線形代数 1: 第６回目の講義の宿題の課題 + 解答例と解説

担当:　渕野 昌　　2020 年第 1 クオーター　(2020 年 06 月 27 日 03:16 版)

以下は，2020 年第 1 クオーター開講の線形代数 1 の第６回目の講義の宿題の課題です．
BEEF の講義のコースのページ

[第 1 クォーター][1U742][1G742] 線形代数１　Ｔ 電気 (学番：301-363)

の「アナウンスメント」の「宿題のレポートの作成方法」に従って提出してください
(提出期限: 2020/06/16/23:59).

このプリントのファイルは,

http://fuchino.ddo.jp/kobe/lin-alg-1-2-2020-ss-report-6.pdf

としてダウンロードできます．提出期限後に，ファイルを拡張して解答例とコメントを書き加えます．

---

1. 以下の問いに答えて，$\mathbb{R}^2$ で，等式 $\mathbb{a}\cdot\mathbb{b} = |\mathbb{a}|\,|\mathbb{b}|\cos\theta$ が常に成り立つことの証明を完成させてください．ただし，$\mathbb{a}\cdot\mathbb{b}$ でベクトル $\mathbb{a}, \mathbb{b} \in \mathbb{R}^2$ の内積 (教科書では標準内積と呼ばれている．6 回目の講義の板書の 2 ページ目を参照) を表わし，$|\mathbb{a}|$, $|\mathbb{b}|$ は，それぞれ，ベクトル $\mathbb{a}$ と $\mathbb{b}$ の大きさ (第２回目の講義の２つ目の板書の 4 ページを参照)， θ は (原点を始点とする矢印としてのベクトル) $\mathbb{a}$ から $\mathbb{b}$ への反時計回りでの角度を表わすものとします.

(1) $\mathbb{b}$ を $\mathbb{R}^2$ の，大きさが r のベクトルで，原点を始点とする矢印と見たとき，その x-軸となす角度が，反時計回り (左回り) で θ のとき，$\mathbb{b} = \begin{bmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{bmatrix}$ であることを示してください.

(2) $\mathbb{a} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}$ のとき，$|\mathbb{a}| = |a|$ となることを示してください.

(3) 上の (1) と (2) でのような $\mathbb{a}$ と $\mathbb{b}$ に対し，等式 $\mathbb{a}\cdot\mathbb{b} = |\mathbb{a}|\,|\mathbb{b}|\cos\theta$ が常に成り立つことを示してください.

(4) A, B を AB が計算できるような 2 つの行列とするとき (つまり A の列の数と B の行の数が一致するとき)， 等式 ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ が成り立つことを示してください (行列のかけ算の順序に注意)．ただし，${}^tA$ で行列 A の転置行列 (行と列を入れ替えて得られる行列) を表わしています (第１回目の講義の板書を参照．この等式は教科書の 8 ページに述べられています).

(5) R_θ を 2 回目の講義の後半の板書のようなものするとき, すべての角度 θ に対して, $\mathbb{a}\cdot\mathbb{b} = (R_\theta\mathbb{a})\cdot(R_\theta\mathbb{b})$ となることを示してください．**ヒント**: $\mathbb{R}^1$ と $\mathbb{R}$ の標準的な同一視により，内積 $\mathbb{a}\cdot\mathbb{b}$ は $({}^t\mathbb{a})\mathbb{b}$ と表わせること， ${}^t(R_\theta) = R_{-\theta}$ となること (これも示してください) と， (4) を組み合わせることで示せます.

(6) 上の (3) と (5) を用いて，全てのベクトル $\mathbb{a}, \mathbb{b} \in \mathbb{R}^2$ に対し，$\mathbb{a} \cdot \mathbb{b} = |\mathbb{a}|\,|\mathbb{b}| \cos\theta$ が成り立つことを示してください.

以下は宿題の課題ではありませんが，次週の講義の予習になっています．余裕のある人は考えてみてください

次回の講義の予習．

$n \times n$ 行列 A, B について，$AB = BA = E_n$ が成り立つとき B は A の逆行列である，という．ただし E_n で，サイズ $n \times n$ の単位行列をあらわす.

(1) 逆行列は存在するとは限らない: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ は逆行列を持たないことを示してください.

(2) ある行列の逆行列が存在すれば, それは一意に決まることを示してください．つまり，$AB = BA = E_n$ で，$AB' = B'A = E_n$ なら $B = B'$ が成り立つことを示してください.

上の (2) により，$n \times n$ 行列 A の逆行列は存在すれば一意に決まるので，それを A^{-1} で表わすことにする.

(3) $n \times n$-行列 A, B が共に逆行列を持つときには，$B^{-1}A^{-1}$ が AB の逆行列となることを示してください.

このことから，“逆行列を持つ行列の積は，また逆行列を持つ”，ということが言えることがわかる.

(4) 行列の基本変形に対応する行列はすべて逆行列を持つことを示してください.

(5) 上の (3), (4) と，第 5 回目の講義の板書の「定理」から，連立一次方程式の拡大係数行列に基本変形を繰り返して適用することで得られた行列を拡大係数行列として持つ連立一次方程式は，もとの連立一次方程式と同値になることを示してください (2 つの連立一次方程式が同値とは，それぞれの解の全体が一致することでした — 第 5 回目の講義の板書 8 ページ).

解答例と解説

次回の講義の予習． については，第 7 回目の講義の virtual な板書 (https://fuchino.ddo.jp/kobe/bbd/lin-alg-1-07-2020-06-18.pdf) を参照.

1. については，課題の解答となっている議論をまとめることで得られる定理とその証明を，以下に書き出すことにする.

$\mathbb{R}^2$ のベクトル $\mathbb{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$, $\mathbb{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ に対して，$\mathbb{a}$ と $\mathbb{b}$ の内積 $\mathbb{a} \cdot \mathbb{b} \in \mathbb{R}$ は,

$$(1) \qquad \mathbb{a}\cdot\mathbb{b} = a_1b_1 + a_2 + b_2$$

で定義されるのだった．$\mathbb{R}^1$ と $\mathbb{R}$ を自然なやりかたで同一視するとき (つまり，$[a] \leftrightarrow a$, $a \in \mathbb{R}$ という同一視で考えるとき)，内積 $\mathbb{a}\cdot\mathbb{v}$ は ${}^t\mathbb{a}\mathbb{b}$ とあらわすこともできる．ここで，${}^t\mathbb{a}$ は $\mathbb{a}$ を 2×1-行列と見たときの転置行列 $[a_1, a_2]$ で，ここでのかけ算は行列のかけ算である．計算結果は $a_1b_1 + a_2b_2$ を成分とする 1×1-行列だが，これは，$a_1b_1 + a_2b_2$ と同一視される．

まず次を証明する．

補題 1 内積は，原点を中心とする回転に関して不変である．

証明． 原点を中心として反時計回りの角度 τ の回転は，各ベクトルに $R_\tau = \begin{bmatrix} \cos\tau & -\sin\tau \\ sin\tau & \cos\tau \end{bmatrix}$ を左からかけることで実現できる．

$$(2) \qquad {}^t(R_\tau)R_\tau = \begin{bmatrix} \cos\tau & \sin\tau \\ -\sin\tau & \cos\tau \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\tau & -\sin\tau \\ \sin\tau & \cos\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (= E_2)$$

に注意する (同様に $R_\tau\,{}^t(R_\tau) = E_2$ も言えるので，実は $(R_\tau)^{-1} = {}^t(R_\tau)$ である)．
ここで，等式，${}^t(\mathbb{u}\mathbb{v}) = {}^t\mathbb{v}{}^t\mathbb{u}$ を思い出すと，

$$(3) \qquad \begin{aligned} (R_\tau\mathbb{a})\cdot(R_\tau\mathbb{b}) &= {}^t(R_\tau\mathbb{a})(R_\tau\mathbb{b}) \\ &= {}^t\mathbb{a}\,{}^t(R_\tau)R_\tau\mathbb{b} \\ &= {}^t\mathbb{a}({}^t(R_\tau)R_\tau)\mathbb{b} \\ &= {}^t\mathbb{a}E_2\mathbb{b} \\ &= {}^t\mathbb{a}\mathbb{b} \\ &= \mathbb{a}\cdot\mathbb{b} \end{aligned}$$

である． ❑ (補題 1)

$\mathbb{a} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbb{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ に対し $\mathbb{a}$ の大きさ $|\mathbb{a}|$ は，$|\mathbb{a}| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\mathbb{a}\cdot\mathbb{a}}$ だった．

定理 2 $\mathbb{a}$, $\mathbb{b} \in \mathbb{R}^2$ として $\mathbb{a} \neq \mathbb{0}$, $\mathbb{b} \neq \mathbb{0}$ とする．θ を $\mathbb{b}$ の $\mathbb{a}$ に対する反時計回りの角度とする．このとき，$\mathbb{a}\cdot\mathbb{b} = |\mathbb{a}|\,|\mathbb{b}|\cos\theta$ である．

証明． 補題1 により，必要なら全体を原点を中心に回転させて $\mathbb{a}$ は x-軸方向のベクトルとしてよい．このとき $\mathbb{a} = \begin{bmatrix} |\mathbb{a}| \\ 0 \end{bmatrix}$ で，$\mathbb{b} = \begin{bmatrix} |\mathbb{b}|\cos\theta \\ |\mathbb{b}|\sin\theta \end{bmatrix}$ である．したがって，(1) により，$\mathbb{a}\cdot\mathbb{b} = |\mathbb{a}|\,|\mathbb{b}|\cos\theta$ である． ❑ (補題 2)