線型代数 I　レポート No.2

担当:　渕野 昌　　**2010 年 05 月 31 日**

以下の問題をできるだけ解いて，問題と解答を A4 の紙 にレポートとしてまとめてホチキスでとじたものを 6 月 10 日の 講義の初め に提出してください．

ただし，解答は，結果を得るための計算過程，思考過程が分るような書き方を工夫してください．結果だけが書かれていて，それを得るための計算の工夫や考え方が述べられていないものは解答とは認めません．提出してもらったレポートは返却できませんので，自分の解答のコピーをとっておいてください．

この演習の問題用紙は，

`http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/kobe/linalgI10s-uebung2.pdf`

としてダウンロードできます．

---

1. 次の連立方程式を掃き出し法を使って解いてください．

(a) $\begin{cases} 2x+2y-4z=4 \\ -x+3y+2z=10 \\ 3x+4y-6z=9 \end{cases}$　　(b) $\begin{cases} 2x-3y+4z=1 \\ 3x-4y+5z=2 \\ 5x-9y+13z=3 \end{cases}$

2. 掃き出し法を使って次の行列が可逆かどうかを調べてください．可逆な場合にはその逆行列も求めてください．

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$　(b) $\begin{pmatrix} \frac{15}{7} & -3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$　(c) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 2 & -4 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$　(d) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 2 & -4 & 5 \\ -4 & 3 & -5 \end{pmatrix}$

3. $A=[a_{i,j}]$, $B=[b_{j,k}]$, $C=[c_{k,l}]$ をそれぞれ，$m\times n$-, $n\times o$-, $o\times p$-行列とするとき，$(AB)C=A(BC)$ が成り立つことを，示してください．

4. $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への線型写像と同様に，任意の自然数 n, m に対し，$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への写像 φ が線型写像であるとは，すべての $\mathbf{x}, \mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$ と $r, s\in\mathbb{R}$ に対し，$\varphi(r\mathbf{x}+s\mathbf{y})=r\varphi(\mathbf{x})+s\varphi(\mathbf{y})$ が成り立つこととします．2×2-行列に対して講義で説明したことを一般化して，次を示してください．

(a) 任意の $m\times n$-行列 A に対して，$\psi_A(\mathbf{x})=A\mathbf{x}$ で定義される写像 $\psi_A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ は線型写像である．

(b) 任意の線型写像 $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ に対して，$m\times n$ 行列 A_φ で，すべての $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ に対し，$\varphi(\mathbf{x})=A_\varphi\mathbf{x}$ となるようなものが存在する．

(c) 与えられた線型写像 $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ に対し，(b) でのような行列 A_φ はただ一つしか存在しない．

5. A を任意の $m\times n$-行列とし，$\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{0}=\left.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right\} m$ 個　とする．

(a) $m<n$ のとき，方程式 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ は，常に $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 以外の解を持つことを示してください．

(b) $m>n$ のとき，m 次元ベクトル $\mathbf{b}$ で，方程式 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ が解を持たないようなものが存在することを示してください．
（ヒント：この方程式に対応する拡大係数行列を掃き出し法で階段行列に変形したときどうなるかを考えてみる.）