線形代数 2: 第６回目の講義の宿題の課題 ＋ 解答例と解説

担当: 渕野 昌 2020 年第 2 クオーター (2020 年 08 月 13 日 23:29 版)

以下は，2020 年第 2 クオーター開講の線形代数 2 の第６回目の講義の宿題の課題です．
BEEF の講義のコースのページ
[第 2 クォーター][2U742][2G742] 線形代数２　Ｔ 電気 (学番：301-363)
の「アナウンスメント」の「レポートの作成方法」に従って提出してください
(提出期限: 2020/08/11/23:59).

このプリントのファイルは，

http://fuchino.ddo.jp/kobe/lin-alg-2-2020-ss-report-6.pdf

としてダウンロードできます．提出期限後に，ファイルを拡張して解答例とコメントを書き加えます．

1. 今回の講義 [4] の定理 6.5 を応用して，$\mathbb{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 14 \end{bmatrix}$, $\mathbb{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$ とするとき，ベクトル $\mathbb{a}$, $\mathbb{b}$ を 2 辺とする三角形の面積を求めてください．

2. (1) $\mathbb{R}^3$ の原点を中心とする任意の回転 ρ の表現行列 R^ρ が $det(R^\rho) = 1$ を満たすことを示してください．

ヒント: $\mathbb{R}^3$ の原点を中心とする回転は，x 軸のまわりの回転，y 軸のまわりの回転，z 軸の回りの回転を合成することで実現できます．これらの回転はそれぞれ，(それぞれの回転角度を θ_x, θ_y, θ_z として)，行列

$$R_x(\theta_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & -sin\theta_x \\ 0 & \sin\theta_x & \cos\theta_x \end{bmatrix},\ R_y(\theta_y) = \begin{bmatrix} \cos\theta_y & 0 & \sin\theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y \end{bmatrix},\ R_z(\theta_z) = \begin{bmatrix} \cos\theta_z & -sin\theta_z & 0 \\ \sin\theta_z & \cos\theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

で表現できます．これらの行列の行列式が 1 であることを確かめると，今回の講義 [4] の定理 6.2 から，これらの行列の積としてあらわされる ρ の表現行列も行列式が 1 になることが帰結できます．

(2) 3×3-行列 A に対し，$A = \begin{bmatrix} \mathbb{a}_1 & \mathbb{a}_2 & \mathbb{a}_3 \end{bmatrix}$ として，R^ρ を (1) でのようなものとするとき，$det(A) = det(\begin{bmatrix} R^\rho\mathbb{a}_1 & R^\rho\mathbb{a}_2 & R^\rho\mathbb{a}_3 \end{bmatrix})$ となることを示してください．

ヒント: 上の (1) を用いて今回の講義 [4] の系 6.4 でのようにして示せます．

(3) 上の (2) を用いて，今回の講義 [4] の定理 6.6 を証明してください．**ヒント:** 上の (2) を用いて，今回の講義 [4] の定理 6.5 と類似の議論で示せます．

3. 先学期の第７回の講義 [1] での行列の基本変換の表現行列 $S^m_k(c)$, $T^m_{k,\ell}$, $R^m_{k,\ell}(d)$ について，これらの行列の行列式を求めてください．

4. 今回の講義 [4] の定理 6.2 の応用で，次を示してください:
任意の正則な $n \times n$-行列 A に対して $det(A) \neq 0$ が成り立つ．

解説: 実は，この命題の逆:「 $\det(A) \neq 0$ なら A は正則である」 も成り立つことを次週の講義で示します．

References

[1] 渕野 昌，第 1 quarter の 2020 年 6 月 18 日の講義 (7 回目) のファイル
https://fuchino.ddo.jp/kobe/bbd/lin-alg-1-07-2020-06-18.pdf

[2] 渕野 昌，2020 年 7 月 23 日の講義 (4 回目) のファイル
https://fuchino.ddo.jp/kobe/bbd/lin-alg-2-04-2020-07-23.pdf

[3] 渕野 昌，2020 年 7 月 30 日の講義 (5 回目) のファイル
https://fuchino.ddo.jp/kobe/bbd/lin-alg-2-05-2020-07-30.pdf

[4] 渕野 昌，2020 年 8 月 6 日の講義 (6 回目) のファイル
https://fuchino.ddo.jp/kobe/bbd/lin-alg-2-06-2020-08-06.pdf

[5] 渕野 昌，2020 年 8 月 13 日の講義 (7 回目) のファイル
https://fuchino.ddo.jp/kobe/bbd/lin-alg-2-07-2020-08-13.pdf

解答例と解説

$\boxed{1.}$: $det([\mathbb{a}\ \mathbb{b}])$ の絶対値は，ベクトル $\mathbb{a}$ と $\mathbb{b}$ のはる平行四辺形の面積になるのだった (第 6 回の講義 [4], 定理 6.5)．したがって，これらのベクトルを 2 辺とする三角形の面積は，$\frac{1}{2}\cdot|det([\mathbb{a}\ \mathbb{b}])|$ である．これを計算すると，$\frac{1}{2}\cdot|2\times 4-14\times(-3)|=25$ である．

$\boxed{2.}$ (1): [3] のラプラス展開 (余因子展開) の公式 (6.5), (6.6) から，

$$det(R_x(\theta_x)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & -sin\theta_x \\ 0 & \sin\theta_x & \cos\theta_x \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\times 1\times \begin{vmatrix} \cos\theta_x & -sin\theta_x \\ \sin\theta_x & \cos\theta_x \end{vmatrix} = 1$$

である．同様に，$det(R_y(\theta_y))=1$ $det(R_z(\theta_z))=1$ も言える．$\mathbb{R}^3$ の任意の原点を中心とした回転の行列 R^ρ は，θ_x, θ_y, θ_z をうまく選ぶと $R^\rho=R_x(\theta_x)\ R_y(\theta_y)\ R_z(\theta_z)$ とあらわせるので，[4] の定理 6.2 により，

$$det(R^\rho)=det(R_x(\theta_x)R_y(\theta_y)R_z(\theta_z))=det(R_x(\theta_x))\cdot det(R_y(\theta_y))\cdot det(R_z(\theta_z))=1$$

である．

(2): (1) と [4] の定理 6.2 により，

$$det(\begin{bmatrix} R^\rho\mathbb{a}_1 & R^\rho\mathbb{a}_2 & R^\rho\mathbb{a}_3 \end{bmatrix}) = det(R^\rho\begin{bmatrix} \mathbb{a}_1 & \mathbb{a}_2 & \mathbb{a}_3 \end{bmatrix}) = det(R^\rho)\cdot det(\begin{bmatrix} \mathbb{a}_1 & \mathbb{a}_2 & \mathbb{a}_3 \end{bmatrix}) = det(\begin{bmatrix} \mathbb{a}_1 & \mathbb{a}_2 & \mathbb{a}_3 \end{bmatrix})$$

である．

(3): 上の (2) により，必要なら原点を中心とした回転を施して，$\mathbb{a}_1$ は x 軸上の正の方向のベクトルで $\mathbb{a}_2$ は xy-平面上のベクトルとしてよい，$\mathbb{a}_2$ も x-軸上のベクトルなら，$\mathbb{a}_1$, $\mathbb{a}_2$, $\mathbb{a}_3$ の張る平行六面体は，つぶれていて体積は 0 だが，この場合には $det(\begin{bmatrix} \mathbb{a}_1 & \mathbb{a}_2 & \mathbb{a}_3 \end{bmatrix})$ も 0 になるから，主張は成り立っている，同様に，$\mathbb{a}_3$ についても，z-成分が 0 でない場合を考えればよいことがわかる．したがって，a, b, c, d, e, $f\in\mathbb{R}$ で，$a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$ かつ，
$\mathbb{a}_1=\begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbb{a}_2=\begin{bmatrix} b \\ c \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbb{a}_3=\begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}$ となるものがとれる．したがって, [3] 補題 5.2 により, $\begin{vmatrix} \mathbb{a}_1 & \mathbb{a}_2 & \mathbb{a}_3 \end{vmatrix}=acf$ だが，$|acf|$ はこの平行六面体の体積である．仮定から $a>0$ だが，c と d の符号の組合せ全部と対応する $\mathbb{a}_1$, $\mathbb{a}_2$, $\mathbb{a}_3$ の空間配置を調べると，定理の後半の主張も成り立つことが確かめられる．

$\boxed{3.}$: $det(E_m)=1$ に留意すると，$S_k^m(c)=c$ ([2], 補題 4.5, (3) による)
$T_{k,\ell}^m=-1$ ([2], 補題 4.5, (1) による)
$R_{km\ell}^m(d)=1$ ([3], 補題 5.1, (2) による)

$\boxed{4.}$: この証明は，[5] の系 7.2 の証明に含まれている．