

線形代数 1: 第2回目の講義の宿題の課題 + 解答例と解説

担当: browse 昌

2020年第1クォーター (2020年05月29日 03:40版)

以下は、2020年第1クォーター開講の線形代数1の第2回目の講義の宿題の課題です。
BEEFの講義のコースのページ

[第1クォーター][1U742][1G742] 線形代数1 T 電気 (学番: 301-363)

の「アナウンスメント」の「宿題のレポートの作成方法」に従って提出してください
(提出期限: 2020/05/19/23:59).

このプリントのファイルは、

<http://fuchino.ddo.jp/kobe/lin-alg-1-2-2020-ss-report-2.pdf>

としてダウンロードできます。

$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ とするとき次に答えてください。

- (1) 次の行列を計算してください。ただし、 $n \times n$ -行列 M に対し、 M^k で $\underbrace{MM \cdots M}_{k\text{-回}}$ を表わしています。:
- (a) $BA + CA$, (b) $(B + C)^2$, (c) $(B + C)^8$, (d) C^5 , (e) C^{57} , (f) D^2 , (g) D^{567}
(h) $(CD)^{27}$

- (2) 2×2 -行列 F で、 $(B + C)F = E$ となるものを求めてください。ただし、 E は 2×2 の単位行列です。

- (3) C は回転行列です。どの角度の回転を惹き起こす回転行列かを答えてください。

ヒント: 「回転行列」は、講義の参考資料としてあげた、「線形代数学 I — \mathbb{R}^2 上の線形変換」(<https://fuchino.ddo.jp/kobe/lin-alg1-ss15LN.pdf>) の例 0.2 での A_θ のような形をしている行列のことです。「回転を惹き起こす」という言葉の説明を上ファイルに書き足しました。

- (4) (3) に留意して、 $G^3 = C$ となるような 2×2 -行列 G を求めなさい。

- (5) [上級問題] すべての $k = 2, 3, 4, \dots$ について、 2×2 -行列 H で、 $H \neq E$, $H^2 \neq E, \dots, H^{k-1} \neq E$ だ

が, $H^k = E$ となるようなものが存在することを示してください. ((4) がヒントになっています.)

- (6) [上級問題] すべての $k = 3, 4, 5, \dots$ について (2 は除く) (4) での G は一意には決まらないことを示してください.

(5) と (6) は多少数学的な「ひらめき」が必要になるかもしれません. 行列のかけ算が線形変換の合成に対応する, ということがここで必要になる直観の背景にあります. 解けなくてがっかりする人がいるといけないので, 一応「上級問題」としましたが, 実は全然難しくありません.

補足説明: 第 1 回目の講義とその補足の板書で, 行列の演算 (行列の足し算, かけ算, スカラー倍) は実数の四則演算ととても良く似た性質を持つことが示せましたが, 全く同じではなく, たとえば, 行列のかけ算が可換性を持たないこと ($AB = BA$ とは限らないこと) はそのような違いの一つです. 上の問題 (5), (6) も実数のかけ算では起こらない現象です. たとえば, 実数 a が $a^3 = 1$ を満たすときには, a は一意に $a = 1$ となり, このときには $a^2 = 1$ となってしまいます.

解答例と解説

(1) (a): 素直に式を計算してもよいが, 行列のかけ算と足し算の分配律から, $BA + CA = (B + C)A$ が成り立つので, この等式の右辺の式の計算をした方が手間が省ける (二つの $m \times m$ -行列の和は m^2 個の数の足し算をすることで得られるが, $m \times m$ -行列のかけ算は, m 個のかけ算の結果の和の計算を m^2 回しなくてはいけなくなるので, 計算しなくてはいけなくなる量は圧倒的に大きくなる. したがって値の等しい式の中でかけ算の少ない方を選んで計算することで計算の手間を省ける).

$$(b): B + C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ なので,}$$

$$(B + C)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ となる.}$$

(c): 行列のかけ算の結合律から, $(B + C)^8 = ((B + C)^2)^4$ である. ここで試しに $\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right)^2$ の計算をしてみると, 対角行列 (0 でない成分は左上から右下への対角線上にしかないような行列) 同士 のかけ算は, 対応する 対角成分 (二重添字が i, i の形をしている, 行列の左上から右下への対角線上にある成分) 同士をかけて, それらを対角線上にならべて得られる行列となることが予想できる. 実際,

定理 1. $A = [a_{i,j}]$ と $B = [b_{i,j}]$ をサイズが $n \times n$ の対角行列とすると, AB は, $1 \leq i \leq n$ に対し, (i, i) -成分が $a_{i,i}b_{ii}$ となる対角行列となる. 特に, このことから, この場合には $AB = BA$ が成り立つ.

また、このことから、 $A = [a_{i,j}]$ をサイズが $n \times n$ の対角行列とすると、 A^k は、 $(a_{i,i})^k$ を対角線上にならべて得られる対角行列である。

証明. A と B は対角行列なので、 $A = [a_{i,j}\delta_{i,j}]$, $B = [b_{i,j}\delta_{i,j}]$ と書ける. ただし $\delta_{i,j}$ は Kronecker のデルタ (教科書 p.4, 第 2 回目の講義の virtual な板書 (1/2) の 2 ページ目) である. したがって AB の第 (i, j) -成分は

$$(*) \sum_{k=1}^n a_{i,k}\delta_{i,k}b_{k,j}\delta_{k,j}$$

である.

$i \neq j$ のとき (つまり、 (i, j) -成分が対角線上にないとき) には、 $\delta_{i,k}, \delta_{k,j}$ の少なくとも片方は 0 になるので、このときには、 $(*) = 0$ である.

$i = j$ のときには、 $k = i$ のときには $\delta_{i,k} = \delta_{k,j} = 1$ で、その他のときには、 $\delta_{i,k} = \delta_{k,j} = 0$ である. したがって、このときには、 $(*) = a_{i,i}b_{i,i}$ である. (証明終り)

上の定理 1 を使うと、 $(B + C)^8 = ((B + C)^2)^4 = \left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right)^4 = \begin{bmatrix} 2^4 & 0 \\ 0 & 2^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$.

(d), (e): $C^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ だから、 $C^4 = x(C^2)^2 = \begin{bmatrix} (-1)^2 & 0 \\ 0 & (-1)^2 \end{bmatrix} = E$ である. したがって、 $C^5 = C(C^4) = CE = C$.

$57 = 14 \times 4 + 1$ だから、 $C^{57} = (C^4)^{14}C = E^{14}C = EC = C$.

(f), (g): $D^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O$. 零行列をどの行列とかけても零行列となるので $D^{567} = D^2 D^{565} = O(D^{565}) = O$.

(h): $CD = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ だから、 $(CD)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

したがって、帰納法により、 $(CD)^n = CD$ がすべての $n \geq 1$ に対して成り立つことが示せる. 特に $(CD)^{27} = CD = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ である.

[背景説明]: 行列 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ は平面上の点の y 軸上への射影の表現行列になっています. [平面上のベクトルと線形変換に関する補足資料](#)を参照してください. (資料を pdf ファイルで持っていることの利点は、ファイルの中の探索ができることです. 「平面上のベクトルと線形変換に関する補足資料」のファイルを開いて、「射影」を検索することで、このファイルで射影に関して述べている場所が瞬時に見つかります.) 等式 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ は、射影した結果をもう一度射影しても変わらない、という射影の基本性質の 1 つを表現するものになっています.

(2): (1), (b) (とその解) から、 $(B + C)^2 = 2E$ である. したがって、 $E = \frac{1}{2}(B + C)(B + C) = (B + C) \left(\frac{1}{2}(B + C) \right)$. となり、 $F = \frac{1}{2}(B + C) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ が求めるものである.

[補足説明]: 逆行列の判定条件の定理 (教科書の定理 2.4.1 — これは線形代数 3 か 4 で証明されることになると思います) から, F は, $(B+C)$ の逆行列であることがわかります. このことと, 後で示すことになる逆行列の一意性 (これは逆行列の定義を知っていれば, ほとんど自明で, 自分で再現できるはず) により, このような F は一意に決まることがわかるので, この行列は, *the solution* (これ以外には解がないという意味の唯一の解) になっています.

(3): $C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{2} & -\sin \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{bmatrix}$ だから, C は原点を中心に左回り (逆時計回り) $\frac{\pi}{2}$ (90°) の回転を惹き起こす回転行列になっていることがわかる.

(4): 以下では, 「[平面上のベクトルと線形変換に関する補足資料](https://fuchino.ddo.jp/kobe/lin-alg1-ss15LN.pdf)

(<https://fuchino.ddo.jp/kobe/lin-alg1-ss15LN.pdf>) での記法を用いています.

原点を中心に左回り 90° の回転は 原点を中心に左回り (逆時計回り) 30° ($\frac{\pi}{6}$) の回転を 3 回繰り返すことにより得られる. 線形変換の繰り返し (関数の合成) は表現行列のかけ算に対応するので*), $C = A_{\frac{\pi}{2}} = (A_{\frac{\pi}{6}})^3 = \left(\begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & -\sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{bmatrix} \right)^3$ となる. したがって, $G = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & -\sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{bmatrix}$ は求めているような性質を持つものとなっていることがわかる.

*) このことは直観的には明らかですが, 第 4 回目の講義できちんと証明します.

(5): (4) と同様の議論から $A_{\frac{2\pi}{n}} = \begin{bmatrix} \cos \frac{2\pi}{n} & -\sin \frac{2\pi}{n} \\ \sin \frac{2\pi}{n} & \cos \frac{2\pi}{n} \end{bmatrix}$ がこのような性質を持つものとなることがわかる.

(6): $A_{-\frac{2\pi}{n}} = \begin{bmatrix} \cos -\frac{2\pi}{n} & -\sin -\frac{2\pi}{n} \\ \sin -\frac{2\pi}{n} & \cos -\frac{2\pi}{n} \end{bmatrix}$ も同じ性質を持つ. $n > 2$ のときには, この行列は (5) の行列とは異なる.