有限から無限への移行原理としての命題論理

Sakaé Fuchino **(渕野 昌)**

Dept. of Computer Sciences
Kobe University
(神戸大学大学院 システム情報学研究科)

http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/

(June 11, 2012 (21:07 JST) version)

2012 年前期 情報基礎特論での講義

June 11, 2012

This presentation is typeset by pLaTeX with beamer class.

命題論理

- PropVar を記号の集合とする．PropVar は何でもよいが，その要素は，その真偽の議論できる何らかの命題である，というのが想定されている解釈である．PropVar の要素のことを **命題変数** (propositional variables) とよぶことにする．
- (PropVar 上の命題論理の) **論理式** (formulas (of propositional logic)) を再帰的に次のように定義する:
  - PropVar の要素は論理式である．
  - φ, ψ が論理式のとき，$(\varphi \land \psi)$, $(\varphi \lor \psi)$, $(\varphi \to \psi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$, $\neg\psi$ も論理式である．
- $\mathrm{PropVar} = \{A_1, A_2, A_3, \dots\}$ のとき，$\neg A_1$ や $(((A_1 \land A_2) \lor A_3) \to A_3)$ は論理式である．
- $A_1 \lor A_2 \lor A_3$ は上の定義では論理式ではないが，以下では可読性のために，この表現を $(A_1 \lor (A_2 \lor A_3))$ の略記として使うことがある．

論理式の解釈

- 上の定義では論理式はある性質を持つ記号列にすぎない.
- φ が論理式で, φ に含まれる命題変数はすべて $A_1, \ldots, A_n$ の中に含まれるとき, このことを $\varphi = \varphi(A_1, \ldots, A_n)$ とあらわすことにする.
- $\mathbb{2} = \{0, 1\}$ とする. 1, 0 はそれぞれ '真' (true), '偽' (false) をあらわしていると考える.
- $\mathbb{2}^n$ で $\mathbb{2}$ の要素 (つまり 0 か 1) の n-組の全体をあらわす.
- $\varphi = \varphi(A_1, \ldots, A_n)$ を論理式とするとき, $\varphi(A_1, \ldots, A_n)$ **のブール関数への解釈** (Boolean interpretation of the formula φ)

  $$f_{\varphi(A_1,\ldots,A_n)} : \mathbb{2}^n \to \mathbb{2}$$

  を次のように再帰的に定義する:

論理式の解釈 (2)

$x_1, \dots, x_n \in \mathbb{2}$ に対し，

- φ が A_i のときには，$f_{\varphi(A_1,\dots,A_n)}(x_1,\dots,x_n) = x_i$ とする．
- φ が $(\psi \wedge \eta)$ のときは，

$$f_{\varphi(A_1,\dots,A_n)}(x_1,\dots,x_n) = \begin{cases} 1, & f_{\psi(A_1,\dots,A_n)}(x_1,\dots,x_n) = 1 \text{ かつ} \\ & f_{\eta(A_1,\dots,A_n)}(x_1,\dots,x_n) = 1 \text{ のとき} \\ 0, & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

とする．

$\vdots$

- φ が $\neg\psi$ のときには，

$$f_{\varphi(A_1,\dots,A_n)}(x_1,\dots,x_n) = \begin{cases} 1, & f_{\psi(A_1,\dots,A_n)}(x_1,\dots,x_n) = 0 \text{ のとき} \\ 0, & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

とする．

論理式の解釈 (3)

- $I : \mathrm{PropVar} \to \mathbb{2}$ を **命題変数の解釈** (interpretation of propositonal variables) とよぶことにする．命題変数の解釈は，各命題変数に真偽値 1 (真) 0 (偽) を割り振る関数である．
- I を命題変数の解釈として，$\varphi = \varphi(A_1, \ldots, A_n)$ を論理式とするとき，

$$I \models \varphi \quad :\Leftrightarrow \quad f_{\varphi(A_1,\ldots,A_n)}(I(A_1), \ldots, I(A_n)) = 1$$

とする．“$I \models \varphi$” は「**φ が I で成り立つ**」あるいは,「**I は φ のモデルである**」と読みくだすことにする．
- T を論理式の集合とする．このような T は (命題論理での) **理論** (theory) ともよばれる．このとき，$I \models T \ :\Leftrightarrow$ すべての $\varphi \in T$ に対し，$I \models \varphi$ とする．
- T が **充足可能** (じゅうそくかのう) とは，$I \models T$ となるような命題変数の解釈 I が存在することとする．
- 与えられた命題論理の論理式 φ に対し $\{\varphi\}$ が充足可能かどうかを判定する問題は，NP complete である．

理論の例

- T を論理式の集合とする．このような T は (命題論理での) **理論** (theory) ともよばれる．
- X を任意の集合とするとき，$\mathrm{PropVar} = \{R_{x,y} : x, y \in X, x \neq y\}$ として，この PropVar 上の理論 $T_{LO,X}$ を
$$T_{LO,X} = \{(R_{x,y} \vee R_{y,x}), (R_{x,y} \to \neg R_{y,x}) : x, y \in X, x \neq y\}$$
$$\cup\{((R_{x,y} \wedge R_{y,z}) \to R_{x,z}) : x, y, z \in X, x \neq y, y \neq z, z \neq x\}$$
と定義する．
- $I \models T_{LO,X}$ のとき，X 上の二項関係 $<^I$ を，$x, y \in X$ に対し，
$$x <^I y \quad :\Leftrightarrow \quad I(R_{x,y}) = 1$$
と定義すると，$<^I$ は X 上の線形順序になる．
- 逆に $<$ を X 上の任意の線形順序とするとき，$I : \mathrm{PropVar} \to \mathbb{2}$ を $I(R_{x,y}) = 1 \quad :\Leftrightarrow \quad x < y$ として定義すると，$I \models T_{LO,X}$ である．
- この意味で，理論 $T_{LO,X}$ は “X 上の線形順序が存在する” ことを主張している，と考えることができる．

命題論理のコンパクト性定理

- PropVar を任意の集合として，T を PropVar 上の命題論理の論理式からなる理論とする．このとき次が成り立つ:

定理 1 (命題論理のコンパクト性定理). T のすべての有限部分集合が充足可能なら T も充足可能である．

- コンパクト性定理は，無限の性質が本質的かかわっている定理である: 上の形の一般的なコンパクト性定理の証明には，Maximal Ideal Theorem と呼ばれる弱い形の選択公理が必要なことが知られている．

- 命題論理のコンパクト性定理は，有限の世界で成立する命題のアナロジーが無限の世界でも成立することを証明するときの強力な道具の 1 つとなる．

コンパクト性定理の応用 (1)

定理 2. 任意の有限集合 X 上の任意の半順序 R は，X 上の線形順序 R' に拡張できる．

証明. $\#(X) = n$ とする．$n > 2$ の場合を考えれば十分である．半順序 R は X^2 の部分集合として与えられているとする．
$k = \frac{1}{2}n \cdot (n-1)$ として $\{x_i, y_i\}$, $i < k$ を X の 2 つの要素の組の全体の枚挙とする．X 上の半順序の上昇列 R_i, $i < k$ を，

(1) $R \subseteq R_0$;

(2) $(x_i, y_i) \in R_i$ または，$(y_i, x_i) \in R_i$

となるようにとる．このとき，$R' = R_{k-1}$ は求めるようなものである．□

- 上の定理 2 とコンパクト性定理を用いると，次が示せる:

定理 3. (必ずしも有限でない) 集合 X と X 上の半順序 R に対し，R の拡張となっているような X 上の線形順序 R' が存在する．

コンパクト性定理の応用 (2)

定理 2. 任意の有限集合 X 上の任意の半順序 R は，X 上の線形順序 R' に拡張できる．

定理 3. (必ずしも有限でない) 集合 X と X 上の半順序 R に対し，R の拡張となっているような X 上の線形順序 R' が存在する．

証明. $\mathrm{PropVar} := \{R_{x,y} : x, y \in X, x \neq y\}$ とする．

$$T_{LO,\langle X,R\rangle} := T_{LO,X} \cup \{R_{x,y} : x, y \in X, x\,R\,y\}$$

とする．定理 2. により $T_{LO,\langle X,R\rangle}$ のすべての有限部分は充足可能である．したがってコンパクト性定理から，$T_{LO,\langle X,R\rangle}$ も充足可能である．$I \models T_{LO,\langle X,R\rangle}$ として，$x, y \in X$ に対し，

$$x\,R'\,y \quad :\Leftrightarrow \quad I(R_{x,y}) = 1$$

とすると，R' は R を拡張する X 上の線形順序となる．□

命題論理の表現力の限界

- 定理 3 の証明で用いた $T_{LO,\langle O,R\rangle}$ は，「R を拡張する X の線形順序が存在する」という主張と考えられる理論だったが，どのような性質に対してもこのような命題論理の理論が作れるわけではない．
  - たとえば，「平面に 1 対 1 に埋め込める」，という性質を考えると，平面上の点の全体の無限のサイズより大きなサイズを持つ無限集合 X はもちろん平面に 1 対 1 には埋め込めないが，X の任意の有限部分集合は平面に 1 対 1 に埋め込める．
  - このことから，X が平面に 1 対 1 に埋め込めることを主張するような命題論理の一般的な理論は作れないことがわかる:

    もしそのようなものが作れれば，コンパクト性定理の反例になってしまう．

無限版の四色定理

- コンパクト性定理を用いると，四色定理の，次のような無限への拡張が得られる:

定理 4. グラフ $\mathcal{G} = \langle G, E\rangle$ のすべての有限部分グラフが平面グラフのとき，G 頂点の 4 色での色分けで，辺でつながった 2 つの頂点は常に異る色になっているようなものが存在する．

証明. $\mathcal{G} = \langle G, E\rangle$ をすべての有限部分グラフが平面グラフになるような任意のグラフとする．

$\mathrm{PropVar} := \{c_x^i : i \in \mathbb{N},\ i < 4,\ x \in G\}$ とする．この PropVar 上の理論 T^* を次のように定める:

$$T^* = \{c_x^0 \vee c_x^1 \vee c_x^2 \vee c_x^3 : x \in G\} \cup \{c_x^i \to \neg c_x^j : x \in G,\ i, j < 4,\ i \neq j\}$$
$$\cup \{c_x^i \to \neg c_y^i : x, y \in G,\ x\, E\, y,\ i, j < 4,\ i \neq j\}$$

四色定理により，T^* のすべての有限部分集合は充足可能である．したがって，コンパクト性定理により，T^* は充足可能．$I \models T$ として，$f : G \to \{0, 1, 2, 3\};\ f(x) = i \Leftrightarrow I(c_x^i) = 1$ とすれば，f は求めるような色分けになっている．$\square$

無限の研究は CS と関係あるのか？

- 直接は関係しない (?):
  Which interesting theorems in Theoretical Computer Science rely on Axiom of Choice?
- 計算機の応用と関連する技術の基礎付けに無限と深く関わる数学理論が用いられていることはありえる． 例: トモグラフィーの技術は，ラドン変換の理論に基いている．
- 無限を用いずにも証明できる主張でも無限の概念を積極的に用いることでより深い理解が得られることが多い．応用に直結した無限の数学への，そのような無限の研究の寄与が，間接的にコンピュータサイエンスに影響することもありえる．
- 無限の研究 (集合論) も TCS も (欧米で) 数学の基礎付けを研究する分野 (数学基礎論) から 20 世紀の中盤に派生して生れている．そのため共通のアイデアも多く，たとえば Dana Scott, Keneth Kunen, Andreas Blass のように両方の分野で重要な仕事をしている人も少なくない．
- アナロジーによるアイデアの交流． ▷ 無用の用 $\Longrightarrow$ **多様性の用**.

Ich danke Ihnen für die Aufmerksamkeit.

Ende

終