線形代数 2: 第２回目の講義の宿題の課題 + 解答例と解説

担当: 渕野 昌 **2020 年第 2 クオーター (2020 年 07 月 16 日 12:41 版)**

以下は，2020 年第 2 クオーター開講の線形代数 2 の第 2 回目の講義の宿題の課題です．
BEEF の講義のコースのページ

[第 2 クォーター][2U742][2G742] 線形代数２ T 電気 (学番：301-363)

の「アナウンスメント」の「レポートの作成方法」に従って提出してください
(提出期限: 2020/07/14/23:59).

このプリントのファイルは,

http://fuchino.ddo.jp/kobe/lin-alg-2-2020-ss-report-2.pdf

としてダウンロードできます．提出期限後に，ファイルを拡張して解答例とコメントを書き加えます.

1. 次に答えてください.

(1) 巡回置換 $(2\ 4\ 3\ 1) \in S_n$ (ただし $n \geq 4$) の逆置換を求めてください.

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} = (2\ 4\ 3\ 1)\sigma$ となるような置換 σ を求めてください．この σ を互換の積に分解してください.

(3) 巡回置換 $(1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ を互換の積に分解してください．以上.

解答例と解説

(1): (2 4 3 1) の逆置換は (1 3 4 2) である．
より一般的には，$(k_1\ k_2\ \cdots\ k_{n-1}\ k_n)$ の逆置換は，$(k_n\ k_{n-1}\ \cdots\ k_2\ k_1)$ である．これを見るためには，$(k_1\ k_2\ \cdots\ k_{n-1}\ k_n)(k_n\ k_{n-1}\ \cdots\ k_2\ k_1) = \varepsilon$,
$(k_n\ k_{n-1}\ \cdots\ k_2\ k_1)(k_1\ k_2\ \cdots\ k_{n-1}\ k_n) = \varepsilon$ となることを確かめればよい (線形代数 2 — 2020 年 07 月 09 日の講義 (https://fuchino.ddo.jp/kobe/bbd/lin-alg-2-02-2020-07-09.pdf) の最新ヴァージョンに書き加えられている補題 2.6 を参照．).

(2): $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} = (2\,4\,3\,1)\sigma$ の両辺に $(2\,4\,3\,1)^{-1}$ を左からかけると, $(2\,4\,3\,1)^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} = (2\ 4\ 3\ 1)^{-1}(2\ 4\ 3\ 1)\sigma = \varepsilon\sigma = \sigma$ である．

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \\ \\ (2\ 4\ 3\ 1)^{-1}{=}(1\ 3\ 4\ 2) \end{array}$$

だから,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} = (3\ 5) \text{ である．}$$

(3): 線形代数 2 — 2020 年 07 月 09 日の講義
(https://fuchino.ddo.jp/kobe/bbd/lin-alg-2-02-2020-07-09.pdf)
の補題 2.5 の証明のアイデアを使うと,

$$(1\ 2\ 3\ 4\ 5) = (1\ 5)(1\ 4)(1\ 3)(1\ 2)$$