線型代数 II　演習 No.4

担当:　渕野 昌　　　　**2010 年 01 月 30 日**

以下の問題はレポート提出のためのものではありませんが,（演習 No.1〜No.3 と同様）期末試験で類題の出る可能性のある問題ですので，自習しておいてください.

この演習の問題用紙は,

`http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/kobe/linalg09w-uebung4.pdf`

としてダウンロードできます.

---

1. A を $n \times n$ 行列とするとき，A が正則行列となるのは 0 が A の固有値でないちょうどそのときであることを示せ.

2. $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ とする．このとき,

(a) $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ が $\mathbb{R}^3$ の基底であることを示せ.

(b) $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ を $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ の線型結合で表わせ.

(c) 3×3 行列 A の固有値が 2, -1, 5 で，$\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ はこれらの固有値それぞれの固有ベクトルとなっているとする．このとき $A\mathbf{b}$ を求めよ.

3. 0 と異なるベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ が直行するのは，$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ として，$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ が 0 になるときである．このとこを用いて，$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ と $\mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ の両方のベクトルと直行するベクトル $\mathbf{c}_3 \in \mathbb{R}^3$ で，$det([\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2\mathbf{c}_3]) = 1$ となるものを求めよ.

4. $\begin{bmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ を対角化せよ.

5. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ が対角化できないことを示せ.