線形代数 1: 第３回目の講義の宿題の課題 + 解答例と解説

担当: 渕野 昌 2020 年第 1 クオーター (2020 年 08 月 28 日 21:21 版)

以下は，2020 年第 1 クオーター開講の線形代数 1 の第 3 回目の講義の宿題の課題です．
BEEF の講義のコースのページ

[第 1 クォーター][1U742][1G742] 線形代数１ Ｔ 電気 (学番：301-363)

の「アナウンスメント」の「宿題のレポートの作成方法」に従って提出してください
(提出期限: 2020/05/26/23:59).

このプリントのファイルは,

http://fuchino.ddo.jp/kobe/lin-alg-1-2-2020-ss-report-3.pdf

としてダウンロードできます.

ベクトルは行列の特別な場合なので，教科書 p.8 にある「行列の演算に関する性質」は演算が意味を持つかぎり，すべて成り立ちます．特に，$\mathbb{R}^n$ のベクトル $\mathbb{a}$, $\mathbb{b}$, $\mathbb{c}$, $\mathbb{R}^n$ のゼロベクトル (成分がすべて 0 になっているベクトル) $\mathbb{0}$, および，スカラー $a, b \in \mathbb{R}$ に対し,

$(*)$ $\mathbb{a}+\mathbb{b}=\mathbb{b}+\mathbb{a}$ (ベクトルの和の可換性), $\mathbb{a}+\mathbb{0}=\mathbb{a}$ ... (a)
$(\mathbb{a}+\mathbb{b})+\mathbb{c}=(\mathbb{a}+\mathbb{b})+\mathbb{c}$ (ベクトルの和の結合律).
$0\mathbb{a}=\mathbb{0}$ ... (b), $1\mathbb{a}=\mathbb{a}$ ... (c),
$(ab)\mathbb{a}=a(b\,\mathbb{a})$ (スカラー倍の結合律),
$a(\mathbb{a}+\mathbb{b})=a\,\mathbb{a}+a\,\mathbb{b}$, $(a+b)\mathbb{a}=a\,\mathbb{a}+b\,\mathbb{a}$ (スカラー倍の分配律).

が成り立ちます.

(1) $\mathbb{R}^n$ のベクトル $\mathbb{a}$, $\mathbb{b}$ について，$-\mathbb{a}$ を $(-1)\mathbb{a}$ (ベクトル $\mathbb{a}$ のスカラー -1 によるスカラー倍) で定義し，$\mathbb{a}-\mathbb{b}$ を $\mathbb{a}+(-1\mathbb{b})$ (ベクトル $\mathbb{a}$ と 今定義した意味での $-\mathbb{b}$ のベクトルとしての和) で定義するとき,

(a) すべての $\mathbb{a}$, $\mathbb{b}$, $\mathbb{c}$ について，$\mathbb{a}-\mathbb{b}=\mathbb{c}$ となることと，$\mathbb{a}=\mathbb{b}+\mathbb{c}$ となることは同値である.

(b) すべての $\mathbb{a}$ について $\mathbb{a}-\mathbb{a}=\mathbb{0}$.

(c) $\mathbb{a}-\mathbb{0}=\mathbb{a}$

が成り立つことを，性質 $(*)$ と $-\mathbb{a}$, $\mathbb{a}-\mathbb{b}$ の定義だけを用いて (つまりこれらの演算が具体的に与えられたベクトルのどのような要素ごとの演算に対応しているか，という知識は用いずに) 示してください.

$\mathbb{R}^2=\{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\}$ は平面上の点全体と，$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \mapsto (a, b)$ という対応で同一視することにしたのでした (第 2 回の講義の virtual 板書 (2/2))．以下の問題ではこの同一視の仕方を常に仮定しています.

(2)

(**) 異なる３つのベクトル $\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c} \in \mathbb{R}^2$ について，これらが平面上の一直線上にならんだ３点になっているのは，$\mathbb{a} - \mathbb{b}$ が $\mathbb{b} - \mathbb{c}$ の定数倍 (スカラー倍) になっているちょうどそのときである

という命題は正しいでしょうか? 正しいなら，なぜ正しいかを，間違っているのなら，なぜ間違っているのかを説明してください.

(3) 平面上の任意の直線 ℓ は，ベクトル $\mathbb{a}, \mathbb{b} \in \mathbb{R}^2$ をうまくとると，

$$\ell = \{\mathbb{c} : \text{ある } a \in \mathbb{R} \text{ に対し } \mathbb{c} = \mathbb{a} + a\mathbb{b} \text{ となる }\}$$

と表せることを示してださい．特に，$\mathbb{a}$ と $\mathbb{b}$ をどうとればいいかを説明してください.

(4) [チャレンジ問題] (a) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を線形変換とするとき，平面上の任意の直線 ℓ の φ による像 $\varphi[\ell] = \{\varphi(\mathbb{a}) : \mathbb{a} \in \ell\}$ は，1 点からなる集合となるか，あるいは直線になるかのいずれかであることを示してください (ヒント (2) を用いることもできますが，(3) を用いると分りやすい説明ができると思います).

(b) 更に $\mathbb{c} \in \mathbb{R}^2$ が $\mathbb{a}, \mathbb{b} \in \mathbb{R}^2$ を結ぶ直線上の $\mathbb{a}$ と $\mathbb{b}$ の間にあるときには，$\varphi(\mathbb{c})$ は $\varphi(\mathbb{a})$ と $\varphi(\mathbb{b})$ を結ぶ直線上の $\varphi(\mathbb{a})$ と $\varphi(\mathbb{b})$ の間にあって，線分 $\mathbb{a}\mathbb{c}$ と線分 $\mathbb{c}\mathbb{b}$ の比率は，線分 $\varphi(\mathbb{a})\varphi(\mathbb{c})$ と線分 $\varphi(\mathbb{c})\varphi(\mathbb{b})$ の比率と等しくなることを示してください.

(5) $R = \{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} : 0 \le a \le 1,\, 0 \le v \le 1\}$ がどんな図形になるかを図示してください．$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ とするとき $\varphi_A[R]$ がどんな図形になるかを図示してください.

ヒント: (4) の知識を使うとスムーズに説明ができます.

(6) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を線形変換として，$\mathbb{b} \in \mathbb{R}^2, \mathbb{b} \ne \mathbb{0}$ とするとき $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; \mathbb{a} \mapsto \varphi(\mathbb{a}) + \mathbb{b}$ で写像 ψ を定義することにして，次に答えてください．(a) ψ は線形変換でないことを示してください.
(b) ψ による直線の像は直線になることを示してください[1].

解答例と解説

(1) (a): まず，$\mathbb{a} - \mathbb{b} = \mathbb{c}$ と，$(\mathbb{a} - \mathbb{b}) + \mathbb{b} = \mathbb{c} + \mathbb{b}$ が同値であることを示す: $\mathbb{a} - \mathbb{b} = \mathbb{c}$ なら両辺に $\mathbb{b}$ を足して，$(\mathbb{a} - \mathbb{b}) + \mathbb{b} = \mathbb{c} + \mathbb{b}$ である．逆に，$(\mathbb{a} - \mathbb{b}) + \mathbb{b} = \mathbb{c} + \mathbb{b}$ なら，両辺に $-\mathbb{b}$ を足すと，$((\mathbb{a} - \mathbb{b}) + \mathbb{b}) + (-\mathbb{b}) = (\mathbb{c} + \mathbb{b}) + (-\mathbb{b})$ だが,

[1] この問題の主張は,「ψ による直線の像は 1 点となるかあるいは直線となる」とするべきでした.「線形変換」と言ったときには，単に線型写像であるだけでなく，1-1 onto な写像にもなっている，という条件を加える流儀もあって，その場合には，この問題のような主張でよかったのですが，ここでは，線形写像と，線形変換を同じ意味として使っていたので，その言葉の使い方だと，$\varphi[\ell]$ が 1 点になってしまう可能性もあるのでした．以下の解説を参照してください.

$$
\begin{aligned}
&((\mathbb{a}-\mathbb{b})+\mathbb{b})+(-\mathbb{b})=(\mathbb{c}+\mathbb{b})+(-\mathbb{b}) \\
&\qquad\Leftrightarrow\ (\mathbb{a}-\mathbb{b})+(\mathbb{b}+(-\mathbb{b}))=\mathbb{c}+(\mathbb{b}+(-\mathbb{b})) && ;\text{ベクトルの和の結合律}\\
&\qquad\Leftrightarrow\ (\mathbb{a}-\mathbb{b})+(1\mathbb{b}+(-1\mathbb{b}))=\mathbb{c}+(1\mathbb{b}+(-1\mathbb{b})) && ;\text{(c) と } -\mathbb{b}\text{ の定義}\\
&\qquad\Leftrightarrow\ (\mathbb{a}-\mathbb{b})+(1-1)\mathbb{b}=\mathbb{c}+(1-1)\mathbb{b} && ;\text{スカラー倍の分配律}\\
&\qquad\Leftrightarrow\ (\mathbb{a}-\mathbb{b})+0\mathbb{b}=\mathbb{c}+0\mathbb{b} && ;\text{数の計算}\\
&\qquad\Leftrightarrow\ (\mathbb{a}-\mathbb{b})+\mathbb{0}=\mathbb{c}+\mathbb{0} && ;\text{(b)}\\
&\qquad\Leftrightarrow\ \mathbb{a}-\mathbb{b}=\mathbb{c} && ;\text{(a)}
\end{aligned}
$$

である．(”ooo $\Leftrightarrow$ xxx” は 「ooo と xxx は同値である」をあらわす)．これを使うと,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{a}-\mathbb{b}=\mathbb{c}\ &\Leftrightarrow\ (\mathbb{a}-\mathbb{b})+\mathbb{b}=\mathbb{c}+\mathbb{b} && ;\text{上で示した同値性}\\
&\Leftrightarrow\ (\mathbb{a}+(-\mathbb{b}))+\mathbb{b}=\mathbb{c}+\mathbb{b} && ;\mathbb{a}-\mathbb{b}\text{ の定義}\\
&\Leftrightarrow\ \mathbb{a}+((-\mathbb{b})+\mathbb{b})=\mathbb{c}+\mathbb{b} && ;\text{ベクトルの和の結合律}\\
&\Leftrightarrow\ \mathbb{a}=\mathbb{c}+\mathbb{b} && ;\text{上での議論と同様}
\end{aligned}
$$

上の解答は，等式を $\Leftrightarrow$ でつないで同値性を証明する，という方針を貫くものになっていましたが，無理にそのような証明をせずに $\Rightarrow$ と $\Leftarrow$ を別々に証明する，という方針でやった方が楽に示せるかもしれません:

別解: $\mathbb{a}-\mathbb{b}=\mathbb{c}$ を仮定する．両辺に $\mathbb{b}$ を右から足すと，$(\mathbb{a}-\mathbb{b})+\mathbb{b}=\mathbb{c}+\mathbb{b}$ だが，この左辺は，$\mathbb{a}-\mathbb{b}=\mathbb{a}+(-1\mathbb{b})$ であることとベクトルの和の結合律から, $(\mathbb{a}-\mathbb{b})+\mathbb{b}=(\mathbb{a}+(-1\mathbb{b}))+\mathbb{b}=\mathbb{a}+(-1\mathbb{b}+\mathbb{b})$ となる．この右辺は，$\mathbb{b}=1\mathbb{b}$ (式 (c)) とスカラ倍の分配律 (2 行目の 2 つ目の式)，それに $0\mathbb{b}=\mathbb{0}$ (式 (b)) により，$\mathbb{a}+(-1\mathbb{b}+\mathbb{b})=\mathbb{a}+(-1\mathbb{b}+1\mathbb{b})=\mathbb{a}+(-1+1)\mathbb{b}\underbrace{=}_{-1+1=0}\mathbb{a}+0\mathbb{b}=\mathbb{a}+\mathbb{0}$ となる．
この右辺は，式 (a) により $\mathbb{a}$ と等しい．したがって，$\mathbb{c}+\mathbb{b}=\mathbb{a}$ である．
逆に，$\mathbb{c}+\mathbb{b}=\mathbb{a}$ を仮定する．両辺に $-1\mathbb{b}$ を足すと，$(\mathbb{c}+\mathbb{b})+(-1\mathbb{b})=\mathbb{a}+(-1\mathbb{b})=\mathbb{a}-\mathbb{b}$ となるが，この左辺は，上と同じ議論で $\mathbb{c}$ と等しくなるから，$\mathbb{c}=\mathbb{a}-\mathbb{b}$ である．

(1) (b): これは，上での同値性の証明の部分で示されているが，改めて示すと:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{a}-\mathbb{a}&=\mathbb{a}+(-1\mathbb{a}) && ;\mathbb{a}-\mathbb{b}\text{ の定義}\\
&=1\mathbb{a}+(-1\mathbb{a}) && ;\text{(c)}\\
&=(1+(-1))\mathbb{a} && ;\text{スカラー倍の分配律}\\
&=0\,\mathbb{a} && ;\text{数の計算}\\
&=\mathbb{0} && ;\text{(b).}
\end{aligned}
$$

である．

(1) (c): (1) (a) により，$\mathbb{a}-\mathbb{0}=\mathbb{a}$ と $\mathbb{a}=\mathbb{a}+\mathbb{0}$ は同値だが，後者は，(a) の式だから成り立っている．

別証: 次のような直接証明もできる:

$$
\mathbb{a}-\mathbb{0}\underbrace{=}_{\text{‘$-$’ の定義}}\mathbb{a}+(-1\mathbb{0})\underbrace{=}_{\text{式 (b)}}\mathbb{a}+(-1(0\mathbb{a}))\underbrace{=}_{\text{スカラー倍の結合律}}\mathbb{a}+((-1)\times 0)\mathbb{a})
$$

$$\underbrace{=}_{(-1)\times 0=0} \mathbb{a}+0\mathbb{a} \underbrace{=}_{\text{式 (c)}} 1\mathbb{a}+0\mathbb{a} \underbrace{=}_{\text{スカラー倍の結合律の 2 行目の右式}} (1+0)\mathbb{a}=1\mathbb{a} \underbrace{=}_{\text{式 (c)}} a.$$

(2): $\mathbb{a}$ と $\mathbb{b}$ を通る直線 L は $L=\{t(\mathbb{a}-\mathbb{b})+\mathbb{b} : t\in\mathbb{R}\}$ と表わせる．$L=\{t(\mathbb{a}-\mathbb{b})+\mathbb{b} : t\in\mathbb{R}\}$ が直線となることは，平面ベクトルの和とスカラー倍の幾何学的な意味から明らかだが[2]，$t=1$ とすると $t(\mathbb{a}-\mathbb{b})+\mathbb{b}=\mathbb{a}$, $t=0$ とすると $t(\mathbb{a}-\mathbb{b})+\mathbb{b}=\mathbb{b}$ となるから，この直線は $\mathbb{a}, \mathbb{b}$ を通るものになっている．
$\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c}$ が一直線に並んでいるということは，

$\mathbb{c}\in L \;\Leftrightarrow\;$ ある $t^*\in\mathbb{R}$ に対し，$\mathbb{c}=t^*(\mathbb{a}-\mathbb{b})+\mathbb{b}$ となる

が成り立つということである．t^* を上のようなものとすると，(1) (a) により，$\mathbb{c}=t^*(\mathbb{a}-\mathbb{b})+\mathbb{b}$ は $\mathbb{c}-\mathbb{b}=t^*(\mathbb{a}-\mathbb{b})$ と同値だが，これは，(1) (a) と同様に，$\mathbb{b}-\mathbb{c}=-t^*(\mathbb{a}-\mathbb{b})$ ... (+) と同値であることが示せる．$\mathbb{b}$ と $\mathbb{c}$ は異るので，$t^*\neq 0$ である ($t^*=0$ なら，(c) により $\mathbb{b}-\mathbb{c}=0 \Leftrightarrow \mathbb{b}=\mathbb{c}$ が成り立ってしまい矛盾である)．したがって，(+) は $\mathbb{a}-\mathbb{b}=-\dfrac{1}{t^*}(\mathbb{b}-\mathbb{c})$ と同値になる．以上から，(**) は正しい主張であることが示せた．

(3): これは既に (2) の証明の中で示されている．ℓ の異なる 2 点 $\mathbb{a}$ と $\mathbb{c}$ をとると，ℓ はこの 2 点を通る直線だから， (2) の解答で見たように，$\ell=\{t(\mathbb{c}-\mathbb{a})+\mathbb{a} : t\in\mathbb{R}\}$ とあらわせる．したがって，$\mathbb{b}=\mathbb{c}-\mathbb{a}$ とすると，この $\mathbb{a}, \mathbb{b}$ が求めるようなものになっている．ここでの議論から，$\mathbb{a}$ はこの直線 ℓ に含まれる点 (に対応するベクトル) で $\mathbb{b}$ は ℓ に含まれる異る 2 点 (に対応するベクトル) の差である．

(4): $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ を線形変換として， $\ell=\{a\mathbb{a}+\mathbb{b} : a\in\mathbb{R}\}$ とすると．φ による ℓ の像 $\varphi[\ell]$ は，$\{\varphi(a\mathbb{a}+\mathbb{b}) : a\in\mathbb{R}\}$ となる．φ が線形であることから，各 $a\in\mathbb{R}$ に対し，$\varphi(a\mathbb{a}+\mathbb{b})=a\varphi(\mathbb{a})+\varphi(\mathbb{b})$ となる．したがって $\varphi(\mathbb{a})=\mathbb{0}$ のときには，$\varphi[\ell]=\{\varphi(\mathbb{b})\}$ となる．$\varphi(\mathbb{a})\neq\mathbb{0}$ のときには，$\mathbb{a}^*=\varphi(a)$, $\mathbb{b}^*=\varphi(b)$ として，$\varphi[\ell]=\{a\,\mathbb{a}^*+\mathbb{b}^* : a\in\mathbb{R}\}$ となり，これは $\mathbb{R}^2$ の直線となっている．
異るベクトル $\mathbb{a}, \mathbb{b}$ に対し，$\mathbb{c}$ が，$\mathbb{a}$ と $\mathbb{b}$ の間の区間を $a:b$ に分割する点となっている，ということは，$\mathbb{c}=\dfrac{a}{a+b}(\mathbb{b}-\mathbb{a})+\mathbb{a}$ となることである．このときには，φ の線型性から，$\varphi(\mathbb{c})=\dfrac{a}{a+b}(\varphi(\mathbb{b})-\varphi(\mathbb{a}))+\varphi(\mathbb{a})$ となるから，$\varphi(\mathbb{c})$ は，線分 $\varphi(\mathbb{a})\ \varphi(\mathbb{b})$ を $a:b$ に分割する点となっている．

(5): R は $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ を頂点とする正方形である．(4) から， φ を任意の線形変換とするとき，区間 $\mathbb{a}\ \mathbb{b}$ は φ で区間 $\varphi(\mathbb{a})\ \varphi(\mathbb{b})$ に移るから，特に，A を左からかけるという演算としての線形変換で $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ を頂点とする正方形は $A\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ と $A\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ の間の区

[2] ここで言っている平面ベクトルの和とスカラー倍の幾何学的な意味とは，ベクトル $\mathbb{a}, \mathbb{b}$ を原点からこれらのベクトルに対応する平面上の点への矢印と考えたとき，$\mathbb{a}+\mathbb{b}$ は，これらの 2 つの矢印を２辺とする平行四辺形の原点からの対角線に対応するベクトルになること，$c\mathbb{a}$ は $c>0$ のときには，$\mathbb{a}$ と同じ方向を持つ大きさが $\mathbb{a}$ の大きさの c 倍となっているベクトルで，$c<0$ なら $c\mathbb{a}$ は大きさが $\mathbb{a}$ の $|c|$ 倍で $\mathbb{a}$ と反対方向のベクトルである，ということです．

間 $A\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ と $A\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ の間の区間，$A\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ と $A\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}$ の間の区間，および $A\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}$ と $A\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ の間の区間で囲まれる菱形の図形となる．

(6) (a): $\psi(\mathbb{0})=\varphi(\mathbb{0})+\mathbb{b}=\mathbb{b}\neq\mathbb{0}$ だから，φ は線型写像ではない．
(6) (b): この問題は，実は修正が必要だった．ℓ を $\mathbb{R}^2$ 上の直線として，$\varphi[\ell]=\{\mathbb{c}\}$ となる場合には，$\psi[\ell]=\{\mathbb{c}+\mathbb{b}\}$ となり，直線ではないので，「$\varphi[\ell]$ が直線になるときには」という条件を入れる必要があった．このときには，$\psi[\ell]=\varphi[\ell]+\mathbb{b}=\{\mathbb{t}+\mathbb{b}:\mathbb{t}\in\varphi[\ell]\}$ となって，$\psi[\ell]$ は直線 $\varphi[\ell]$ を $\mathbb{b}$ で平行移動したものになるので，その結果の $\psi[\ell]$ も直線である．