線形代数 2: 第１回目の講義の宿題の課題 + 解答例と解説

担当: 渕野 昌 2020 年第 2 クオーター (2020 年 08 月 30 日 18:20 版)

以下は，2020 年第 2 クオーター開講の線形代数 2 の第１回目の講義の宿題の課題です．
BEEF の講義のコースのページ

[第 2 クォーター][2U742][2G742] 線形代数２ T 電気 (学番：301-363)

の「アナウンスメント」の「レポートの作成方法」に従って提出してください
(提出期限: 2020/07/07/23:59).

このプリントのファイルは,

http://fuchino.ddo.jp/kobe/lin-alg-2-2020-ss-report-1.pdf

としてダウンロードできます．問題の後に解答例と解説が書き加えられています.

1. 教科書の例題 2.4.1 に倣って，次の正方行列の逆行列を求めよ:

(a) $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ とするとき，A が正則となる条件を求めよ.

解答例と解説

$\boxed{1.}$ (a):

$$
\begin{array}{ccc:ccc l}
\hline
2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\
-1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & \\
-1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \text{①行目}\ \times\frac{1}{2} \\
-1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & \\
-1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \\
0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \text{②行目}+\text{①行目} \\
0 & -2 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & \text{③行目}+\text{①行目} \\
\hline
1 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & \text{①行目}+\text{②行目} \\
0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \\
0 & 0 & -2 & \frac{3}{2} & 2 & 1 & \text{③行目}+2\times\text{②行目} \\
\hline
1 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & \\
0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \\
0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -1 & -\frac{1}{2} & \text{③行目}\ \times(-\frac{1}{2}) \\
\hline
1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -1 & \text{①行目}+2\times\text{③行目} \\
0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & \text{②行目}+2\times\text{③行目} \\
0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -1 & -\frac{1}{2} & \\
\hline
\end{array}
$$

したがって，$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -\frac{3}{4} & -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ である．

(b):

1	1	0	0	1	0	0	0	
0	1	1	0	0	1	0	0	
0	0	1	1	0	0	1	0	
0	0	0	1	0	0	0	1	
1	0	-1	0	1	-1	0	0	① 行目 − ② 行目
0	1	1	0	0	1	0	0	
0	0	1	1	0	0	1	0	
0	0	0	1	0	0	0	1	
1	0	0	1	1	-1	1	0	① 行目 + ③ 行目
0	1	0	-1	0	1	-1	0	② 行目 − ③ 行目
0	0	1	1	0	0	1	0	
0	0	0	1	0	0	0	1	
1	0	0	0	1	-1	1	-1	① 行目 − ④ 行目
0	1	0	0	0	1	-1	1	② 行目 + ④ 行目
0	0	1	0	0	0	1	-1	③ 行目 − ④ 行目
0	0	0	1	0	0	0	1	

したがって, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ である.

$\boxed{2.}$: $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ なら, A は正則でない: この等式が成り立つなら, 任意の $B = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ に対し, $BA = \begin{bmatrix} 0 & \alpha b + \beta d \\ 0 & \gamma b + \delta d \end{bmatrix} \neq E_2$ となるから, 特に, B は A の逆行列ではない. また, この場合には, $ad - bc = 0$ となることに注意しておく.

$a \neq 0$ なら,

a	b	1	0	
c	d	0	1	
1	$\frac{b}{a}$	$\frac{1}{a}$	0	① 行目 $\times\frac{1}{a}$
c	d	0	1	
1	$\frac{b}{a}$	$\frac{1}{a}$	0	
0	$d - \frac{bc}{a}$	$-\frac{c}{a}$	1	② 行目 $-c\times$ ① 行目

と変形できるが, ここで, $d - \frac{bc}{a} = 0$ ($\Leftrightarrow ad - bc = 0$) なら A は正則でない. $ad - bc \neq 0$ なら, 更に変形を続けて,

$$
\begin{array}{cc:cc|l}
\hline
1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 & \\
0 & 1 & -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} & ② 行目 \times\frac{a}{ad-bc} \\
\hline
1 & 0 & \frac{d}{ad-bc} & \frac{b}{ad-bc} & ① 行目 -\frac{b}{a}\times ② 行目 \\
0 & 1 & -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} & \\
\hline
\end{array}
$$

となる．したがって，

(*) $\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ が A の逆行列になることがわかる．

$c \neq 0$ の場合にも同様に計算すると，$ad-bc=0$ のとき A は正則でなく，$ad-bc \neq 0$ のとき，(*) が成り立つことがわかる．

また，$\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ のときにも $ad-bc=0$ である．以上から，次がわかる．

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ が正則 $\Leftrightarrow$ $ad-bc \neq 0$ が成り立つ．

$ad-bc \neq 0$ のときには，$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ である．

上の課題の解答とこれからの講義の関連性: 上の 2×2-行列の正則性の判定条件で出てきた，$ad-bc$ は，第３回目の講義ので定義される概念を用いると，2×2-行列 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ の行列式 (determinant) です．今 quater のハイライトの一つは，行列が正則であることと，行列式が 0 でないことの同値性ですが，上の問題の答は，このことの 2×2-行列に特化したときの，特殊例となっています．ちなみに，日本語の「行列式」は英語での determinant とはかなり異るニュアンスの用語になっています．“determinant” という単語は，「determine (決定する) する因子」という意味の単語で，行列式の意味で使われるときには，行列の特性を決定する因子というニュアンスの用語になっています．