線形代数 II

淵野 昌 (Sakaé Fuchino)

2015 年 07 月 24 日

以下は，2015 年前期の，神戸大学での私の担当の線形代数 II の講義の講義録です．講義で話したことの再現に近いものになっていますが，補足や訂正をした箇所や，講義とは多少異る道筋の議論を行なっているところもあります．現在のところ具体的な出版の計画はありませんが，後で，このテキストの改良／拡張をコンパクトな線形代数の教科書にまとめることもあるかもしれません．間違いの指摘やコメントを歓迎します.

このテキストの最新版は

http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/kobe/lin-alg2-ss15-LN.pdf

としてダウンロードできます．また，この講義の一年半前に英語で行った同様の内容の講義の講義録

http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/kobe/lin-alg2-ws13-14LN.pdf

も参考になると思います.

あなたが見ているのは，このテキストの

2015 年 07 月 24 日 (17:08JST) 版です.

その他の関連の参考資料は:

http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/kobe/index.html

からダウンロードできます.

目 次

1 ベクトル空間と部分空間

vector-space

$\mathbb{R}$ で実数の全体を表わす．つまり $\mathbb{R}$ は数直線上の点に対応するような数の全体である．A を集合とするとき $x \in A$ で「x は集合 A に要素として属す」ということを表現するものとする．たとえば $a \in \mathbb{R}$ と書いたときには，これは「a を一つの実数とする」あるいは 「a は一つの実数である」という表明の略記と考える．

n を自然数とするとき，$\mathbb{R}^n$ で，実数を成分として持つ n-次元列ベクトルの全体を表わす．つまり，

$$\text{(1.1)} \quad \mathbb{R}^n = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} : a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R} \right\} \qquad \text{vcsp-1}$$

である．

$\mathbb{R}^1 = \{\begin{bmatrix} a \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R}\}$ だが，実数 a と一次元列ベクトル $\begin{bmatrix} a \end{bmatrix}$ を同一視することで，$\mathbb{R}^1$ は $\mathbb{R}$ と同一視されることが多い．

$$\text{(1.2)} \quad \mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} : a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\} \qquad \text{vcsp-2}$$

の各要素 $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ は，xy-平面上の座標 (a_1, a_2) を持つ点と同一視されたり，原点 $(0, 0)$ から点 (a_1, a_2) に向って引かれた (長さと方向を持つ，矢印つき) 直線 (平面ベクトル) と同一視される．特に後者の同一視では，平面ベクトルの和とスカラー倍[1)] が列ベクトルの和とスカラー倍

$$\text{(1.3)} \quad \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{bmatrix}, \ \alpha \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \end{bmatrix} \qquad \text{vcsp-2-a}$$

に対応する．同様の対応は，

$$\text{(1.4)} \quad \mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} : a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\} \qquad \text{vcsp-2-0}$$

の要素と，xyz-空間の座標で表される点や空間ベクトルの間にも成立する．

$\mathbb{R}^n$ をベクトルの和とスカラー倍の演算の随伴する構造と見るとき，これを n-次元ベクトル空間 (あるいは n-次元実ベクトル空間) とよぶ．

n-次元ベクトル空間の要素のうち，零ベクトル，単位ベクトルと呼ばれる次の形のベクトルは以下で重要な役割を果すことになる．

[1)] $\mathbb{R}$ の要素は，列ベクトルの倍演算 (例えば $\alpha \in \mathbb{R}$ として，ベクトル $\mathbf{a}$ から $\mathbf{a}$ の α 倍 $\alpha\mathbf{a}$ を得る演算) の文脈ではスカラーと呼ばれる．この用語はドイツ語の „Skalar“ から来ていると思われるが，英語では日本語にもなっている「スケール」と同じ語幹を持つ “scaler” (スケーラー) である．

零ベクトル $\mathbf{0}$ (次元が n であることを明らかにする必要があるときには $\mathbf{0}_n$ と書くことにする) はすべての成分が 0 であるような n-次元列ベクトルである.

$$(1.5)\qquad \mathbf{0} = \left.\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\quad\right\} n$$ vcsp-3

自然数 n と $1 \leq i \leq n$ に対し，i 番目の n-次元単位ベクトル $\mathbf{e}_i^n$ は，i-成分が 1 で他の成分はすべて 0 であるような n-次元列ベクトルである.

$$\mathbf{e}_i^n = \left.\begin{array}{ll} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{array} \end{array}\right\} n$$

上の (1.3) でと同様に $[a_i], [b_i] \in \mathbb{R}^n$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し，

$$(1.6)\qquad [a_i] + [b_i] = [a_i + b_i],\ \ \alpha[a_i] = [\alpha a_i]$$

として n 次元列ベクトルの和とスカラー倍が定義される.

n-次元ベクトル空間での，このベクトルの和とスカラー倍に対して，以下のような基本性質が成り立つことは容易に確かめられる:

th-vecsp-1

定理 1.1 任意の $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ と α, $\beta \in \mathbb{R}$ に対して，次が成り立つ:

(1) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$.

(2) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$.

(3) $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$.

(4) $\alpha(\beta\mathbf{u}) = (\alpha\beta)\mathbf{u}$.

(5) $(\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}$.

(6) $\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$.

(7) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$.

(8) $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Exercise-0

演習問題 1.2 上の定理で列挙した性質 (1) ∼ (8) から，以下の性質が導かれることを示せ:

(1) $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

(2) すべての $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し，$\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$ である.

(3) すべての $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ と $a \in \mathbb{R}$ に対し，$\alpha\mathbf{u} - \alpha\mathbf{u} = \mathbf{0}$ が成り立つ[2)]．特に，$\mathbf{u} - \mathbf{u} = \mathbf{0}$ である.

[2)] $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ と $\beta \in \mathbb{R}$ に対し，$\mathbf{u} - \beta\mathbf{v}$ で $\mathbf{u} + (-\beta)\mathbf{v}$ を表わす.

空でない集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ が $\mathbb{R}^n$ の部分空間 (subspace) であるとは[3)],

(1.7) 任意の S の要素 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ とスカラー α, β に対し，$\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$ も S の要素になる vcsp-4

ことである.

L-a

補題 1.3 空でない集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ が $\mathbb{R}^n$ の部分空間であることは，次の 2 つの条件が成り立つことと同値である:

(1.8) 任意の S の要素 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ に対し $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ も S の要素である. vcsp-5

(1.9) 任意の S の要素 $\mathbf{u}$ と，スカラー α に対し，$\alpha\mathbf{u}$ も S の要素である. vcsp-6

証明. S が $\mathbb{R}^n$ の部分空間とすると (つまり (1.7) が成り立つとすると)，$\alpha = \beta = 1$ と置くことで (1.8) が得られ，$\mathbf{v} = \mathbf{0}$, $\beta = 0$ と置くことで，(1.9) が得られる.

一方，(1.8) と (1.9) を仮定して，$\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in S$, α, $\beta \in \mathbb{R}$ とすると，(1.9) から $\alpha\mathbf{u} \in S$, $\beta\mathbf{v} \in S$ で，これと (1.8) から，$\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} \in S$ である. □ (補題 1.3)

以下の 2 つの部分空間の例は，トリビアル (trivial) なものである[4)]:

Ex-0

例 1.1 (1) $\{\mathbf{0}\} \subseteq \mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^n$ の部分空間である.

(2) $\mathbb{R}^n$ 自身は $\mathbb{R}^n$ の部分空間である.

Ex-1

例 1.2 (1) $S_1 = \{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,:\, a_1 + a_2 = 1\}$ は $\mathbb{R}^2$ の空でない部分集合だが，$\mathbb{R}^2$ の部分空間ではない. [たとえば $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in S_1$ だが，$2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \notin S_1$ だし，$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \notin S_1$ でもある.]

(2) $S_2 = \{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,:\, a_1 + a_2 = 0\}$ とすると，S_2 は $\mathbb{R}^2$ の部分空間である.

演習問題 1.4 (1) 例 1.2, (2) の主張が成り立つことを示せ.

(2) 例 1.2, (1), (2) の S_1, S_2 はそれぞれ平面上のどのような図形に対応するか？

L-0

補題 1.5 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ を $\mathbb{R}^n$ の部分空間とする. このとき

---

3) 集合 A, B に対して $A \subseteq B$ で「A は B の部分である」を表わす. これは，A のすべての要素が B の要素でもあることである. 集合は要素によって完全に決定すると考えるので，$A \subseteq B$ かつ $B \subseteq A$ なら $A = B$ である.

4) “trivial” は,「自明」という日本語に (無理に) 訳されることが多いが，対応する日本語のない，しかし英語では頻繁に用いられる単語である.「あほらしい」というようなニュアンスで日常会話でも用いられるが，OED には，数学用語として，“giving rise to no difficulty or interest.” という語義が載っている.

(1) $\mathbf{0} \in S$ である．

(2) 任意の $k \in \mathbb{N}$ と，$\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k \in S$, $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{R}$ に対し，$\alpha_1\mathbf{a}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{a}_k \in S$ である．

証明． (1): S は空でないので，ある要素 $\mathbf{a} \in S$ がとれる．このとき，(1.9) により $\mathbf{0} = 0\mathbf{a} \in S$ である．

(2): $k = 1$ のときにはこの主張は (1.9) であり，$k = 2$ のときは，主張は S が部分空間であることの定義そのものである．したがって，k に対して，主張が成り立つとすると，$k + 1$ のときにも主張が成り立つことが示せれば，帰納法により，すべての $k \in \mathbb{N}$ に対し，主張が成り立つことが帰結できる．

$\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_{k+1} \in S$ で，$\alpha_1, ..., \alpha_{k+1} \in \mathbb{R}$ とする．このとき，$\alpha_1\mathbf{a}_1 + \cdots \alpha_k\mathbf{a}_k + \alpha_{k+1}\mathbf{a}_{k+1} = (\alpha_1\mathbf{a}_1 + \cdots \alpha_k\mathbf{a}_k) + \alpha_{k+1}\mathbf{a}_{k+1}$ だが，帰納法の仮定から，$\alpha_1\mathbf{a}_1 + \cdots \alpha_k\mathbf{a}_k \in S$ だから，(1.7) により，$\alpha_1\mathbf{a}_1 + \cdots \alpha_k\mathbf{a}_k + \alpha_{k+1}\mathbf{a}_{k+1} \in S$ がわかる． □ (補題 1.5)

$X \subseteq \mathbb{R}^n$ が空でない集合のとき，

$$[X]_{\mathbb{R}^n} = \{\alpha_1\mathbf{a}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{a}_k : k \in \mathbb{N}, \mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k \in X, \alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{R}\} \tag{1.10}$$

とする．

L-1

補題 1.6 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ を任意の空でない集合とする．このとき，

(1) $[X]_{\mathbb{R}^n}$ は $\mathbb{R}^n$ の部分空間である．

(2) $X \subseteq [X]_{\mathbb{R}^n}$ で，$[X]_{\mathbb{R}^n}$ は X を部分集合として含むような $\mathbb{R}^n$ の部分空間のうち $\subseteq$ に関して最小のものとなる．

証明． (1): $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in [X]_{\mathbb{R}^n}$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ を任意にとる．このとき，$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} \in [X]_{\mathbb{R}^n}$ となることを示せばよい．

十分に大きな n と，ある $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n \in X$, $\alpha_1, ..., \alpha_n$, $\beta_1, ..., \beta_n \in \mathbb{R}$ に対し，

$$\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{a}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{a}_n, \qquad \mathbf{b} = \beta_1\mathbf{a}_1 + \cdots + \beta_n\mathbf{a}_n \tag{1.11}$$ vcsp-6-0

と表わすことができる[5]．このとき，$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$ は

$$(\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1)\mathbf{a}_1 + \cdots + (\alpha\alpha_n + \beta\beta_n)\mathbf{a}_n \tag{1.12}$$

となるから，$[X]_{\mathbb{R}^n}$ の要素であることがわかる．

(2): 任意の $\mathbf{x} \in X$ に対し，$\mathbf{x} = 1\mathbf{x}$ だから，$\mathbf{x} \in [X]_{\mathbb{R}^n}$ である．したがって，$X \subseteq [X]_{\mathbb{R}^n}$ である．

---

[5] (1.14) の後の注意を参照．

$S \subseteq \mathbb{R}^n$ を $\mathbb{R}^n$ の部分空間で，$X \subseteq S$ を満たすものとする．このとき，補題1.5, (2) により，任意の $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k \in X \subseteq S$ と $\alpha_1,\ldots,\alpha_k \in \mathbb{R}$ に対し，$\alpha_1\mathbf{a}_1+\cdots+\alpha_k\mathbf{a}_k \in S$ となる．したがって，$[X]_{\mathbb{R}^n} \subseteq S$ である． □ (補題 1.6)

$[X]_{\mathbb{R}^n}$ は X の張る (あるいは X の生成する) $\mathbb{R}^n$ の部分空間と呼ばれる．この "X の張る部分空間" という表現の背景となっている幾何学的直観については，以下の例 1.3 を参照されたい．

$\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ が，$\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n$ と $\alpha_1,\ldots,\alpha_k \in \mathbb{R}$ によって，

$$(1.13)\quad \mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{a}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{a}_k$$ vcsp-7

と表わされるという状況は以降繰り返し考察されることになる．$\alpha_1\mathbf{a}_1+\cdots+\alpha_k\mathbf{a}_k$ という形のベクトルの和のことを $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ の線型結合，あるいは，$\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ の係数 (または重み) $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ 付きの線型結合と呼ぶ．また，(1.13) のような，$\alpha_1,\ldots,\alpha_k \in \mathbb{R}$ が存在するとき，$\mathbf{a}$ は $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ の線型結合として表される，という．この言葉遣いを用いると，

$$(1.14)\quad [X]_{\mathbb{R}^n} = \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a} \text{ は } X \text{ の幾つかの要素の線型結合として表わせる}\}$$ vcsp-8

である．

$\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_\ell \in \mathbb{R}^n$ で，$1 \le k < \ell$ のとき，$\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ が $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ の線型結合として表わせれば，$\mathbf{a}$ は $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_\ell$ の線型結合としても表わせる: $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{a}_1+\cdots+\alpha_k\mathbf{a}_k$ だとして，$\alpha_{k+1} = \cdots = \alpha_\ell = 0$ とすれば，$\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{a}_1+\cdots+\alpha_k\mathbf{a}_k+\alpha_{k+1}\mathbf{a}_{k+1}+\cdots+\alpha_\ell\mathbf{a}_\ell$ だからである．既出の (1.11) はこの事実を用いて容易に示せるし，以下の (1.15) もこのことから直ちに導ける．

演習問題 1.7 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ が有限集合のとき，たとえば $X = \{\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k\}$ とすると，

$$(1.15)\quad [X]_{\mathbb{R}^n} = \{\alpha_1\mathbf{a}_1+\cdots+\alpha_k\mathbf{a}_k : \alpha_1,\ldots,\alpha_k \in \mathbb{R}\}$$ vcsp-9

である．

Ex-2

例 1.3 (0) $X = \{\mathbf{0}\}$ のとき，$[X]_{\mathbb{R}^n} = \{\mathbf{0}\}$ である．

(1) $X = \{\mathbf{a}\}$ で $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ のとき，$[X]_{\mathbb{R}^n} = \{\alpha\mathbf{a} : \alpha \in \mathbb{R}\}$ となる．更に，$\mathbf{b} \in [X]_{\mathbb{R}^n}$ に対し，$\mathbf{b} = \alpha\mathbf{a}$ となるような α は一意に決まる．$n = 2$ または $n = 3$ のときには，$[X]_{\mathbb{R}^n}$ ($[\{\mathbf{a}\}]_{\mathbb{R}^n}$) は，原点と $\mathbf{a}$ (に対応する点) を通る直線上の点の全体に対応する集合となる．

(2) $X = \{\mathbf{a},\mathbf{b}\}$ で $\mathbf{b}$ は $[\{\mathbf{a}\}]_{\mathbb{R}^n}$ の要素でないとき，$[X]_{\mathbb{R}^n} = \{\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b} : \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$ で，各 $\mathbf{c} \in [X]_{\mathbb{R}^n}$ に対し，$\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}$ となる $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ は一意に決まる．後で示すことになるベクトル空間の次元に関する議論から，$n = 2$ のときには，$[X]_{\mathbb{R}^2}$

は $\mathbb{R}^2$ と一致することが示せる．$n=3$ のときには，$[X]_{\mathbb{R}^3}$ は，原点と $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ に対応する空間の点を含む平面の点 (に対応するベクトル) の全体となる．

(3) $[\mathbb{R}^n]_{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n$ である． ❑

上の (3) は補題 1.6, (2) から明らかである．

n が 3 より大きいときには，$\mathbb{R}^n$ は物理的な平面や空間に対応しないが[6]，そのような場合にも，$[\{\mathbf{a}\}]_{\mathbb{R}^n}$ や $[\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}]_{\mathbb{R}^n}$ をそれぞれ，$\mathbf{a}$ の張る $\mathbb{R}^n$ の直線，$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の張る $\mathbb{R}^n$ の平面とよぶことがある．

演習問題 1.8 S_2 を例 1.2, (2) での $\mathbb{R}^2$ の部分空間とするとき，$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ とすると，$S_2 = [\{\mathbf{b}\}]_{\mathbb{R}^2}$ となることを示せ．

2 線型写像

lin-mapping

f がある集合 X から集合 Y への写像 (mapping) である[7] とは，f が X の各要素 x に対し，ある Y の要素 $f(x)$ を対応させることである．f が X から Y への写像であるとき，このことを $f : X \to Y$ と表わす．

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が線型写像 (または線型変換) であるとは，任意の $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ と $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}$ に対し

$$(2.1) \quad f(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{u}) + \beta f(\mathbf{v})$$ vcsp-10

が成り立つことである．

補題 1.3 と同様に以下が成り立つ:

L-2

補題 2.1 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が線型写像であることは，以下の 2 つの条件が成り立つことと同値である:

(2.2) すべての $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ に対し，$f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$ である． vcsp-11

(2.3) すべての $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し，$f(\alpha\mathbf{u}) = \alpha f(\mathbf{u})$ である． ❑ vcsp-12

補題 1.5 に対応して，次の補題が成り立つ:

L-3

補題 2.2 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を線型写像とする．このとき

(1) $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ である．

---

[6] $n = 4$ の場合には時空という解釈はまだ可能である．

[7] 写像という用語の代わりに「関数 (function)」や「変換 (transformation)」という用語が使われることがある．これらの用語は，場合によってはそれぞれ多少のニュアンスの違いを伴って使われることもあるが，本稿ではあまり区別せず，同じ意味の用語として使うことにする．

(2) 任意の $k \in \mathbb{N}$ と $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^n$, $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{R}$ に対し，$f(\alpha_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{u}_k) = \alpha_1 f(\mathbf{u}_1) + \cdots + \alpha_k f(\mathbf{u}_k)$ が成り立つ.

証明. (1): 演習問題 1.2, (1) と (2.2) により，$f(\mathbf{0}) = f(\mathbf{0}+\mathbf{0}) = f(\mathbf{0}) + f(\mathbf{0})$ だから，この等式の両辺に $-f(\mathbf{0})$ を足すと，$\mathbf{0} = f(\mathbf{0})$ が得られる.

(2): k に関する帰納法で証明できる (演習). □ (補題 2.2)

例 2.1 (0) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を，すべての $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ に $\mathbb{R}^m$ の零ベクトルを対応させる写像とすると f は線型写像である: すべての $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対し $f(\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, $\alpha f(\mathbf{u})+\beta(\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{0}+\beta\mathbf{0} = \mathbf{0}$ だから，$f(\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{u})+\beta(\mathbf{v})$ である. Ex-3

(1) $n \leq m$ として，$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を，

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m; \quad \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

で定義すると，f は線型写像である．特に $n = m$ のときには，上の写像は恒等写像 $\mathbb{R}^n \ni \mathbf{u} \mapsto \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ となることに注意.

(2) $n > m$ のとき，$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を，

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m; \quad \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

で定義すると，f は線型写像である.

(3) $0 \leq \theta < 2\pi$ として，$\rho_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ に，ベクトル $\mathbf{u}$ を原点の回りに反時計回りに θ だけ回転せて得られるベクトルを対応させる写像とすると ρ_θ は線型写像となる.

(4) $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ として $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を，

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; \quad \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \gamma a \\ \delta b \end{bmatrix}$$

で定義すると f は線型写像である. □

A を $m \times n$-行列とするとき，写像 $\varphi_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を

$$(2.4) \quad \varphi_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m; \quad \mathbf{u} \mapsto A\mathbf{u}$$ vcsp-13

で定義すると，φ_A は線型写像になることは容易に確かめられる．

異なる $m \times n$-行列は，異る線型写像を惹き起こす:

L-4

補題 2.3 A と A' を異る $m \times n$-行列とするとき，φ_A と $\varphi_{A'}$ も異る．

証明． $A = [a_{i,j}]$, $A' = [a'_{i,j}]$ とする．$A \neq A'$ ならある $1 \leq i^* \leq m$, $1 \leq j^* \leq n$ で，$a_{i^*,j^*} \neq a'_{i^*,j^*}$ となるものが存在する．ここで，

$$(2.5) \quad \varphi_A(\mathbf{e}^n_{j^*}) = A\mathbf{e}^n_{j^*} \text{ と } \varphi_{A'}(\mathbf{e}^n_{j^*})$$

の i^*-成分は，それぞれ，a_{i^*,j^*} と a'_{i^*,j^*} になるから，$\varphi_A(\mathbf{e}^n_{j^*}) \neq \varphi_{A'}(\mathbf{e}^n_{j^*})$ がわかる．したがって，$\varphi_A \neq \varphi_{A'}$ である． □ (補題 2.3)

すべての線型写像は，ある行列 A に対する φ_A として実現できる:

T-0

定理 2.4 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を任意の線型写像とするとき，$m \times n$-行列 A_f で $\varphi_{A_f} = f$ となるようなものが一意に存在する．

証明． このような A_f が存在するときには，その一意性は補題2.3から明らかである．

$1 \leq i \leq n$ に対し，

$$(2.6) \quad \mathbf{a}_i = f(\mathbf{e}^n_i)$$ vcsp-13-0

とする．$\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^m$ である．

$$(2.7) \quad A_f = [\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n]$$ vcsp-13-0-0

とすると，A_f は求めるようなものになっている:

任意の $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ に対し，$\mathbf{u} = [u_i]$ として，

$$(2.8) \quad \mathbf{u} = u_1\mathbf{e}^n_1 + u_2\mathbf{e}^n_2 + \cdots + u_n\mathbf{e}^n_n$$ vcsp-13-1

となることに注意すると，

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \varphi_{A_f}(\mathbf{u}) &= A_f\mathbf{u} = A_f(u_1\mathbf{e}^n_1 + u_2\mathbf{e}^n_2 + \cdots + u_n\mathbf{e}^n_n) && ;\ (2.8) \\ &= u_1A_f\mathbf{e}^n_1 + u_2A_f\mathbf{e}^n_2 + \cdots + u_nA_f\mathbf{e}^n_n && \\ &= u_1\mathbf{a}_1 + u_2\mathbf{a}_2 + \cdots + u_n\mathbf{a}_n && ;\ (2.7) \\ &= u_1f(\mathbf{e}^n_1) + u_2f(\mathbf{e}^n_2) + \cdots + u_nf(\mathbf{e}^n_n) && ;\ (2.6) \\ &= f(u_1\mathbf{e}^n_1 + u_2\mathbf{e}^n_2 + \cdots + u_n\mathbf{e}^n_n) && ;\ f \text{ の線型性による} \\ &= f(\mathbf{u}) && ;\ (2.8) \end{aligned}$$ vcsp-14

である. ❑ (定理 2.4)

線型写像に f に対し，$f = \varphi_{A_f}$ となるような行列 A_f を f の行列表現 (matrix representation) とよぶことにする.

定理 2.4 の証明は，線型写像 f に対し，その行列表現 A_f を求める方法を与えている．これを用いると，例えば次が分る:

Ex-4

例 2.2 (1) 恒等写像 $id_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$; $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{u}$ は明らかに線型写像だが，この表現行列は，n-次元単位行列 E_n になる.

(2) $\rho_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を例 2.1, (3) でのような線型写像とする．このとき，

$$\rho_\theta(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ sin\theta \end{bmatrix} \qquad \rho_\theta(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ cos\theta \end{bmatrix} \tag{2.10}$$ vcsp-15

となるから，$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ とすると，定理 2.4 の証明から $\rho_\theta = \varphi_{R_\theta}$ である. ❑

Exercise-1

演習問題 2.5 例 2.1 の (3) 以外の線型写像について，それらの行列表現を求めよ.

線型写像の合成や逆写像は，行列表現の (行列としての) 積と逆行列が対応するものとなっている:

T-1

定理 2.6 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ と $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^\ell$ を線型写像とする．このとき，

(1) f と g の合成写像

$$g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^\ell;\ \mathbf{u} \mapsto g(f(\mathbf{u})) \tag{2.11}$$ vcsp-16

は線型写像である.

(2) A と B をそれぞれ f と g の行列表現とするとき，行列 BA は $g \circ f$ の行列表現となる.

証明． (1): $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ として，$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とする．このとき，

$$\begin{aligned} g \circ f(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) &= g(f(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v})) && ;\ g \circ f \text{ の定義 (2.11) による} \\ &= g(\alpha f(\mathbf{u}) + \beta f(\mathbf{v})) && ;\ f \text{ の線型性} \\ &= \alpha g(f(\mathbf{u})) + \beta g(f(\mathbf{v})) && ;\ g \text{ の線型性} \\ &= \alpha g \circ f(\mathbf{u}) + \beta g \circ f(\mathbf{v}) && ;\ g \circ f \text{ の定義 (2.11) による} \end{aligned}$$

となる.

(2): $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ とするとき，

$$g \circ f(\mathbf{u}) = g(f(\mathbf{u})) = g(A\mathbf{u}) = B(A\mathbf{u}) = (BA)\mathbf{u} = \varphi_{BA}(\mathbf{u})$$

である. □ (定理 2.6)

T-2

定理 2.7 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を全単射で線型写像とする. このとき

(1) f の逆写像 f^{-1} は線型写像である.

(2) f の行列表現を A とするとき, A は正則行列で, f^{-1} の行列表現は A の逆行列となる.

証明. (1): f^{-1} が線型写像でなかったとすると, $\mathbf{u}', \mathbf{v}' \in \mathbb{R}^n$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に”対し, $\mathbf{u} = f^{-1}(\mathbf{u}')$, $\mathbf{v} = f^{-1}(\mathbf{v}')$ とすると, f が f^{-1} の逆関数で線型であることから,

$$f(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{u}) + \beta f(\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u}' + \alpha\mathbf{v}'$$

となる. この両辺に f^{-1} を施すと,

$$\begin{aligned}\alpha f^{-1}(\mathbf{u}') + \beta f^{-1}(\mathbf{v}') &= \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} \\ &= f^{-1}(f(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v})) = f^{-1}(\alpha\mathbf{u}' + \alpha\mathbf{v}')\end{aligned}$$

である.

(2) B を f^{-1} の行列表現とすると, 定理 2.6, (2) から, AB と BA はそれぞれ $f \circ f^{-1} = id_{\mathbb{R}^n}$, $f^{-1} \circ f = id_{\mathbb{R}^n}$ の行列表現となるが, 恒等写像 $id_{\mathbb{R}^n}$ の行列表現は n-次単位行列 E_n だった (例 2.2, (1)) から, $AB = BA = E_n$ がわかる. したがって, $B = A^{-1}$ である. □ (定理 2.7)

3 ベクトル空間と部分空間の基底

basis

4 次元定理

dimension-th

5 行列の対角化

diagonalization