線型代数 I　レポート No.3

担当:　渕野 昌　　　　**2010 年 07 月 09 日**

以下の問題をできるだけ解いて，問題と解答を A4 の紙 にレポートとしてまとめてホチキスでとじたものを 7 月 15 日または 7 月 22 日の 講義の初め に提出してください．今回のレポートに関しては 7 月 22 日の講義の初め以降は提出を受付ないことにします．

解答は，結果を得るための計算過程，思考過程が分るような書き方を工夫してください．結果だけが書かれていて，それを得るための計算の工夫や考え方が述べられていないものは解答とは認めません．提出してもらったレポートは返却できませんので，自分の解答のコピーをとっておいてください．

この演習の問題用紙は,

`http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/kobe/linalgI10s-uebung3.pdf`

としてダウンロードできます．提出期間直後に解説と解答例を

`http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/kobe/`

にリンクします．

---

1. $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}$ が $\mathbb{R}^3$ の基底になっていることを示してください．

2. 写像 $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が 1 対 1 写像である（one-to-one 写像である／単射である，などと言うこともある）とは，すべての異なる $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n$ に対して $\varphi(\mathbf{x}) \neq \varphi(\mathbf{x}')$ となることでした．線型写像 $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ について,

   φ は単射 $\Leftrightarrow$ $Ker(\varphi) = \{\mathbf{0}\}$

   が成り立つことを示してください．

3. $m \times n$-行列 A の i 列を $\mathbf{a}_i$ であらわすこにします． $A = [\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n]$ です．このとき,

(a) 任意のベクトル $\mathbf{x} = \begin{bmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{bmatrix}$ に対し， $A\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n$ となることを示してください．

(b) φ_A は単射 $\Leftrightarrow$ $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ は線形独立
   が成り立つことを示してください．

(c) $m = n$ のとき，つまり A が $n \times n$-行列になっているとき,
   A は可逆 $\Leftrightarrow$ $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ は線形独立
   が成り立つことを示してください．

4. $\mathbb{R}^n$ の部分空間 W の任意の線形独立な $\mathbb{R}^n$ のベクトルの組 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k \in W$ は W の基底に拡張できるのでした．特に $W = \mathbb{R}^n$ のときにもことのこが成り立つことに注意してください．このことを使って，次の (a), (b), (c) を示してください:

(a) $\mathbb{R}^n$ の任意の部分空間 W に対し，線型写像 $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ で，$Ker(\varphi) = W$ となるものを作ることができる．

(b) $\mathbb{R}^n$ の任意の部分空間 W に対して，連立方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ で解の全体が W と一致するものが存在する．

   $\mathbb{R}^n$ の部分空間 W が， $\mathbb{R}^n$ の部分空間 U, V の直和である，とは，$U \cap V = \{\mathbf{0}\}$ で，$U + V = \{a\mathbf{u} + b\mathbf{v} : \mathbf{u} \in U,\ \mathbf{v} \in V,\ a,\ b \in \mathbb{R}\}$ として， $W = U + V$ が成り立つことである．W が， $\mathbb{R}^n$ の部分空間 U, V の直和であることを $W = U \oplus V$ とあらわす（教科書 10.2 節 pp.156–159）．

(c) W を $\mathbb{R}^n$ の任意の部分空間とするとき，$\mathbb{R}^n$ の部分空間 V で，$\mathbb{R}^n = V \oplus W$ となるものが存在する．

5. 問題 1. で与えた $\mathbb{R}^3$ の基底から出発してシュミットの直交化法を用いて正規直交基底に変換してください．