)

▷ v の次数が 5 より真に小さい場合:

v と v に繋がっている辺のすべてを除いて得られるグラフ G' を考えると G' の辺の数は k より小さいから，帰納法の仮定により，5 色による G' の頂点の塗り分けができる．

G で v に繋がっている頂点は 5 未満だから，5 色のうちこれらの頂点に使っていない色が少なくとも 1 つはある．v をこの色で塗れば，G' の塗り分けと合せて G の塗り分けが得られる．

五色定理 (3)

▷ v の次数が 5 より真に小さい場合:

v と v に繋がっている辺のすべてを除いて得られるグラフ G' を考えると G' の辺の数は k より小さいから，帰納法の仮定により，5 色による G' の頂点の塗り分けができる．

G で v に繋がっている頂点は 5 未満だから，5 色のうちこれらの頂点に使っていない色が少なくとも 1 つはある．v をこの色で塗れば，G' の塗り分けと合せて G の塗り分けが得られる．

五色定理 (3)

▷ v の次数が 5 より真に小さい場合:

v と v に繋がっている辺のすべてを除いて得られるグラフ G' を考えると G' の辺の数は k より小さいから，帰納法の仮定により，5 色による G' の頂点の塗り分けができる．

G で v に繋がっている頂点は 5 未満だから，5 色のうちこれらの頂点に使っていない色が少なくとも 1 つはある．v をこの色で塗れば，G' の塗り分けと合せて G の塗り分けが得られる．

五色定理 (3)

▷ v の次数が 5 より真に小さい場合:

v と v に繋がっている辺のすべてを除いて得られるグラフ G' を考えると G' の辺の数は k より小さいから，帰納法の仮定により，5 色による G' の頂点の塗り分けができる．

G で v に繋がっている頂点は 5 未満だから，5 色のうちこれらの頂点に使っていない色が少なくとも 1 つはある．v をこの色で塗れば，G' の塗り分けと合せて G の塗り分けが得られる．

五色定理 (3)

▷ v の次数が 5 の場合:

v に辺で繋がっている頂点を $v_1, \ldots, v_5$ とすると，K_5 は G の部分グラフではありえないのだったから，これらのうちの 2 つで 1 つの辺で繋がっていないものが存在する．たとえば，v_1 と v_2 がそのようなものだとして，v_1 と v_2 と v を 1 つの頂点 $\tilde{v}$ としてまとめて得られるグラフを $G^\dagger$ とする．

$G^\dagger$ は頂点の数が k より小さいから，$G^\dagger$ の 5 色による塗り分けが存在する．

この塗り分けで，$\tilde{v}$ に塗られている色を c_0 として，$\tilde{v}$, v_3, v_4, v_5 を塗るのに使われていない色を c_1 とする．ここで，G の頂点の彩色を v は c_1, v_1 と v_2 は c_0, 他の頂点は $G^\dagger$ でと同じ，とすれば，これは求めているような塗り分けになっている．

□

五色定理 (3)

▷ v の次数が 5 の場合:

v に辺で繋がっている頂点を $v_1, \ldots, v_5$ とすると，K_5 は G の部分グラフではありえないのだったから，これらのうちの 2 つで 1 つの辺で繋がっていないものが存在する．たとえば，v_1 と v_2 がそのようなものだとして，v_1 と v_2 と v を 1 つの頂点 $\tilde{v}$ としてまとめて得られるグラフを $G^\dagger$ とする．

$G^\dagger$ は頂点の数が k より小さいから，$G^\dagger$ の 5 色による塗り分けが存在する．

この塗り分けで，$\tilde{v}$ に塗られている色を c_0 として，$\tilde{v}$, v_3, v_4, v_5 を塗るのに使われていない色を c_1 とする．ここで，G の頂点の彩色を v は c_1, v_1 と v_2 は c_0, 他の頂点は $G^\dagger$ でと同じ，とすれば，これは求めているような塗り分けになっている．

□

五色定理 (3)

▷ v の次数が **5** の場合:

v に辺で繋がっている頂点を $v_1,\dots,v_5$ とすると，K_5 は G の部分グラフではありえないのだったから，これらのうちの 2 つで 1 つの辺で繋がっていないものが存在する．たとえば，v_1 と v_2 がそのようなものだとして，v_1 と v_2 と v を 1 つの頂点 $\tilde{v}$ としてまとめて得られるグラフを $G^\dagger$ とする．

$G^\dagger$ は頂点の数が k より小さいから，$G^\dagger$ の 5 色による塗り分けが存在する．

この塗り分けで，$\tilde{v}$ に塗られている色を c_0 として，$\tilde{v}$, v_3, v_4, v_5 を塗るのに使われていない色を c_1 とする．ここで，G の頂点の彩色を v は c_1, v_1 と v_2 は c_0, 他の頂点は $G^\dagger$ でと同じ，とすれば，これは求めているような塗り分けになっている．

□

五色定理 (3)

▷ v の次数が 5 の場合:

v に辺で繋がっている頂点を $v_1, \ldots, v_5$ とすると，K_5 は G の部分グラフではありえないのだったから，これらのうちの 2 つで 1 つの辺で繋がっていないものが存在する．たとえば，v_1 と v_2 がそのようなものだとして，v_1 と v_2 と v を 1 つの頂点 $\tilde{v}$ としてまとめて得られるグラフを $G^\dagger$ とする．

$G^\dagger$ は頂点の数が k より小さいから，$G^\dagger$ の 5 色による塗り分けが存在する．

この塗り分けで，$\tilde{v}$ に塗られている色を c_0 として，$\tilde{v}$, v_3, v_4, v_5 を塗るのに使われていない色を c_1 とする．ここで，G の頂点の彩色を v は c_1, v_1 と v_2 は c_0, 他の頂点は $G^\dagger$ でと同じ，とすれば，これは求めているような塗り分けになっている．

□

五色定理 (3)

▷ v の次数が 5 の場合:

v に辺で繋がっている頂点を $v_1, \ldots, v_5$ とすると，K_5 は G の部分グラフではありえないのだったから，これらのうちの 2 つで 1 つの辺で繋がっていないものが存在する．たとえば，v_1 と v_2 がそのようなものだとして，v_1 と v_2 と v を 1 つの頂点 $\tilde{v}$ としてまとめて得られるグラフを $G^\dagger$ とする．

$G^\dagger$ は頂点の数が k より小さいから，$G^\dagger$ の 5 色による塗り分けが存在する．

この塗り分けで，$\tilde{v}$ に塗られている色を c_0 として，$\tilde{v}$, v_3, v_4, v_5 を塗るのに使われていない色を c_1 とする．ここで，G の頂点の彩色を v は c_1, v_1 と v_2 は c_0, 他の頂点は $G^\dagger$ でと同じ，とすれば，これは求めているような塗り分けになっている．

□

五色定理 (3)

▷ v の次数が 5 の場合:

v に辺で繋がっている頂点を $v_1, \ldots, v_5$ とすると，K_5 は G の部分グラフではありえないのだったから，これらのうちの 2 つで 1 つの辺で繋がっていないものが存在する．たとえば，v_1 と v_2 がそのようなものだとして，v_1 と v_2 と v を 1 つの頂点 $\tilde{v}$ としてまとめて得られるグラフを $G^\dagger$ とする．

$G^\dagger$ は頂点の数が k より小さいから，$G^\dagger$ の 5 色による塗り分けが存在する．

この塗り分けで，$\tilde{v}$ に塗られている色を c_0 として，$\tilde{v}$, v_3, v_4, v_5 を塗るのに使われていない色を c_1 とする．ここで，G の頂点の彩色を v は c_1, v_1 と v_2 は c_0, 他の頂点は $G^\dagger$ でと同じ，とすれば，これは求めているような塗り分けになっている．

□

五色定理 (3)

▷ v の次数が 5 の場合:

v に辺で繋がっている頂点を $v_1, \ldots, v_5$ とすると，K_5 は G の部分グラフではありえないのだったから，これらのうちの 2 つで 1 つの辺で繋がっていないものが存在する．たとえば，v_1 と v_2 がそのようなものだとして，v_1 と v_2 と v を 1 つの頂点 $\tilde{v}$ としてまとめて得られるグラフを $G^\dagger$ とする．

$G^\dagger$ は頂点の数が k より小さいから，$G^\dagger$ の 5 色による塗り分けが存在する．

この塗り分けで，$\tilde{v}$ に塗られている色を c_0 として，$\tilde{v}$, v_3, v_4, v_5 を塗るのに使われていない色を c_1 とする．ここで，G の頂点の彩色を v は c_1, v_1 と v_2 は c_0, 他の頂点は $G^\dagger$ でと同じ，とすれば，これは求めているような塗り分けになっている．

□

Kempe の補題

補題. (A.,Kempe, 1879) すべての平面グラフは次数が 5 以下の頂点を少なくとも 1 つは持つ.

- この補題で '5' は最良の値になっている:

Kempe の補題

補題. (A.,Kempe, 1879) すべての平面グラフは次数が 5 以下の頂点を少なくとも 1 つは持つ.

- この補題で '5' は最良の値になっている:

Kempe の補題

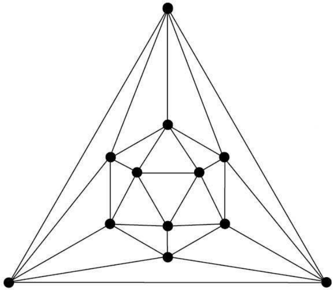
補題. (A.,Kempe, 1879) すべての平面グラフは次数が 5 以下の頂点を少なくとも 1 つは持つ.

- この補題で '5' は最良の値になっている:

Kempe の補題

補題. (A.,Kempe, 1879) すべての平面グラフは次数が 5 以下の頂点を少なくとも 1 つは持つ.

- この補題で '5' は最良の値になっている:



G. Brinkmann and Brendan D. McKay, "Construction of planar triangulations with minimum degree 5" から

Kempe の補題の証明

補題. (A.,Kempe, 1879) すべての平面グラフは次数が 5 以下の頂点を少なくとも 1 つは持つ.

証明.

- F を平面グラフ G の面の全体の集合とする．各 $y \in F$ に対し，m_y で y を囲む辺の数をあらわすことにすると，$\sum_{y \in F} m_y = 2e$ となる (これは第 7 回目の講義で見た).
- 各面 $y \in F$ は少なくとも 3 つの辺で囲まれているから，f で面の数をあらわし，e で G の辺の総数をあらわすことにすると，$3f \leq \sum_{y \in F} m_y = 2e$ となる．したがって

$$f \leq \frac{2}{3}e \tag{1}$$

である.

Kempe の補題の証明

補題. (A.,Kempe, 1879) すべての平面グラフは次数が 5 以下の頂点を少なくとも 1 つは持つ.

証明.

- F を平面グラフ G の面の全体の集合とする．各 $y \in F$ に対し，m_y で y を囲む辺の数をあらわすことにすると，$\sum_{y \in F} m_y = 2e$ となる (これは第 7 回目の講義で見た).
- 各面 $y \in F$ は少なくとも 3 つの辺で囲まれているから，f で面の数をあらわし，e で G の辺の総数をあらわすことにすると，$3f \leq \sum_{y \in F} m_y = 2e$ となる．したがって

$$(1) \quad f \leq \frac{2}{3}e$$

である.

Kempe の補題の証明

補題. (A.,Kempe, 1879) すべての平面グラフは次数が 5 以下の頂点を少なくとも 1 つは持つ.

証明.

- F を平面グラフ G の面の全体の集合とする．各 $y \in F$ に対し，m_y で y を囲む辺の数をあらわすことにすると，$\sum_{y \in F} m_y = 2e$ となる (これは第 7 回目の講義で見た).
- 各面 $y \in F$ は少なくとも 3 つの辺で囲まれているから，f で面の数をあらわし，e で G の辺の総数をあらわすことにすると，$3f \leq \sum_{y \in F} m_y = 2e$ となる．したがって

$$(1) \quad f \leq \frac{2}{3}e$$

である.

Kempe の補題の証明 (続き)

(1) $f \leq \frac{2}{3}e$

である.

- V でグラフ G の頂点の全体をあらわし，各 $x \in V$ に対し，d_x で x の次数をあらわすことにする． G が補題の反例になっていたとすると，$d_x \geq 6$ がすべての $x \in X$ に対して成り立つが，d_x, $x \in X$ の和は辺の総数 e の 2 倍になるから v で頂点の総数をあらわすと， $6v \leq \sum_{x \in V} d_x = 2e$ により

(2) $v \leq \frac{1}{3}e$

である.

- (1) と (2) より,

$$v - e + f \leq \frac{1}{3}e - e + \frac{2}{3}e = 0$$

となるが，これはオイラーの公式 $v - e + f = 2$ に矛盾である． □

Kempe の補題の証明 (続き)

(1) $f \leq \frac{2}{3}e$

である．

- V でグラフ G の頂点の全体をあらわし，各 $x \in V$ に対し，d_x で x の次数をあらわすことにする．G が補題の反例になっていたとすると，$d_x \geq 6$ がすべての $x \in X$ に対して成り立つが，d_x, $x \in X$ の和は辺の総数 e の 2 倍になるから v で頂点の総数をあらわすと，$6v \leq \sum_{x \in V} d_x = 2e$ により

(2) $v \leq \frac{1}{3}e$

である．

- (1) と (2) より，

$$v - e + f \leq \frac{1}{3}e - e + \frac{2}{3}e = 0$$

となるが，これはオイラーの公式 $v - e + f = 2$ に矛盾である．□

Kempe の補題の証明 (続き)

(1) $f \leq \frac{2}{3}e$

である．

- V でグラフ G の頂点の全体をあらわし，各 $x \in V$ に対し，d_x で x の次数をあらわすことにする．G が補題の反例になっていたとすると，$d_x \geq 6$ がすべての $x \in X$ に対して成り立つが，d_x, $x \in X$ の和は辺の総数 e の 2 倍になるから v で頂点の総数をあらわすと，$6v \leq \sum_{x \in V} d_x = 2e$ により

(2) $v \leq \frac{1}{3}e$

である．

- (1) と (2) より，

$$v - e + f \leq \frac{1}{3}e - e + \frac{2}{3}e = 0$$

となるが，これはオイラーの公式 $v - e + f = 2$ に矛盾である．□

現代のグラフ理論の研究

▷ グラフ理論は現代でも活発に研究されている数学の研究分野です．私自身は，グラフ理論の専門家ではありませんが，今やっている研究の 1 つは無限グラフに関するものです．

▷ 私は先週休講にして参加した国際学会で，神戸大学での同僚の酒井拓史先生との無限グラフに関する共同研究の結果を発表しました．この学会では Kuratowski の定理の拡張で，2004 年に証明された graph minor theorem とよばれる有名な定理の応用についての連続講演もありました．

現代のグラフ理論の研究

▷ グラフ理論は現代でも活発に研究されている数学の研究分野です．私自身は，グラフ理論の専門家ではありませんが，今やっている研究の 1 つは無限グラフに関するものです．

▷ 私は先週休講にして参加した国際学会で，神戸大学での同僚の酒井拓史先生との無限グラフに関する共同研究の結果を発表しました．この学会では Kuratowski の定理の拡張で，2004 年に証明された graph minor theorem とよばれる有名な定理の応用についての連続講演もありました．

現代のグラフ理論の研究

▷ グラフ理論は現代でも活発に研究されている数学の研究分野です．私自身は，グラフ理論の専門家ではありませんが，今やっている研究の 1 つは無限グラフに関するものです．

▷ 私は先週休講にして参加した国際学会で，神戸大学での同僚の酒井拓史先生との無限グラフに関する共同研究の結果を発表しました．この学会では Kuratowski の定理の拡張で，2004 年に証明された graph minor theorem とよばれる有名な定理の応用についての連続講演もありました．

現代のグラフ理論の研究

▷ グラフ理論は現代でも活発に研究されている数学の研究分野です．私自身は，グラフ理論の専門家ではありませんが，今やっている研究の 1 つは無限グラフに関するものです．

▷ 私は先週休講にして参加した国際学会で，神戸大学での同僚の酒井拓史先生との無限グラフに関する共同研究の結果を発表しました．この学会では Kuratowski の定理の拡張で，2004 年に証明された graph minor theorem とよばれる有名な定理の応用についての連続講演もありました．

現代のグラフ理論の研究

▷ グラフ理論は現代でも活発に研究されている数学の研究分野です．私自身は，グラフ理論の専門家ではありませんが，今やっている研究の 1 つは無限グラフに関するものです．

▷ 私は先週休講にして参加した国際学会で，神戸大学での同僚の酒井拓史先生との無限グラフに関する共同研究の結果を発表しました．この学会では Kuratowski の定理の拡張で，2004 年に証明された graph minor theorem とよばれる有名な定理の応用についての連続講演もありました．

現代のグラフ理論の研究

▷ グラフ理論は現代でも活発に研究されている数学の研究分野です．私自身は，グラフ理論の専門家ではありませんが，今やっている研究の 1 つは無限グラフに関するものです．

▷ 私は先週休講にして参加した国際学会で，神戸大学での同僚の酒井拓史先生との無限グラフに関する共同研究の結果を発表しました．この学会では Kuratowski の定理の拡張で，2004 年に証明された graph minor theorem とよばれる有名な定理の応用についての連続講演もありました．

Asian Logic Conference 2011 での Martin Grohe 教授による連続講演