線形代数 3　定期試験 予想問題集

担当:　渕野 昌　　2018 年 05 月 30 日 (2018 年 06 月 04 日 03:40 版)

以下の問題の細部を調節したもののいくつかの類題を，期末試験の基本問題として出題します．これらの問題が解けるよう準備しておいてください．

期末試験では，これ以外にも，さらに challenging な問題を 1 題程度出す可能性があります．

このプリントのファイルは，

http://fuchino.ddo.jp/kobe/lin-alg3-ss18-pre-final-exam.pdf

としてダウンロードできます．なお，このファイルは，講義の進展に応じて，試験直前まで，随時，変更／拡張される可能性があります．何度かチェックしてみてください．

I (1) $\mathbb{a}_1, ..., \mathbb{a}_n \in \mathbb{R}^m$ で，$n < m$ のとき，$[\{\mathbb{a}_1, ..., \mathbb{a}_n\}]_{\mathbb{R}^m} \neq \mathbb{R}^m$ となることを示せ．
(2) $\mathbb{a}_1, ..., \mathbb{a}_6 \in \mathbb{R}^5$ のとき，$\mathbb{a}_1, ..., \mathbb{a}_6$ は線型独立でないことを示せ．

II $\varphi : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^m$ と $\psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ をそれぞれ線型写像とする．(a) $\ell \geq m > n$ とするとき，φ と ψ の合成 $\psi \circ \varphi$ は 1 対 1 写像にならないことを示せ．(b) $\psi \circ \varphi$ が $\mathbb{R}^n$ の上への写像となっているとき，$\dim(\mathrm{Ker}(\psi))$ と $\dim(\mathrm{Ker}(\psi \circ \varphi))$ は何になるか?

III (a) 正方行列 A が逆行列 A^{-1} を持てば，$\varphi_{A^{-1}}$ は φ_A の逆写像となることを示せ．逆に，正方行列 A, B について φ_A が φ_B の逆写像なら，B は A の逆行列であることを示せ．

(b) A を $n \times m$-行列として，$\mathbb{a}_1,..., \mathbb{a}_m \in \mathbb{R}^n$ を，$A = [\mathbb{a}_1 \cdots \mathbb{a}_n]$ となるものとする．$\varphi_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ が 1 対 1 写像になるのは，$\mathbb{a}_1,..., \mathbb{a}_m$ が一次独立となるちょうどそのときであることを示せ．

(c) A を $n \times n$-行列として，$A = [\mathbb{a}_1 \cdots \mathbb{a}_n]$ とする．上の (a), (b) (と次元定理) を使って，$\{\mathbb{a}_1, ..., \mathbb{a}_n\}$ が一次独立であることと，A が逆行列を持つことが同値になることを示せ．

IV. V を $\mathbb{R}$ 上の n-次元線型空間として，$\mathbb{u}_1, ..., \mathbb{u}_n$ と $\mathbb{v}_1, ..., \mathbb{v}_n$ を V の二組の基底とするき，$\mathbb{u}_1, ..., \mathbb{u}_n$ が V を張ることから，$(\mathbb{v}_1 \cdots \mathbb{v}_n) = (\mathbb{u}_1 \cdots \mathbb{u}_n)P$ となる $n \times n$-行列がとれる ($(\mathbb{v}_1 \cdots \mathbb{v}_n) = (\mathbb{u}_1 \cdots \mathbb{u}_n)P$ という記法は，3 回目の講義で導入している)．

(a) P は正則行列で，$(\mathbb{u}_1 \cdots \mathbb{u}_n) = (\mathbb{v}_1 \cdots \mathbb{v}_n)P^{-1}$ となること示せ．

(b) $\vec{\mathbb{v}} = (\mathbb{v}_1, ..., \mathbb{v}_n)$ を $\mathbb{R}$ 上の n-次元空間 V の基底とするとき，$i_{\vec{\mathbb{v}}} : \mathbb{R}^n \to V$ を

$$i_{\vec{\mathbb{u}}}\left(\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}\right) = (\mathbb{v}_1 \cdots \mathbb{v}_n)\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{v}_i$$

で定義すると，$i_{\vec{\mathbb{v}}}$ は V から $\mathbb{R}^n$ への同型写像となることを示せ．

W を m-次元線型空間として，$\vec{\mathbb{w}} = (\mathbb{w}_1, ..., \mathbb{w}_m)$ を W の基底の 1 つとし，$i_{\vec{\mathbb{w}}} : \mathbb{R}^m \to W$ を上と同様に定義する．線型写像 $\varphi : V \to W$ に対し，$(i_{\vec{\mathbb{w}}})^{-1} \circ \varphi \circ i_{\vec{\mathbb{v}}}$ は $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線型写像となるから，$(i_{\vec{\mathbb{w}}})^{-1} \circ \varphi \circ i_{\vec{\mathbb{v}}} = \varphi_A$ となる $m \times n$-行列 A が存在する．このような A を，φ の，基底 $\vec{\mathbb{u}}, \vec{\mathbb{w}}$ に関する φ の表現行列とよぶ．

(c) A を φ の，基底 $\vec{\mathbb{u}}, \vec{\mathbb{w}}$ に関する φ の表現行列とするとき，任意の $\mathbb{u} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{v}_i \in V$ に

対し，

$$\varphi(\mathbb{u}) = (\mathbb{w}_1, ..., \mathbb{w}_n)\, A \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \tag{1}$$

となることを示せ (ヒント: まず $\varphi \circ i_{\vec{\mathbb{v}}} = i_{\vec{\mathbb{w}}} \circ \varphi_A$ となることを示す)．逆に，$m \times n$-行列 A が (1) を満たすなら，$(i_{\vec{\mathbb{w}}})^{-1} \circ \varphi \circ i_{\vec{\mathbb{v}}} = \varphi_A$ が成り立つことを示せ．

(d) $\mathbb{v}_1, ..., \mathbb{v}_n$ を $\mathbb{R}$ 上の線型空間 V の基底として，$\mathbb{w}_1, ..., \mathbb{w}_m$ を $\mathbb{R}$ 上の線型空間 W の基底とする．線型写像 $\varphi : V \to W$ に対し，$\varphi(\mathbb{v}_j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_{i,j}\mathbb{w}_i$ とするとき，$m \times n$-行列 $[a_{i,j}]$ は φ の基底 $\mathbb{v}_1, ..., \mathbb{v}_n$ と $\mathbb{w}_1, ..., \mathbb{w}_m$ に関する φ の表現行列になること示せ．(ヒント: (c) を用いる).

V. $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ するとき，$\varphi_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ の，$\mathbb{R}^3$ と $\mathbb{R}^2$ のそれぞれの基底 $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ に関する表現行列を求めよ．

VI. (a) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を線型写像として，$\varphi(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\varphi(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\varphi(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ のとき，$\varphi = \varphi_A$ となるような 2×3 行列 A を求めよ．(ヒント: まず，$\varphi(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix})$, $\varphi(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix})$, $\varphi(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix})$ を求める．)

(b) (a) の φ について，$Ker(\varphi)$ と $Im(\varphi)$ を求めよ．