線形代数 1: 第５回目の講義の宿題の課題 + 解答例と解説

担当: 渕野 昌 2020 年第 1 クオーター (2020 年 08 月 29 日 14:40 版)

以下は，2020 年第 1 クオーター開講の線形代数 1 の第５回目の講義の宿題の課題です．
BEEF の講義のコースのページ

[第 1 クォーター][1U742][1G742] 線形代数１　Ｔ 電気 (学番：301-363)

の「アナウンスメント」の「宿題のレポートの作成方法」に従って提出してください
(提出期限: 2020/06/09/23:59).

このプリントのファイルは,

http://fuchino.ddo.jp/kobe/lin-alg-1-2-2020-ss-report-5.pdf

としてダウンロードできます．提出期限後に，ファイルを拡張して解答例とコメントを書き加えます．

$\boxed{1.}$ 次の連立方程式について以下に答えよ．

$$\begin{cases} 5x_1 & -2x_2 & +2x_3 & = & -1 \\ 3x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 3 \end{cases}$$

(a) 上の連立方程式の拡大係数行列を求めよ．

(b) ガウスの消去法を用いて上の連立方程式を解け．計算の各ステップが，それぞれ，どの基本変形を，どう適応したものかを明記すること．

$\boxed{2.}$ a, b, $c \in \mathbb{R}$ として，連立方程式

$$\begin{cases} x & +2y & +3z & = & a \\ 4x & +5y & +6z & = & b \\ 7x & +8y & +9z & = & c \end{cases}$$

が解を持つための (a, b, c に関する) 条件を求めよ．

解答例と解説

$\boxed{1.}$ (a): この連立一次方程式の拡大係数行列は,

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 5 & -2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

である．
(b): まず，ガウスの消去法を機械的に適用した計算例を見てみる

$$\begin{array}{rrr|rl}
\hline
5 & -2 & 2 & -1 & \\
3 & -1 & 2 & 0 & \\
-2 & 1 & -1 & 3 & \\
\hline
1 & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & ① \times\frac{1}{5} \\
3 & -1 & 2 & 0 & \\
-2 & 1 & -1 & 3 & \\
\hline
1 & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \\
0 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & ② -3\times ① \\
0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{13}{5} & ③ +2\times ① \\
\hline
1 & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \\
0 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & \\
0 & 0 & -1 & 2 & ③ - ② \\
\hline
\end{array}$$

最後の行列は，連立方程式

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x_1 & -\frac{2}{5}x_2 & +\frac{2}{5}x_3 & = & -\frac{1}{5} \\ & \frac{1}{5}x_2 & +\frac{4}{5}x_3 & = & \frac{3}{5} \\ & & -x_3 & = & 2 \end{array}\right.$$

の拡大係数行列だから，この連立方程式を下から順に解いてゆくと，$x_3 = -2$, $x_2 = 11$, $x_1 = 5$ を得る．これらの値をもとの連立方程式の各式の左辺に代入すると等式が成り立つことが確認できるので，この値の三つ組は確かにもとの連立方程式の解になっていることが確かめられる．
手計算の簡略化のためには，例えば,

$$\begin{array}{rrr|rl}
\hline
5 & -2 & 2 & -1 & \\
3 & -1 & 2 & 0 & \\
-2 & 1 & -1 & 3 & \\
\hline
5 & -2 & 2 & -1 & \\
1 & 0 & 1 & 3 & ② + ③ \\
-2 & 1 & -1 & 3 & \\
\hline
1 & 0 & 1 & 3 & ① \rightleftarrows ② \\
5 & -2 & 2 & -1 & \\
-2 & 1 & -1 & 3 & \\
\hline
1 & 0 & 1 & 3 & \\
-2 & 1 & -1 & 3 & ② \rightleftarrows ③ \\
5 & -2 & 2 & -1 & \\
\end{array}$$

として残りの計算をすることで，分数の計算を避けることができる．

$\boxed{2.}$ ：文字 a, b, c を他の定数と同様に扱って，対応する拡大係数行列をガウスの消去法で処理すると，

1	2	3	⋮	a	
4	5	6	⋮	b	
7	8	9	⋮	c	
1	2	3	⋮	a	
0	-3	-6	⋮	$b-4a$	② − 4× ①
0	-6	-12	⋮	$c-7a$	③ − 7× ①
1	2	3	⋮	a	
0	-3	-6	⋮	$b-4a$	
0	0	0	⋮	$c-7a-2(b-4a)$	③ − 2× ②

最後の行は条件式 $(0 =)\ 0x + 0y + 0z = a - 2b + c$ に対応するが，この条件式が成り立つためには，$a - 2b + c = 0$ でなければならない (この場合 x, y, z は任意でよい．つまり，この式は x, y, z に何の制限も課さない)．この条件のもとでは，最後の行列の最初の二行に対応する方程式から，$y = \frac{4}{3}a - \frac{1}{3}b - 2z$, $x + 2(\frac{4a-b}{3} - 2z) + 3z = a \Leftrightarrow x = -\frac{5}{3}a + \frac{2}{3}b + z$ となる．したがって，この場合の解の全体は，

$$\{\begin{bmatrix} -\frac{5}{3}a + \frac{2}{3}b + t \\ \frac{4}{3}a - \frac{1}{3}b - 2t \\ t \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R}\}$$

である．最後の行列の最初の二行に対応する方程式からなる連立方程式の解は，解が存在するなら，解の全体はある直線上の点の全体になる (第６回目の講義の板書の５ページ右下の図を参照)．上の集合も直線上の点の全体の形をしているので，パラメタ t に２つの異る値を代入してその両方が連立方程式の解を与えるものになっていることを確かめれば，上の集合が確かに解の全体になっていることがわかる．そのために，計算のしやすさを考えて $t = 0$ と $t = 1$ の場合を計算してみると，確かに，それらの $\mathbb{R}^3$ の２点に対応するベクトルが連立方程式の解を与えるものになっていることが確かめられる．
以上から $a - 2b + c = 0$ が成り立つときには，確かに方程式の解が存在して，解の全体は上で与えたようなものになっていることからわかった．
したがって，この連立方程式が解を持つのは 等式 $a - 2b + c = 0$ が成り立つちょうどそのときである．