

線形代数 1: 第7回目の講義 (最終回) の宿題の課題 + 解答例と解説

担当: 瀧野 昌

2020年第1クォーター (2020年08月30日 12:39版)

以下は、2020年第1クォーター開講の線形代数1の第7回目の講義の宿題の課題です。
BEEFの講義のコースのページ

[第1クォーター][1U742][1G742] 線形代数1 T 電気 (学番: 301-363)

の「アナウンスメント」の「宿題のレポートの作成方法」に従って提出してください
(提出期限: 2020/06/24/23:59).

このプリントのファイルは、

<http://fuchino.ddo.jp/kobe/lin-alg-1-2-2020-ss-report-7.pdf>

としてダウンロードできます。問題の後に解答例と解説が書き加えられています。

1. 以下の連立方程式をガウスの消去法を用いて解いてください。解法は手計算のやりやすいような工夫をしていいですが、どの基本変形をどの順序で行なっているかが分かるように、たとえば、教科書21ページの例題2.1.1の解答に準じた書き方で、行なった計算の説明を記入してください。

$$\begin{cases} x & +2z = 1 \\ 2x & +y +z = 0 \\ & y +z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 & +3x_3 = 1 \\ x_1 & +x_3 = 1 \\ x_1 & -2x_2 -5x_3 = -1 \end{cases}$$

2. (ひっかけ問題) 任意の連立一次方程式 S について、 S が解を持たないときには、ただ1つだけの方程式からなる連立一次方程式 S_0 で S と同値になるものが存在することを示してください。

3. (上級問題) 変数の (種類の) 数より式の数が真に小さい連立方程式では、一意の解が得られることはない (つまり複数の解が存在するか、あるいは全く解が存在しないかのどちらか)。これが何故か説明 (証明) してください。ちなみに、1. の連立方程式は、2つとも変数の数も式の数も3です。

4. (上級問題) (a) 連立一次方程式 S が複数の解を持つときには、 S と同値な連立方程式 S' で、 S' に現れる変数の (種類の) 数より S' に含まれる方程式の数の方が真に小さく、 S と同値であるようなものが存在することを示してください。

(b) 逆に、ある連立方程式 S で、 S と同値な連立方程式 S' のすべてについて、 S' に含まれる変数の (種類の) 数より、 S' に含まれる式の数が大きいか等しいときには、 S は唯一の解を持つことを示してください。

この課題を作成している時点 (20.06.19(金 12:53(JST))) で 第7回目の講義の virtual な板書のファイル (<https://fuchino.ddo.jp/kobe/bbd/lin-alg-1-07-2020-06-18.pdf>) はまだ完全には完成していませんが、この講義のテキストの最後の部分に 2. ~ 3. のヒントないしはほとんど解答になっているような解説を遅くとも6月20日からの週末には書き加える予定です。

解答例と解説

1. : 連立方程式

$$\begin{cases} x & +2z = 1 \\ 2x & +y & +z = 0 \\ & y & +z = 0 \end{cases}$$

の拡大係数行列に基本変形を施して変形してゆくと,

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & \text{② 行目 } -2 \times \text{① 行目} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & \text{③ 行目 } - \text{① 行目} \\ \hline 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \text{③ 行目 } \times \frac{1}{4} \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & \text{① 行目 } -2 \times \text{③ 行目} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \text{② 行目 } +3 \times \text{③ 行目} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}$$

となる. したがって, $x = 0, y = -\frac{1}{2}, z = \frac{1}{2}$ が上の連立方程式の唯一の解であることがわかる. この結果は, 連立方程式に代入してみることで検算できる.

$$\begin{cases} 0 & +2 \times \frac{1}{2} = 1 \\ 2 & +(-\frac{1}{2}) & +\frac{1}{2} = 0 \\ & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} = 0 \end{cases}$$

ただし, この検算では, この連立一次方程式の解が唯一の解であることの検証はできないことに注意する. 実は,

$$Ax = \mathbf{b} \text{ が唯一の解を持つ} \Leftrightarrow A \text{ は正則 (つまり逆行列を持つ)}$$

という同値が成り立つことが示せる (これは, 第2 quarter の最初の講義までの範囲で述べた事実を動員すると既に証明できる — 演習). したがって, A の逆行列を上の基本変形の列と同時に計算して (第2 quarter の最初の講義を参照), それが実際に逆行列になっていることを検算してみれば, この連立一次方程式の解の一意性が確かめられたことになる.

連立一次方程式

$$\begin{cases} x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -1 \end{cases}$$

の拡大係数行列に基本変形を施して変形してゆくと、

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -5 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & \text{① 行目} \Leftrightarrow \text{② 行目} \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -5 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -6 & -2 & \text{③ 行目} - \text{① 行目} \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \text{③ 行目} + 2 \times \text{② 行目} \end{array}$$

$x_3 = t$ とするとき, $x_2 = 1 - 3t$, $x_1 = 1 - t$ となるから, 解の全体は

$$\begin{Bmatrix} 1 - t \\ 1 - 3t \\ t \end{Bmatrix} : t \in \mathbb{R}$$

2. : S を x_1, \dots, x_n を変数とする連立一次方程式で解を持たないようなものとする. (線形代数 1 — 2020 年 06 月 18 日の講義 <https://fuchino.ddo.jp/kobe/bbd/lin-alg-1-07-2020-06-18.pdf> で導入した用語では, S は矛盾する). このとき S' を $0x_1 + \dots + 0x_n = 1$ のみからなる連立一次方程式とすると, S' も解を持たないから, S の解の全体も S' の解の全体も空集合となり, これらは等しい. したがって, S と S' は同値である. (2つの連立一次方程式が同値である, とは, それらの解の全体の集合が等しいことだった.)

3. : 連立方程式 $Ax = b$ が変数の数より含まれる方程式の数の方が少ない, とすると, A は横長な行列になっている. したがって, この連立一次方程式の拡大係数行列 $[A:b]$ に基本変形を複数回施して得られる簡約な階段形の行列 $[A':b']$ でも A' は A と縦横サイズの等しい, 横長な行列になっている. もし $[A':b']$ が b' の列に主成分を持てば, この主成分の含まれる行は 2. で与えた一次方程式に対応するものになっているから, $[A':b']$ に対応する連立方程式 $A'x = b'$ は解を持たず, これと同値な $Ax = b$ も解を持たない.

もし, $[A':b']$ が b' の列に主成分を持たなければ, 連立方程式 $A'x = b'$ は解を持つが, A' は横長の行列だったので, A' の列で主成分を持たないものが存在する. これを j -列とすれば, $[A':b']$ の標準的な解の表示は, x_j に対応するパラメタを持つものとなるので, 解は無限に存在する. これらの解は, $Ax = b$ の解でもある.

4. (a): 連立方程式 $Ax = b$ が複数の解を持つときには, その拡大係数行列 $[A:b]$ の複数回の基本変形により得られる簡約な階段形の行列 $[A':b']$ は, b' の列には主成分を持たないから, $[A':b']$ の主成分を持つ行の数は A' の列の数より大きい. $[A':b']$ で主成分を持つ行の下にあるすべての行は, 行ベクトルとしてのゼロベクトルだが, これは一次方程式 $0x_1 + \cdots + 0x_n = 0$ に対応するので, 変数 x_1, \dots, x_n に何の制約も加えない. したがって, これらの行 (に対応する方程式) を取り除いても, 連立方程式の意味は変わらない (取り除く前の連立方程式と同値になる.) そのようなゼロ行を取り除いて得られる拡大係数行列を $[A'':b'']$ とすれば, これに対応する連立方程式 (これは $Ax = b$ の解を与える連立方程式である) が求めるようなものになっている.
- (b): 連立方程式 $Ax = b$ について, これと同値な連立方程式の S' すべてについて, S' に含まれる変数の (種類の) 数より, S' に含まれる式の数が多いか等しい, とする. 特に $[A:b]$ に複数の基本変換を施して得られる簡約な階段形の拡大係数行列を $[A':b']$ とする. この行列のゼロベクトルになっている行をすべて覗いて得られる行列を $[A'':b'']$ とすると, (a) の答でも見たように, これは $[A':b']$ と同値になるから, A'' の行の数は変数の数より等しいか多い. A'' の各行は主成分を持つが, 主成分の数は変数より大きくなるから, A'' の行数は変数の数と等しい, したがって, A'' は正方行列になっていることがわかる. したがって, A'' のすべての列も主成分を含むので, A'' は単位行列となり, 連立方程式 $A''x = b''$ は唯一の解を持ち, これと同値な $Ax = b$ も同じ解を唯一の解として持つ.