# 線形代数 2: 第７回目の講義の宿題の課題 ＋ 解答例と解説

担当: 渕野 昌 2020 年第 2 クオーター (2020 年 08 月 26 日 14:43 版)

以下は，2020 年第 2 クオーター開講の線形代数 2 の第７回目の講義の宿題の課題です．
BEEF の講義のコースのページ

[第 2 クォーター][2U742][2G742] 線形代数２　Ｔ 電気 (学番：301-363)

の「アナウンスメント」の「レポートの作成方法」に従って提出してください
(提出期限: 2020/08/20/23:59).

このプリントのファイルは，

http://fuchino.ddo.jp/kobe/lin-alg-2-2020-ss-report-7.pdf

としてダウンロードできます．提出期限後に，ファイルを拡張して解答例とコメントを書き加えます．

**1.** $A$ を正則な $3\times 3$ 行列として，$A=\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3}\\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3}\end{bmatrix}$ とするとき，講義 [4] の系 7.2 の主張の特別な場合として，$A^{-1}$ を与える式を $det(A)$, $\begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3}\\ a_{3,2} & a_{3,3}\end{vmatrix}$ etc. を使って書き下してください．

**2.** $A$ を正則な $2\times 2$ 行列として，$A=\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2}\\ a_{2,1} & a_{2,2}\end{bmatrix}$ として，$\mathbb{b}=\begin{bmatrix} b_1\\ b_2\end{bmatrix}$ とするとき，クラメールの公式の特別な場合として，変数 $\mathbb{x}=\begin{bmatrix} x_1\\ x2\end{bmatrix}$ に対する方程式 $A\mathbb{x}=\mathbb{b}$ の解を与える式を求めてください．

**3.** $A$ を正則な $n\times n$-行列で ($n>1$ とする)，$A=[\,\mathbb{a}_1\ \cdots\ \mathbb{a}_n\,]$ として $\mathbb{b}=\mathbb{a}_1+\mathbb{a}_n$ とする．このとき，

(a) クラメールの公式を用いて，方程式 $A\mathbb{x}=\mathbb{b}$ の解を求めてください．

(b) 上の (a) で求めた解は，$A$ が正則でなくても $A\mathbb{x}=\mathbb{b}$ の解になっていることを示してください．

**4.** 次の議論で，下線をひいた部分 $(a)$, $(b)$, $(c)$ の主張がなぜ正しいかを説明してください．(なぜ正しいかの説明は，「講義 (または教科書) の定理 ... によりよい」という説明で十分な場合も，もう少し説明を追加しなければならない場合もあります．)

> $A$ を $n\times n$-行列として，$\mathbb{x}=\begin{bmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$ として，方程式 $A\mathbb{x}=\mathbb{0}$ を考える．$\mathbb{x}=\mathbb{0}$ は常にこのような方程式の解だが，$\mathbb{c}\neq\mathbb{0}$ がこの方程式の解であるとき，つまり $A\mathbb{c}=\mathbb{0}$ となるとき，$\mathbb{c}$ は $A\mathbb{x}=\mathbb{0}$ の自明でない解である．という．
>
> **定理．** $A\mathbb{x}=\mathbb{0}$ が自明でない解を持つ $\Leftrightarrow$ $det(A)=0$.
>
> **注意．** 講義 [4] でも見たように，$det(A)=0$ は $A$ が正則でないことと同値である．したがって，

$A\mathbb{x} = \mathbb{0}$ が自明でない解を持つ $\Leftrightarrow$ $A$ は正則でない,

である.

**定理の証明:** $A\mathbb{x} = \mathbb{0}$ が自明でない解 $\mathbb{c}$ を持つなら, $det(A) = 0$ である: もし, $\underline{det(A) \neq 0 \text{ だったとすると}, A^{-1} \text{ が存在するから}}_{(a)}$ $\mathbb{c} = (A^{-1}A)\mathbb{c} = A^{-1}(A\mathbb{c}) = A^{-1}\mathbb{0} = \mathbb{0}$ となり, $\mathbb{c}$ が自明でない解であることに矛盾である.

逆に $\det(A) = 0$ として $A\mathbb{x} = \mathbb{0}$ が自明でない解を持つことを示す. 行列 $A$ に基本変形を複数回施して, 簡約な階段形の行列 $A'$ が得られたとして, この基本変形の複数回の施行に対応する行列を $B$ とする. $BA = A'$ である. $\underline{A' = E_n \text{ なら}, det(A) \neq 0 \text{ となる}}_{(b)}$ から, $A' \neq E_n$ である. したがって, $\underline{\text{方程式 } A\mathbb{x} = \mathbb{0} \text{ は複数の解を持つ}}_{(c)}$ から, 特に, この方程式は自明でない解を持つ. □

$\boxed{5.}$ 上の $\boxed{4.}$ で証明した定理を用いて, $\boxed{3.}$ での行列 $A, \mathbb{b}$ について, $A$ が正則でないときには, $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ は必ず $\boxed{3.}$,(1) で求めた解以外の解も持つことを示してください. **ヒント:** $\mathbb{s}$ が $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ の解で, $\mathbb{s}'$ が $A\mathbb{x} = \mathbb{0}$ の解なら, $\mathbb{s} + \mathbb{s}'$ は $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ の解であることを示して, このことと $\boxed{3.}$ を用いる. (以上)

**発展問題 (宿題の範囲外だが, 意味をなす解答に対しては, 加点がある可能性あり/ただし, 意味をなさない解答に対してはマイナス点の加点の可能性もある)**

以下の $\boxed{A2.}$ は, 講義で, これまでに導入した, 定理や論法を用いて容易に示せるものです.

ベクトル $\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_k \in \mathbb{R}^n$ が線型独立であるとは, 任意の $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ に対して, $c_1\mathbb{a}_1 + \cdots + c_k\mathbb{a}_k = \mathbb{0}$ となるなら, (実は) $c_1 = \cdots = c_k = 0$ となっていること (あるいは, 対偶命題をとって, 任意の $\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} \neq \mathbb{0}$ に対して, $c_1\mathbb{a}_1 + \cdots + \mathbb{a}_k \neq \mathbb{0}$ が成り立つこと) とする[1].

$\boxed{A1.}$ 次を証明してください:

ベクトル $\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_k \in \mathbb{R}^n$ が線型独立でない $\Leftrightarrow$ ある $i \in \{1, \ldots, k\}$ に対し, $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ で, $\mathbb{a}_i = \displaystyle\sum_{\substack{j \in \{1, \ldots, k\} \\ j \neq i}} c_j \mathbb{a}_j$ となるものが存在する.

$\boxed{A2.}$ $\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_n \in \mathbb{R}^n$ に対し (ベクトルの個数と空間の "次元" はともに $n$ で等しい), 次の命題 (A) 〜 (F) がすべて互いに同値であることを示してください.

(A) $\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_n$ は線型独立である.

(B) $det([\,\mathbb{a}_1 \ \cdots \ \mathbb{a}_n\,]) \neq 0$.

(C) $A\mathbb{x} = \mathbb{0}$ は自明でない解を持たない. ((B) $\Leftrightarrow$ (C) は既に $\boxed{4.}$ で証明済み)

(D) $A$ は正則である. ((B) と (D) の同値性も今回の講義 [4] で証明済み)

(E) すべての $\mathbb{b} \in \mathbb{R}^n$ に対し, $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ は解を持つ.

(F) すべての $\mathbb{b} \in \mathbb{R}^n$ は $\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_n$ の線形結合として書ける.

次は, $\boxed{A2.}$ を用いると容易に示せる:

$\boxed{A3.}$ $k < n$ なら任意の $\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_k \in \mathbb{R}^n$ に対し, $\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_k$ の線形結合としてあらわせない $\mathbb{R}^n$ の要素が存在する.

[1]ベクトル $\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_k \in \mathbb{R}^n$ に対して, $c_1\mathbb{a}_1 + \cdots + c_k\mathbb{a}_k$ $(c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R})$ の形のベクトルの和を, $\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_k \in \mathbb{R}^n$ の**線形結合**とよびます.

## References


[1] 第４回目の講義 (https://fuchino.ddo.jp/kobe/bbd/lin-alg-2-04-2020-07-23.pdf)

[2] 第５回目の講義 (https://fuchino.ddo.jp/kobe/bbd/lin-alg-2-05-2020-07-30.pdf)

[3] 第６回目の講義 (https://fuchino.ddo.jp/kobe/bbd/lin-alg-2-06-2020-08-06.pdf)

[4] 今回の講義のファイル (https://fuchino.ddo.jp/kobe/bbd/lin-alg-2-07-2020-08-13.pdf)

## 解答例と解説

$\boxed{1.}$:

$$A^{-1}=\frac{1}{det(A)}\begin{bmatrix} a^*_{1,1} & a^*_{1,2} & a^*_{1,3} \\ a^*_{2,1} & a^*_{2,2} & a^*_{2,3} \\ a^*_{3,1} & a^*_{3,2} & a^*_{3,3} \end{bmatrix}=\frac{1}{det(A)}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,3} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$\boxed{2.}$: $x_1=\dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{1,2} \\ b_2 & a_{2,2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}}=\dfrac{b_1a_{2,2}-a_{1,2}b_2}{a_{1,1}a_{2,2}-a_{1,2}a_{2,1}}$, $\qquad x_2=\dfrac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & b_1 \\ a_{2,1} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}}=\dfrac{a_{1,1}b_2-b_1a_{2,1}}{a_{1,1}a_{2,2}-a_{1,2}a_{2,1}}$.

$\boxed{3.}$, (1): $A_i=[\mathbb{a}_1\ \cdots\ \overset{i}{\mathbb{b}}\ \cdots\mathbb{a}_n\ ]$ とすると，$\mathbb{b}=\mathbb{a}_1+\mathbb{a}_n$ だから，第 4 回目の講義 [1] の補題 4.6, (2) と，第 5 回目の講義 [2] の補題 5.3, (1) により，

$$det(A_i)=\begin{cases} 0, & i\notin\{1,n\} \text{ のとき；} \\ det(A), & i\in\{1,n\} \text{ のとき} \end{cases}$$

となることがわかる．したがって，今回の講義 [4] の定理 7.5 (クラメールの公式) により，

$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ が $A\mathbb{x}=\mathbb{b}$ の (唯一の) 解である．(一意性は $A$ が正則であることから導かれる).

(2): $\begin{bmatrix} \mathbb{a}_1 & \cdots & \mathbb{a}_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\mathbb{a}_1+\mathbb{a}_n$ だから，$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ は $A$ が正則でないときにも解となっている．ただし，このときには，$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 以外にも解が存在する ($\boxed{5.}$ を参照).

$\boxed{4.}$ (a): 今回の講義 [4] の系 7.2 によりよい．
(b): $det(A')=det(E_n)=1\neq 0$ なので，$\det(A')=det(BA)\underbrace{=}_{\text{第 6 回目の講義 [3], 定理 6.2}}det(B)det(A)$ により，$det(A)\neq 0$ である．

(c): $[\,A'\,\vdots\,\mathbb{0}]$ は $A\mathbb{x}=\mathbb{0}$ の拡大係数行列 $[\,A'\,\vdots\,\mathbb{0}]$ と同値だが，$A'$ は簡約な階段形をしているので，$A'\neq E_n$ により $[\,A'\,\vdots\,\mathbb{0}]$ の右端の列でない列で主成分を持たないものがある．したがって，方程式 $A'\mathbb{x}=\mathbb{0}$ ($\Leftrightarrow A\mathbb{x}=\mathbb{0}$) は無限個の解を持つ．

$\boxed{5.}$: $A$ が正則でないなら，$\boxed{4.}$ により，$A\mathbb{x} = \mathbb{0}$ は自明でな解 $\mathbb{c}$ を持つ．$\mathbb{s}$ を，$\boxed{3.}$ でのような $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ の解とすると，$A(\mathbb{c} + \mathbb{s}) = \underbrace{A\mathbb{c}}_{=\mathbb{0}} + \underbrace{A\mathbb{s}}_{=\mathbb{b}} = \mathbb{b}$ だから，$\mathbb{c} + \mathbb{s}$ も $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ の解である．

$\boxed{\text{A1.}}$: $\mathbb{a}_1, ..., \mathbb{a}_k \in \mathbb{R}^n$ が線型独立でないとすると，線型独立性の定義から，$\begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $\begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} \neq \mathbb{0}$ で，$\displaystyle\sum_{i\in\{1,\ldots,k\}} d_i\mathbb{a}_i = \mathbb{0}$ となるものが存在する．このとき $i \in \{1, ..., k\}$ で，$d_i \neq 1$ となるものがとれるが，$j \in \{1, ..., k\} \setminus \{i\}$ に対し $c_j = -\dfrac{d_j}{d_i}$ とすれば，$\mathbb{a}_i = \displaystyle\sum_{j\in\{1,\ldots,n\}\setminus\{i\}} c_j\mathbb{a}_j$ である．

逆にある $i \in \{1, ..., k\}$ に対し $\mathbb{a}_i = \displaystyle\sum_{j\in\{1,\ldots,n\}\setminus\{i\}} c_j\mathbb{a}_j$ なら, $j \in \{1, ..., n\}$ に対し, $d_j = \begin{cases} -c_j, & j \neq i \text{ のとき}; \\ 1, & j = i \text{ のとき} \end{cases}$ とすれば，$\begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} \neq \mathbb{0}$ で，$\displaystyle\sum_{i\in\{1,\ldots,k\}} d_i\mathbb{a}_i = \mathbb{0}$ となる．したがって，$\mathbb{a}_1, ..., \mathbb{a}_k$ は線型独立でない．

$\boxed{\text{A2.}}$: (B) $\Leftrightarrow$ (C): $\boxed{4.}$ で証明済み．(B) $\Leftrightarrow$ (C): 今回の講義 [4] の系 7.2.
(B) $\Rightarrow$ (A): 対偶を示す．$\mathbb{a}_1, ..., \mathbb{a}_n$ が線型独立でないとすると，$\boxed{\text{A1.}}$ により，ある $i \in \{1, ..., n\}$ 対し，$c_1$,..., $c_k \in \mathbb{R}$ で，$\mathbb{a}_i = \displaystyle\sum_{j\in\{1,\ldots,k\}\setminus\{i\}} c_j\mathbb{a}_j$ となるものが存在する．
このとき，

$$det(A) = det([\,\mathbb{a}_1\ \cdots\ \mathbb{a}_i, ..., \mathbb{a}_n\,]) = det([\,\mathbb{a}_1\ \cdots\ \overbrace{\sum_{j\in\{1,\ldots,k\}\setminus\{i\}} c_j\mathbb{a}_j}^{i}\ , ..., \mathbb{a}_n\,])$$

$$\underbrace{=}_{[1]\ \text{補題 } 4.6,(2),(3)} \sum_{j\in\{1,\ldots,k\}\setminus\{i\}} \underbrace{det([\,\mathbb{a}_1\ codots\ \overbrace{\mathbb{a}_j}^{i}, ..., \mathbb{a}_n\,])}_{=0,\ [2]\ \text{補題 } 5.3,(1)} = 0$$

である．

(A) $\Rightarrow$ (C): 対偶を示す．$A\mathbb{x} = \mathbb{0}$ が自明でない解 $\mathbb{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ を持つとすると，$\mathbb{c} \neq \mathbb{0}$ で，

$\mathbb{0} = A\mathbb{c} = [\,\mathbb{a}_1\ \cdots\ \mathbb{a}_n\,]\,\mathbb{c} = \displaystyle\sum_{i\in\{1,\ldots,n\}} c_i\mathbb{a}_i$ だから，$\mathbb{a}_1, ..., \mathbb{a}_n$ は線型独立でない．

(D) $\Rightarrow$ (E): $A$ が正則なら $A$ の逆行列 $A^{-1}$ が存在するが，任意の $\mathbb{b} \in \mathbb{R}^n$ に対し，$A^{-1}\mathbb{b}$ は $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ の解である．

(E) $\Rightarrow$ (F): (E) を仮定する．$\mathbb{b} \in \mathbb{R}^n$ に対し，$\mathbb{c}$ を $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ の解とすると，$\mathbb{b} = A\mathbb{c} = [\,\mathbb{a}_1\ ...\ \mathbb{a}_n\,]\,\mathbb{c} = \displaystyle\sum_{i\in\{1,\ldots,n\}} c_i\mathbb{a}_i$ だから，$\mathbb{b}$ は $\mathbb{a}_1, ..., \mathbb{a}_n$ の線形結合として書ける．

(F) $\Rightarrow$ (D): (F) を仮定する．各 $i \in \{1, ..., n\}$ に対し，$\mathbb{b}_i$ を方程式 $A\mathbb{x} = \mathbb{e}_i$ の解とする．$B = [\,\mathbb{b}_1\ \cdots\ \mathbb{b}_n]$ とすると，$AB = E_n$ となるから，[4], 補題 7.3 により，$B$ は $A$ の逆行列である．したがって $A$ は正則である． q.e.d.

$\boxed{\text{A3.}}$ $k < n$ として，ある $\mathbb{a}_1, ..., \mathbb{a}_k \in \mathbb{R}^n$ に対し，すべての $\mathbb{b} \in \mathbb{R}^n$ が $\mathbb{a}_1, ..., \mathbb{a}_k$ の線形結合として表されると仮定して，矛盾を示す．このときには $\mathbb{a}_{k+1} = \cdots = \mathbb{a}_n = \mathbb{0}$ とすると，すべての $\mathbb{b} \in \mathbb{R}^n$ は，$\mathbb{a}_1, ..., \mathbb{a}_n$ の線形結合として表される から，$\boxed{\text{A2.}}$ により，$A = [\ \mathbb{a}_1\ \cdots\ \mathbb{a}_n\ ]$ は正則である．ところが零ベクトルとなる行を含む正方行列は正則ではありえないから，これは矛盾である．