線形代数 2: 第５回目の講義の宿題の課題 ＋ 解答例と解説

担当: 渕野 昌 **2020 年第 2 クオーター (2020 年 08 月 10 日 02:14 版)**

以下は，2020 年第 2 クオーター開講の線形代数 2 の第５回目の講義の宿題の課題です．
BEEF の講義のコースのページ

[第 2 クォーター][2U742][2G742] 線形代数２　T 電気 (学番：301-363)

の「アナウンスメント」の「レポートの作成方法」に従って提出してください
(提出期限: 2020/08/04/23:59).

このプリントのファイルは,

http://fuchino.ddo.jp/kobe/lin-alg-2-2020-ss-report-5.pdf

としてダウンロードできます．提出期限後に，ファイルを拡張して解答例とコメントを書き加えます.

---

1. 次の行列式の計算をしてください．なるべく計算手順が少なくてすむ計算法を工夫してください．どのような計算で値を求めているか，なぜその計算が正しいかが分かるような説明を加えてください．また，その計算法がなぜ他の方法に比べて計算手順が少ないのかを説明してください．

(a)
$$\begin{vmatrix} -8 & -7 & -6 & -5 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix}$$

(b)
$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 9 \\ 1 & 3 & 0 & 7 \\ 4 & 3 & 0 & 7 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

2. $n > 1$ として，$\sigma \in S_n$ を $\sigma \neq \varepsilon_n$ とするとき，$1 \leq i \leq n$ で，$\sigma(i) > i$ となるものが常に存在することを示してください.

解説: この事実は，今回の講義 (https://fuchino.ddo.jp/kobe/bbd/lin-alg-2-05-2020-07-30.pdf) の補題 5.2 の証明で用いています.

(**ヒント．** 一つの証明方法は: まず，巡回置換についてこの性質が成り立つことを示して，このことから一般の場合についてもこの性質が成り立つことを導く．別の証明方法として，背理法と数学的帰納法を組み合わせて示す方法もある．)

解答例と解説

$\boxed{1.}$ (a): 成分が規則的な行列の行列式は値が簡単に求まることが多い．この例でも，第５回の講義 (https://fuchino.ddo.jp/kobe/bbd/lin-alg-2-05-2020-07-30.pdf) の補題 5.1 の (2) と (1) により，

$$\begin{vmatrix} -8 & -7 & -6 & -5 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{2\text{ 行目-1 行目，4 行目-3 行目}} \begin{vmatrix} -8 & -7 & -6 & -5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

となることがわかる．

(2): ラプラス展開を行列の第 3 列に適用して，そこで得られた 3×3-行列の 3 列目のラプラス展開を行なうと，

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 9 \\ 1 & 3 & 0 & 7 \\ 4 & 3 & 0 & 7 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} \times 5 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 4 & 3 & 7 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 5 \times ((-1)^{1+3} \times 7 \times \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \times 7 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix})$$

$$= 5 \times (4 \times 2 - 5 \times 3 - (1 \times 2 - 3 \times 5)) = 210$$

$\boxed{2.}$: まず，σ が循回置換のときに，主張が成り立つことを示す．$\sigma = (\, k_1 \;\; k_2 \;\; \cdots \;\; k_\ell \,)$ とする，$\sigma \neq \varepsilon_n$ だから，$\ell > 2$ である．したがって，k を $\{k_1, k_2, ..., k_\ell\}$ のうちの最大のもとすると，$\{k_1, k_2, ..., k_\ell\}$ の中の k 以外もので（これを k_i とする）$\sigma(k_i) = k$ となるものがあるが k の選び方から，$k_i < \sigma(k_i)$ である．

$\sigma \in S_n$ を任意の置換とすると, 第２回目の講義 (https://fuchino.ddo.jp/kobe/bbd/lin-alg-2-02-2020-07-09.pdf) の補題 2.4 の証明の後半により，S_n の巡回置換で σ の部分となっているものがある．したがって，上で示したことから，σ の，この巡回置換の部分で，$k < \sigma(k)$ となる $1 \leq k \leq n$ が見つかる．