線形代数 2: 第３回目の講義の宿題の課題 ＋ 解答例と解説

担当: 渕野 昌 2020 年第 2 クオーター (2020 年 07 月 29 日 14:28 版)

以下は，2020 年第 2 クオーター開講の線形代数 2 の第 3 回目の講義の宿題の課題です．
BEEF の講義のコースのページ

[第 2 クォーター][2U742][2G742] 線形代数２　T 電気 (学番：301-363)

の「アナウンスメント」の「レポートの作成方法」に従って提出してください
(提出期限: 2020/07/21/23:59).

このプリントのファイルは，

http://fuchino.ddo.jp/kobe/lin-alg-2-2020-ss-report-3.pdf

としてダウンロードできます．提出期限後に，ファイルを拡張して解答例とコメントを書き加えます．

1. 次の置換の偶奇性を決定してください．答えの理由を説明してください．

(a) $(2\ 4\ 3\ 1)$　(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

2. 以下の主張の証明は，教科書の中をさがすと，どこかに載っています (来週の講義でも詳しく見ることになります．)．ただし，それほど難しくないはずなので，まず自分で考えてみて，分らなかったら教科書を参考してみることを勧めます．

(a) $A_0 = \begin{bmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$ として，

$A = [a_{i,j}]$ を A_0 を (上で与えた添字を保存して) 拡張する $n \times n$-行列で，すべての $1 < j \leq n$ に対し，$a_{1,j} = 0$ となるものとします．このとき，$det(A) = a_{1,1}det(A_0)$ が成り立つことを示してください．(**ヒント:** 行列式の定義から直接導けます．どの $\sigma \in S_n$ に対し，$a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$ がゼロになるかを考えてください．)

(b) 任意の $n \times n$ 行列 A に対し，$\det(A) = \det({}^tA)$ となることを示してください．(**ヒント／コメント:** この問題が，ここでの 3 つの問題の中できちんとやろうとすると一番やっかいな問題だと思います．教科書では，定理 3.3.1 がこれに対応しますが，そこに載っている説明 (証明) は完璧ではあるけれど，完全に理解するには，かなり行間を補う必要があると思います．次回の講義ではこの行間を補った説明をする予定ですが，皆さんに先回りしてそれを試みてもらう，というのが，この課題の趣旨です．)

(c) 再び $A_0 = \begin{bmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$ として，

$A = [a_{i,j}]$ を A_0 を (上で与えた添字を保存して) 拡張する $n \times n$-行列で，すべての $1 < i \leq n$ に対し，$a_{i,1} = 0$ となるものとします．このとき，$det(A) = a_{1,1}det(A_0)$ が成り立つことを示してください．(**ヒント:** (a) と (b) を組み合わせることで示せます．)

$\boxed{3.}$ 次の行列式を計算してください．

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & -2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

ヒント: (c) は，$\boxed{2.}$,(c) を応用して計算できます．
以上.

解答例と解説

$\boxed{1.}$ (a): 2020 年 07 月 09 日の講義 (https://fuchino.ddo.jp/kobe/bbd/lin-alg-2-02-2020-07-09.pdf) の補題 2.5 の証明のアイデアを用いると，$(2\ 4\ 3\ 1) = (2\ 4)(2\ 3)(2\ 1)$ となる．したがって $(2\ 4\ 3\ 1)$ は 3 つの互換の積として表わせるので，$sgn(2\ 3\ 5\ 1) = (-1)^3 = -1$ である．

(b): $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ は，$1 \mapsto 2 \mapsto 4 \mapsto 3 \mapsto 5 \mapsto 1$ と移し，（つまり $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 4$, $\sigma(4) = 3$, $\sigma(3) = 5$, $\sigma(5) = 1$），$\sigma(6) = 6$ だから，$\sigma = (1\ 2\ 4\ 3\ 5)$ である．したがって (a) と同様の互換の積への分解から $sgn(\sigma) = (-1)^4 = 1$ であることがわかる．

$\boxed{2.}$ (a): $\sigma \in S_n$ に対し，$\sigma(1) \neq 1$ なら，$a_{1,\sigma(1)} = 0$ だから，

$$\begin{aligned} det(A) &= \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)} \\ &= \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1)=1}} sgn(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)} \\ &= a_{1,1} \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1)=1}} sgn(\sigma) a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)} \\ &= a_{1,1} \sum_{\sigma \in S_{n-1}} sgn(\sigma) a_{1+1,\sigma(1)+1}\ a_{2+1,\sigma(2)+1}\ \cdots\ a_{n,\sigma(n-1)+1} \\ &= a_{1,1} det(A_0) \end{aligned}$$

である．最後の 2 つの行の式の同等性は，A_0 の (i,j) 成分が，A の $(i+1, j+1)$ 成分であることに留意すると示せる．

(b): これは，第 4 回の講義 [2] の定理 4.1 の証明として細説した．

(c): $A = [a_{i,j}]$ を $n \times n$-行列で，すべての $1 < i \leq n$ に対し，$a_{i,1} = 0$ となるものとして，A_0 問題でのようなものとすると，${}^tA$ は (a) の条件を満たすものになっていて，その $(1,1)$-成分は $a_{1,1}$ で，${}^tA$ に対し，(a) での A_0 に対応するのは ${}^t(A_0)$ である．したがって，(b) から，$det(A) = det({}^tA) = a_{1,1} det({}^t(A_0)) = a_{1,1} det(A_0)$ である．

$\boxed{3.}$ (a), と (b) はそれぞれ，第 3 回の講義 [1] での，例 3.1 と 例 3.2, (b) での式を用いて計算できる．

(a): $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4\ -\ 3 \times 2 = -2.$

(b): $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 3 \times 2\ +\ 2 \times 1 \times 3\ +\ 3 \times 2 \times 1\ -\ (1 \times 1 \times 1\ +\ 2 \times 2 \times 2\ +\ 3 \times 3 \times 3) = -18.$

(c): $\boxed{2.}$, (c) を 2 回適用すると，

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & -2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \times \begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \times (-2) \times \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 3 \times (-2) \times \Big(2 \times 2 \times 2 \;+\; 1 \times 1 \times 4 \;+\; (-1) \times 3 \times 3 \;-\; (2 \times 1 \times 3 \;+\; 1 \times 3 \times 2 \;+\; (-1) \times 2 \times 4) \Big) = 6.$$

参考文献

[1] 渕野 昌，2020 年 7 月 16 日の講義のファイル
https://fuchino.ddo.jp/kobe/bbd/lin-alg-2-03-2020-07-16.pdf

[2] 渕野 昌，2020 年 7 月 23 日の講義のファイル
https://fuchino.ddo.jp/kobe/bbd/lin-alg-2-04-2020-07-23.pdf

[3] 三宅 敏恒，線形代数学 — 初歩からジョルダン標準形へ，培風館 (2008).