線型代数 I　レポート No.1

担当:　渕野 昌　　**2010 年 05 月 12 日**

以下の問題をできるだけ解いて，問題と解答を A4 の紙 にレポートとしてまとめてホチキスでとじたものを 5 月 20 日の 講義の初め に提出してください．

　ただし，解答は，結果を得るための計算過程，思考過程が分るような書き方を工夫してください．結果だけが書かれていて，それを得るための計算の工夫や考え方が述べられていないものは解答とは認めません．

　この演習の問題用紙は，

`http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/kobe/linalgI10s-uebung1.pdf`

としてダウンロードできます．

1.
$$A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$
とするとき，AB, BA, A^2, B^2, A^3, B^3 を計算してください．

2. 2×2-行列（あるいは，もっと一般的には $n\times n$-行列） A, B が可換であるとは，$AB = BA$ が成り立つこととします（教科書 p.239 を参照）．A を $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ の形をした行列とするとき，2×2-行列 $B = \begin{bmatrix} s & t \\ u & v \end{bmatrix}$ について，

$$A \text{ と } B \text{ は可換} \Leftrightarrow s = v \text{ かつ } u = -v$$

が成り立つことを示してください．

3. A を 2×2-行列として，$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$,　$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ とするとき，連立方程式

(*)　$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

について，(1) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ のとき，(*) の解を求めてください．

(2) A^{-1} が (1) でのように与えられるとき，(*) （のもとの形のもの）が（具体的には）どんな連立方程式になっているかを求めてください．

4. (実数を成分にもつ) 2×2-行列 A が $A^2 = O$ を満たすとき（ただし O は零行列とします）このことから A も零行列であることが結論できるでしょうか? もしできないなら，そのことを示す例をあげてください．

5. どんな $n = 2, 3, 4\cdots$ に対しても $A \neq E$, $A^2 \neq E, \ldots, A^n \neq E$ だが，$A^{n+1} = E$ となるような 2×2-行列 A が存在することを示してください．

6. （チャレンジ問題 — エレガントな解答のためには，線型代数 II で学ぶことになる知識（教科書の 9 章の内容）が必要になりますが，素手でも解けるかもしれません）2×2 行列 A で $A^2 \neq O$ だが $A^3 = O$ となるようなものは存在しないことを示してください．