線形代数学 I — $\mathbb{R}^2$ 上の線形変換

渕野 昌 (Sakaé Fuchino)

2020 年 05 月 23 日

以下は 2015 年 5 月 14 日に行った平面上の線形変換に関する講義の講義録に手を加えたものに，2020 年の 5 月に行なったインターネット上の講義の講義録の内容を加えたものである．これらの講義の内容は教科書から離れたものになっていたため，その内容をここに書き出した．

$$\mathbb{R}^2 = \{ \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} : u, v \in \mathbb{R}\}$$

だった．より一般には，任意の $n = 1, 2, 3, \ldots$ に対し，$\mathbb{R}^n$ を n-次元縦ベクトルの全体とする．

$$\mathbb{R}^n = \{ \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} : u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}\}$$

である．

$\mathbb{R}^2$ の要素である 2 次元列ベクトル $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ は，xy-平面上の点 (x, y) と同一視したり，xy-平面上の原点から点 (x, y) に向けて伸びている長さと方向を持った矢印 — 平面ベクトル — と同一視することができて，この同一視で，平面の幾何学に関する議論 (の一部) が $\mathbb{R}^2$ のベクトルに関する議論に翻訳できる．同様に $\mathbb{R}^3$ の要素は，xyz-空間の点あるいは空間ベクトルと同一視することができ，$\mathbb{R}^4$ は時空の点あるいは 4 次元空間ベクトルと同一視できる．

φ が $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への変換 (transformation) (写像 (mapping), 関数 (function) という名称も同じ意味で用いられる) であるとは，φ が $\mathbb{R}^2$ の各ベクトル $\mathbf{a}$ に対して，$\mathbb{R}^2$ のベクトル $\varphi(\mathbf{a})$ を対応させるもの (しくみ，規則など) であることである．

ex-0

例 0.1 (1) 回転 (rotation): 角度 θ に対し

$$
\begin{aligned}
\text{(0.1)} \quad & \rho_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; \\
& \mathbf{a} \mapsto \rho_\theta(\mathbf{a}) = \text{平面ベクトルとしての } \mathbf{a} \text{ を原点を中心に角度} \\
& \qquad \theta \text{ だけ左回りに回転させて得られる平面ベクトル}
\end{aligned}
$$

(2) 平行移動 (translation) $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ に対し，各ベクトル $\mathbf{a}$ に対応する平面上の点に対し，この点を $\mathbf{b}$ だけ平行移動したときに得られるベクトル $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ を返す変換.

$$
\begin{aligned}
\text{(0.2)} \quad & t_{\mathbf{b}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; \\
& \mathbf{a} \mapsto \mathbf{a}+\mathbf{b}
\end{aligned}
$$

変換 $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が与えられたとき，図形 $X \subseteq \mathbb{R}^2$ に対し，X の変換 φ による像 $\varphi[X] = \{\varphi(\mathbf{a}) : \mathbf{a} \in X\}$ を考えることができる．例えば上の例では，$\rho_\theta[X]$ は図形 X を原点を中心に角度 θ だけ回転して得られる図形で，$t_{\mathbf{b}}[X]$ は図形 X を $\mathbf{b}$ だけ平行移動して得られる図形となっている．

A を 2×2-行列とするとき，変換 $\varphi_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を，$\mathbb{R}^2 \ni \mathbf{a} \mapsto A\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ で定義する．

たとえば $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ のとき，$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} au+bv \\ cu+dv \end{bmatrix}$ だから，$\varphi_A(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} au+bv \\ cu+dv \end{bmatrix}$ である．

行列の計算の基本法則を思い出すと，φ_A は，任意の $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ とスカラー $c \in \mathbb{R}$ に対し，

$$\text{(0.3)} \quad \varphi_A(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = A(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = A\mathbf{a} + A\mathbf{b} = \varphi_A(\mathbf{a}) + \varphi_A(\mathbf{b})$$ v-0

$$\text{(0.4)} \quad \varphi_A(c\mathbf{a}) = A(c\mathbf{a}) = cA\mathbf{a} = c\varphi_A(\mathbf{a})$$ v-1

である．

任意の $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への変換 φ が (0.3), (0.4) に対応する性質: すべての $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$, $c \in \mathbb{R}$ に対し，

$$\text{(0.5)} \quad \varphi(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \varphi(\mathbf{a}) + \varphi(\mathbf{b})$$ v-2

$$\text{(0.6)} \quad \varphi(c\mathbf{a}) = c\varphi(\mathbf{a})$$ v-3

を満たすとき，φ は線形変換 (または，線型写像) であるという．特に，任意の 2×2-行列 A に対し，上でのような φ_A は線形変換である．実は，以下の定理 0.2 で示すように，このことの逆も成り立つ．

L-0

補題 0.1 $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が線形変換であることと，すべてのベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ とスカラー $c, d \in \mathbb{R}$ に対して

$$\varphi(c\mathbf{a}+d\mathbf{b}) = c\varphi(\mathbf{a}) + d\varphi(\mathbf{b}) \tag{0.7}$$ v-4

が成り立つことは同値である．

証明. φ が線形変換なら， すべてのベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ とスカラー c, $c\mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} \varphi(c\mathbf{a}+d\mathbf{b}) &= \varphi(c\mathbf{a}) + \varphi(d\mathbf{b})\,; \quad \text{(0.5) による} \\ &= c\varphi(\mathbf{a}) + d\varphi(\mathbf{b})\,; \quad \text{(0.6) による} \end{aligned}$$

だから，(0.7) が成り立つ．

逆に，(0.7) が成り立つとすると，(0.7) で $c=1$, $d=1$ とすると，(0.5) が成り立つことがわかり，$d=0$ とすると (0.6) が成り立つことがわかる． ❏ (補題 0.1)

Th-0

定理 0.2 すべての 線形変換 $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ に対し，2×2-行列 A で，$\varphi = \varphi_A$ となるものがただ1つ存在する．

証明. $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を線形変換として，$\varphi(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}) = \begin{bmatrix}a\\c\end{bmatrix}$, $\varphi(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}) = \begin{bmatrix}b\\d\end{bmatrix}$ とする．このとき $A = \begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ が求めるようなものになっている: 任意の $\mathbf{a} = \begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}$ に対し，

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{a}) = \varphi(\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}) &= \varphi(u\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + v\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}) \\ &= u\varphi(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}) + v\varphi(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}) && ;\ \text{補題 0.1 による} \\ &= u\begin{bmatrix}a\\c\end{bmatrix} + v\begin{bmatrix}b\\d\end{bmatrix} && ;\ \begin{bmatrix}a\\c\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}b\\d\end{bmatrix} \text{ の定義による} \\ &= \begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix} = A\cdot\mathbf{a} = \varphi_A(\mathbf{a}) \end{aligned}$$

となるから，$\varphi = \varphi_A$ である．このような A の存在が一意であることは， $A \neq A'$ なら $\varphi_A \neq \varphi_{A'}$ となることから明らかである． ❏ (定理 0.2)

線型変換 φ に対し，$\varphi = \varphi_A$ となるような行列 A を φ の表現行列とよぶことにする．上の定理の証明を用いると線型変換の表現行列が求められる．

ex-0-0

例 0.2 例 0.1, (1) での ρ_θ が線型変換になることは容易に確かめられる．

$$\rho_\theta(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}) = \begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{bmatrix},\ \rho_\theta(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}) = \begin{bmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{bmatrix}$$

だから，定理 0.2 とその証明から，

$$A_\theta = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

とすると，この A_θ は ρ_θ の表現行列になる．つまり，$\rho_\theta = \varphi_{A_\theta}$ である．ρ_θ は各ベクトルを原点を中心として角度 θ だけ回転させる変換だから，上の等式は，「A_θ は角度 θ の回転を惹き起こす」，と読み下すこともできる．

補題 0.3 $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を線形変換とするとき，$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ として，$\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ である．

証明． (0.3) により，$\varphi(\mathbf{0}) = \varphi(0\mathbf{0}) = 0\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ である． ❑ (補題 0.3)

ex-1

例 0.3 $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ なら，例 0.1, (2) での $t_\mathbf{b}$ は $t_\mathbf{b}(\mathbf{0}) = \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ だから，線形変換ではない．

逆に，$\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ だったとしても φ が線形変換になるとは限らない:

ex-2

例 0.4 $\varphi(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} u \\ v^2 \end{bmatrix}$ で φ を定義すると，$\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ だが，たとえば，$\varphi(2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}) = \varphi(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ だが，$2\varphi(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}) = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ だから，φ は (0.6) を満たさない．したがって，φ は線形変換ではない．

線型変換の例を更に挙げておく．

(0) ゼロ写像 (すべての $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ に対し $\varphi(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$) は線形変換である (表現行列: 零行列 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$)．

(1) 恒等変換 (何も動かさない変換), つまりすべての $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ に対し, $\varphi(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ は線形変換である．(表現行列: 単位行列 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$)．

(2) 鏡像変換 (reflection). (a) x 軸を境界とする鏡像 ($\varphi(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} u \\ -v \end{bmatrix}$, 表現行列: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$)．

(b) y 軸を境界とする鏡像 ($\varphi(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} -u \\ v \end{bmatrix}$, 表現行列: $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$)．

(c) 直線 $y = x$ 境界とする鏡像 ($\varphi(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\varphi(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, 表現行列: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$)．etc.

(3) ねじれ (shear).

$(\varphi(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\varphi(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} k \\ 1 \end{bmatrix}$, 表現行列: $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$).

(4) 拡大／縮小 (scaling).

(a) x 軸方向への比率 $r > 0$ での拡大縮小 (表現行列: $\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$)

(b) y 軸方向への比率 $r > 0$ での拡大縮小 (表現行列: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}$)

(5) 射影 (projection).

(a) y 軸への射影 (表現行列: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}$

(b) x 軸への射影 (表現行列: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$