# グラフの彩色について

酒井 拓史

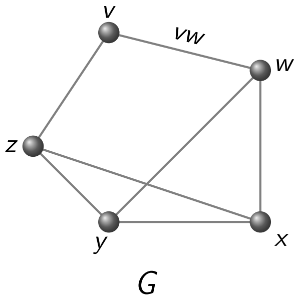
システム情報学研究科

情報基礎特論

# 1．グラフの基本事項

# グラフの基本事項

- グラフ ⋯ 頂点（vertex）と辺（edge）からなる構造.
- $V(G) =$ グラフ $G$ の頂点全体の集合.
- $E(G) =$ グラフ $G$ の辺全体の集合.
- 隣接点 ⋯ 一本の辺で繋がった 2 点.



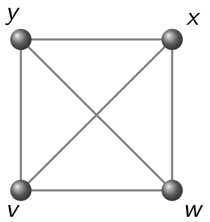

$$V(G) = \{v, w, x, y, z\}$$

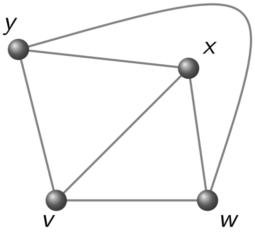
$$E(G) = \{vw, wx, xy, yz, zw, wy, xz\}$$

グラフ $G$ は頂点集合 $V(G)$ と辺集合 $E(G)$ 以外の情報は無視する.

つまり,
「頂点集合は何か」と「どの頂点が辺で結ばれているか」のみに注目し,
具体的な "形" の差異は無視する.

**例：** 次の二つのグラフは同じ.

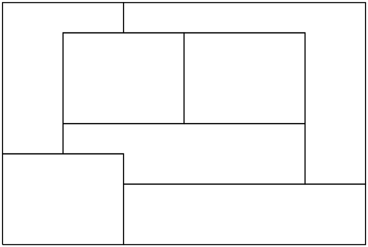


# 2．グラフの頂点彩色

# 四色問題

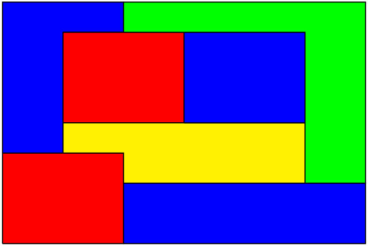
ブロック分けされた平面を塗り分ける.（隣接するブロックは異なる色で塗る.）



何色あれば塗り分けられるか？

# 四色問題

ブロック分けされた平面を塗り分ける.（隣接するブロックは異なる色で塗る.）

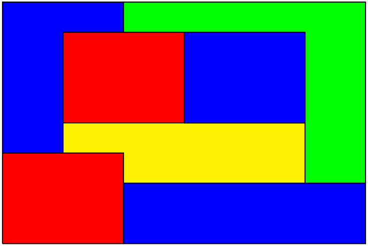


何色あれば塗り分けられるか？

- 上図は 3 色では塗り分けられない.
- 上図は 4 色あれば塗り分けられる.

# 四色問題

ブロック分けされた平面を塗り分ける．(隣接するブロックは異なる色で塗る．)



何色あれば塗り分けられるか？

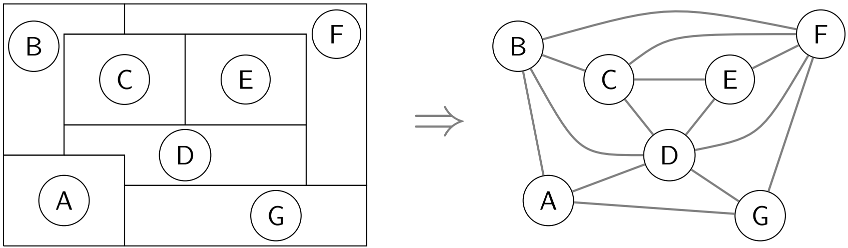
- 上図は 3 色では塗り分けられない．
- 上図は 4 色あれば塗り分けられる．

**四色問題 (Guthrie 1852)**

どのようにブロック分けされた平面も，4 色で塗り分けることができるか？

# 平面のブロック分けからグラフへ

ブロックを頂点とみなし，隣接するブロックを辺で結ぶ：




"平面のブロックの塗り分け"　⇒　"グラフの頂点の塗り分け"

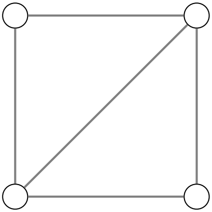
- グラフの頂点の塗り分けでは，隣接する頂点は異なる色で塗る．

# 頂点彩色と染色数

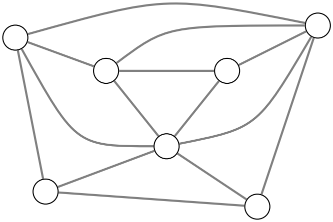
- グラフの頂点彩色
  … 隣接する頂点の色が異なるように，各頂点を着色する．
- グラフ $G$ に対し，

$$\chi(G) \; := \; G \text{ の頂点彩色に必要な最低色数} .$$

$\chi(G)$ を $G$ の染色数（chromatic number）と呼ぶ．



染色数 ＝ ?



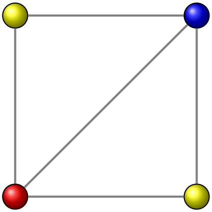
染色数 ＝ ?

# 頂点彩色と染色数

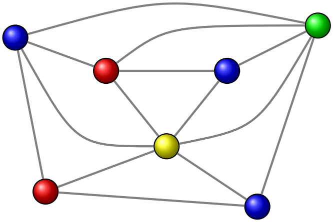
- グラフの頂点彩色
  ··· 隣接する頂点の色が異なるように，各頂点を着色する．
- グラフ $G$ に対し，

$$\chi(G) \ := \ G \text{ の頂点彩色に必要な最低色数} .$$

$\chi(G)$ を $G$ の染色数（chromatic number）と呼ぶ．



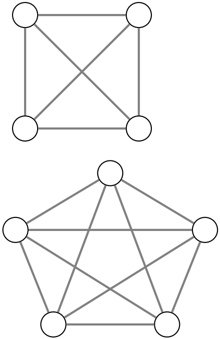
染色数 $= 3$



染色数 $= 4$

# グラフの平面性

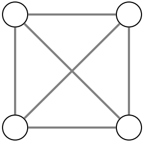
- 平面的グラフ
  … 辺を交差させること無く，平面上に描画できるグラフ.



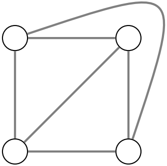
- 平面のブロック分けから得られるグラフは平面的.

# グラフの平面性

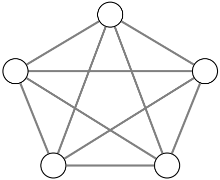
- 平面的グラフ
  … 辺を交差させること無く，平面上に描画できるグラフ.



$\Rightarrow$



平面的



$\Rightarrow$

平面的ではない

- 平面のブロック分けから得られるグラフは平面的.

# 四色問題の肯定的解決

**定理 (Appel - Haken 1977)**

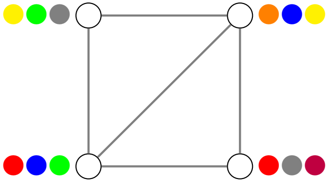
すべての平面的グラフは 4 色で頂点彩色可能.

よって，どのようにブロック分けされた平面も，4 色で塗り分けることができる.

この定理の証明ではコンピューターによる “シラミつぶし” が用いられており，コンピューターを用いない証明は現在も知られていない.

# リスト頂点彩色と選択数

- $k$-リスト $\cdots$ グラフの各頂点に $k$ 色の色のリストを対応させること．



3-リスト

- $k$-選択可能
  $\cdots$ どのような $k$-リストに対しても，各頂点で 1 つずつ色を選び，頂点彩色ができる．

- $k$-選択可能 $\Rightarrow$ $k$ 色で頂点彩色可能

- グラフ $G$ に対して,

$$\mathrm{ch}(G) \ := \ G \text{ が } k\text{-選択可能である最小の } k\ .$$

ch($G$) を $G$ の選択数（choosability）やリスト染色数（list-chromatic number）と呼ぶ.

- $\chi(G) \le \mathrm{ch}(G)$.

**問題**

すべての平面的グラフは 4-選択可能か？

### 定理 (Voigt 1993)

平面的グラフで，4-選択可能でないものが存在する．

Voigt が与えた 4-選択可能でない平面的グラフは，130 個の頂点からなる．

一方で次が成立する：

### 定理 (Thomassen 1994)

任意の平面的グラフは 5-選択可能．

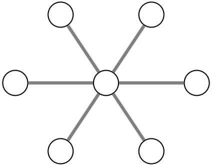
# 3．グラフの辺彩色

# グラフの辺彩色

- グラフの辺彩色
  $\cdots$ 同じ頂点に接続する辺の色が異なるように，各辺を着色する．
- グラフ $G$ に対し，

$$\chi'(G) \;:=\; \text{辺彩色に必要な最低色数}\,.$$

$\chi'(G)$ を $G$ の辺染色数（edge-chromatic number）と呼ぶ．



5 色で辺彩色不可能

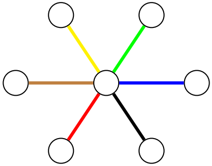
- 任意の自然数 $n$ に対して，$n$ 色で辺彩色できない平面的グラフがある．

# グラフの辺彩色

- グラフの辺彩色
  ··· 同じ頂点に接続する辺の色が異なるように，各辺を着色する．
- グラフ $G$ に対し，

$$\chi'(G) \ := \ \text{辺彩色に必要な最低色数}\ .$$

$\chi'(G)$ を $G$ の辺染色数（edge-chromatic number）と呼ぶ．

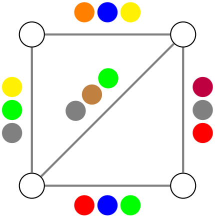


6 色で辺彩色可能

- 任意の自然数 $n$ に対して，$n$ 色で辺彩色できない平面的グラフがある．

# リスト辺彩色

- 辺の $k$-リスト ⋯ グラフの各辺に $k$ 色の色のリストを対応させること．



辺の 3-リスト

- $k$-辺選択可能
  ⋯ 辺のどのような $k$-リストに対しても，各辺で 1 つずつ色を選び，
  辺彩色ができる．

- $k$-辺選択可能 $\Rightarrow$ $k$ 色で辺彩色可能

- グラフ $G$ に対して,

$$\mathrm{ch}'(G) \ := \ G \text{ が } k\text{-辺選択可能である最小の } k\,.$$

$\mathrm{ch}'(G)$ を $G$ の辺選択数（edge-choosability）やリスト辺染色数（list-edge-chromatic number）と呼ぶ.

- $\chi'(G) \le \mathrm{ch}'(G)$.

実は，辺染色数と辺選択数が異なるグラフは見つかっていない.

**予想 (未解決)**

任意のグラフ $G$ に対して，$\chi'(G) = \mathrm{ch}'(G)$ であろう.

部分的解答：

**定理 (Galvin 1995)**

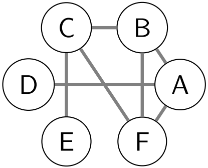
二部グラフ $G$ に対しては，$\chi'(G) = \mathrm{ch}'(G)$.

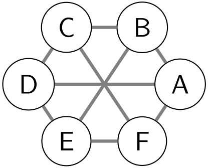
# 4．Ramsey の定理

# 6 人寄れば . . .

## 事実

6 人の集まりの中には，互いに知り合いの 3 人組か，互いに知り合いではない 3 人組が，必ず存在する．

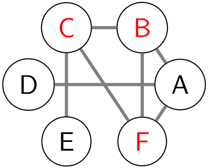


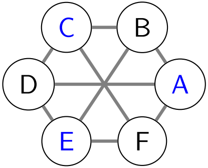
# 6 人寄れば . . .

## 事実

6 人の集まりの中には，互いに知り合いの 3 人組か，互いに知り合いではない 3 人組が，必ず存在する．



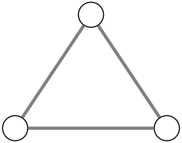

B,C,F は互いに知り合い．



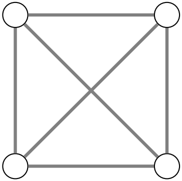

A,C,E は互いに知り合いではない．

# 完全グラフの辺の着色

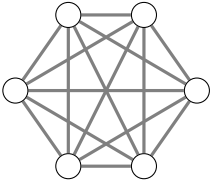
- 完全グラフ ··· すべての 2 頂点が辺で結ばれたグラフ.
- $K_n$ := 頂点数が $n$ の完全グラフ.



$K_3$



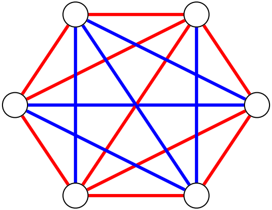
$K_4$



$K_6$

$K_6$ の各辺を赤か青のいずれかで着色し，以下のようにみなす：

頂点 $\cdots$ 人，　赤い辺 $\cdots$ 知り合い，　青い辺 $\cdots$ 知り合いでない.



6 人の集まりに関する事実は，以下のように言い換えられる：

**定理**

$K_6$ の各辺を赤と青の 2 色でどのように着色しても，赤い辺からなる $K_3$ か，青い辺からなる $K_3$ を，部分グラフとして必ず含む.

# Ramsey の定理

Ramsey の定理は前定理を一般化した次の定理：

**定理 (Ramsey 1930)**

$c$ と $m$ を任意の自然数とする．このとき次を満たす自然数 $n$ が存在する：

$K_n$ の各辺を $c$ 色でどのように着色しても，同じ色の辺からなる $K_m$ を部分グラフとして必ず含む．

Ramsey の定理を更に一般化し応用する理論は Ramsey 理論と呼ばれ，現在も盛んに研究されている．

# 参考文献


- 『グラフ理論』，R. Diestel 著，根上生也／太田克弘 訳，Springer Verlag.