線形代数 1: 第 4 回目の講義の宿題の課題 + 解答例と解説

担当: 渕野 昌 2020 年第 1 クオーター (2020 年 06 月 05 日 11:16 版)

以下は，2020 年第 1 クオーター開講の線形代数 1 の第 4 回目の講義の宿題の課題です．
BEEF の講義のコースのページ

[第 1 クォーター][1U742][1G742] 線形代数 1　T 電気 (学番：301-363)

の「アナウンスメント」の「宿題のレポートの作成方法」に従って提出してください
(提出期限: 2020/06/02/23:59).

このプリントのファイルは，

http://fuchino.ddo.jp/kobe/lin-alg-1-2-2020-ss-report-4.pdf

としてダウンロードできます．提出期限後に，ファイルを拡張して解答例とコメントを書き加えます．

(1) $\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ は線型写像で，$\varphi(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix}$, $\varphi(\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\end{bmatrix}$, $\varphi(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$ となるものとする．$\varphi=\varphi_A$ となる行列 (φ の表現行列) を求めよ (“φ_A” という記法は，前の講義でも出てきていますが，今回の講義では，第 4 回目の virtual な板書 (1/2) の補題 4.1 で説明してあります．).

(2) (a) xy-平面上の角度 θ の原点を中心とする回転，に続けて (b) yz 平面上での角度 η の原点を中心とする回転，を施す，という操作に分解できるような 3 次元空間の原点を中心とした回転の表現行列を求めよ．

解答例と解説

(1): φ の線形性から，

$$\varphi(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix})=\varphi(\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix})=\varphi(\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix})-\varphi(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\2\\3\end{bmatrix},$$

$$\varphi(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix})=\varphi(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix})=\varphi(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix})-\varphi(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\1\\2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\-1\\-3\end{bmatrix}$$ である，したがって

$$A=\begin{bmatrix}0&1&-1\\0&1&0\\-1&2&0\\-3&3&0\end{bmatrix}$$ が求めるものである．

検算:

$$\varphi_A(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}) = \begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ -3 & 3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix}, \qquad \varphi_A(\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}) = \begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ -3 & 3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\end{bmatrix},$$

$\varphi_A(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}) = \begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ -3 & 3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$ だから，確かにこの行列が求めるようなものになっている．

(2): xy-平面上の原点を中心とした角度 θ の回転と，yz-平面上での原点を中心とした角度 η の回転の表現行列はそれぞれ，$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\eta & -\sin\eta\\ 0 & \sin\eta & \cos\eta\end{bmatrix}$ だから，これらの (この順序での) 合成に対応する行列は，

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\eta & -\sin\eta\\ 0 & \sin\eta & \cos\eta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \cos\eta\sin\theta & \cos\eta\cos\theta & -\sin\eta\\ \sin\eta\sin\theta & \sin\eta\cos\theta & \cos\eta\end{bmatrix}$$

(行列のかけ算の順序に注意)