線形代数 2: 第４回目の講義の宿題の課題 ＋ 解答例と解説

担当: 渕野 昌

2020 年第 2 クオーター (2020 年 07 月 30 日 21:19 版)

以下は，2020 年第 2 クオーター開講の線形代数 2 の第４回目の講義の宿題の課題です．
BEEF の講義のコースのページ

[第 2 クォーター][2U742][2G742] 線形代数２　T 電気 (学番：301-363)

の「アナウンスメント」の「レポートの作成方法」に従って提出してください
(提出期限: 2020/07/28/23:59).

このプリントのファイルは，

http://fuchino.ddo.jp/kobe/lin-alg-2-2020-ss-report-4.pdf

としてダウンロードできます．問題の後に解答例とコメントが書き加えられています．

$\boxed{\;1.\;}$ A を $n \times n$-行列として，$A = [\,\mathbb{a}_1\ \mathbb{a}_2\ \cdots\ \mathbb{a}_n\,]$ とする．ある $1 \leq j \leq n$ に対して $\mathbb{a}_j = \mathbb{0}$ のとき，$\det(A) = 0$ となることを示せ．(ヒント: [1] での補題 4.6, (3) を用いる)

$\boxed{\;2.\;}$ A を $n \times n$-行列として，$A = [\,\mathbb{a}_1\ \mathbb{a}_2\ \cdots\ \mathbb{a}_n\,]$ とする．

(1) 2 つの異る $1 \leq j,\ j' \leq n$ に対し，$\mathbb{a}_j = \mathbb{a}_{j'}$ なら，$\det(A) = 0$ となることを示せ．(ヒント: [1] での補題 4.6, (1) を用いる)

(2) 2 つの異る $1 \leq j,\ j' \leq n$ と，ある $c \in \mathbb{R}$ に対し，$\mathbb{a}_j = c\,\mathbb{a}_{j'}$ なら，$\det(A) = 0$ となることを示せ．(ヒント: 上の (1) と [1] での補題 4.6, (3) を用いる)

$\boxed{\;3.\;}$ A を $n \times n$-行列として，$A = [\,\mathbb{a}_1\ \mathbb{a}_2\ \cdots\ \mathbb{a}_n\,]$ とする．

(1) 2 つの異る $1 \leq j,\ j' \leq n$ と $c \in \mathbb{R}$ に対し，A' を A の第 j 列 $\mathbb{a}_j$ を $\mathbb{a}_j + c\mathbb{a}_{j'}$ で置き換えて得られる行列とするとき，$det(A) = det(A')$ となることを示せ．(ヒント: [1] での補題 4.6, (2) と上の $\boxed{\;2.\;}$, (2) を用いる)

(2) ある，$1 \leq j \leq n$ に対して，$c_k \in \mathbb{R}$ で，$\mathbb{a}_j = \displaystyle\sum_{k \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{j\}} c_k \mathbb{a}_k$ となるものがあるとき，$det(A) = 0$ となることを示せ．(ヒント: $\boxed{\;1.\;}$ と，$\boxed{\;3.\;}$, (1) と，[1] での補題 4.6, (2) を用いる)

参考文献

[1] 渕野 昌，2020 年 7 月 23 日の講義のファイル
https://fuchino.ddo.jp/kobe/bbd/lin-alg-2-04-2020-07-23.pdf

[2] 三宅 敏恒，線形代数学 — 初歩からジョルダン標準形へ，培風館 (2008).

解答例と解説

今回の課題はすべて第５回の講義 [3] で示されている．以下では，いくつかの命題については直接証明を与えてみる．

$\boxed{1.}$ これは，[3] の補題 5.3, (0) である．これは [1] での補題 4.6, (3) から，直接，[3] の補題 5.1, (0) と同様に証明することもできる．

$\boxed{2.}$ (1): [3], 補題 5.3, (1).

(2): 簡単のために, $j < j'$ と仮定する．($j' < j$ の場合も同様に示せる．) [1] の補題 4.6, (3) と, 上の (1) により, $det(A) = det(\begin{bmatrix} \mathbb{a}_1 & \cdots & \mathbb{a}_j & \cdots & \mathbb{a}_{j'} & \cdots & \mathbb{a}_n \end{bmatrix}) = det(\begin{bmatrix} \mathbb{a}_1 & \cdots & c\mathbb{a}_{j'} & \cdots & \mathbb{a}_{j'} & \cdots & \mathbb{a}_n \end{bmatrix}) = c\ det(\begin{bmatrix} \mathbb{a}_1 & \cdots & \mathbb{a}_{j'} & \cdots & \mathbb{a}_{j'} & \cdots & \mathbb{a}_n \end{bmatrix}) = 0$ である．

$\boxed{3.}$ (1) :[1] の補題 4.6, (2) により，

$$det(A') = det([\ \mathbb{a}_1\ \cdots\ \underbrace{\mathbb{a}_j + c\mathbb{a}_{j'}}_{j\ 列}\ \cdots\ \mathbb{a}_n\ ]) = det([\ \mathbb{a}_1\ \cdots\ \underbrace{\mathbb{a}_j}_{j\ 列}\ \cdots\ \mathbb{a}_n\ ]) + \underbrace{det([\ \mathbb{a}_1\ \cdots\ \overbrace{c\mathbb{a}_{j'}}^{j\ 列}\ \cdots\ \mathbb{a}_n\ ])}_{=0 \qquad \boxed{2.}\ ,\ (2)\ による}$$

$$= det(A)$$

である．

(2):

$$\begin{aligned} det(A) &= det([\ \mathbb{a}_1\ \cdots\ \overbrace{\mathbb{a}_j - \sum_{k\in\{1,\ldots,n\}\setminus\{j\}} c_k\mathbb{a}_k}^{j\ 列}\ \cdots\ \mathbb{a}_n\ ]) && (1)\ による \\ &= det([\ \mathbb{a}_1\ \cdots\ \underbrace{\mathbb{0}}_{j\ 列}\ \cdots\ \mathbb{a}_n\ ]) = 0 && \boxed{1.}\ による. \end{aligned}$$

参考文献 (2/2)

[3] 渕野 昌，2020 年 7 月 30 日の講義 (5 回目) のファイル
https://fuchino.ddo.jp/kobe/bbd/lin-alg-2-05-2020-07-30.pdf