# 構造の数理

## II. 演算の体系と代数的構造（その 2）

Sakaé Fuchino (渕野 昌)

Kobe University (神戸大学大学院 システム情報学研究科)

fuchino@diamond.kobe-u.ac.jp

http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/

(October 14, 2010 (14:55 JST) version)

神戸大学 2010 年度後期の講義

October 14, 2010

This presentation is typeset by pLaTeX with beamer class.

## 復習: 群の定義



- 実数の基本性質に対応する演算の性質を用いて，群 (ぐん, group) と アーベル群 (abelian group) の概念が定義できる．

- 集合 （しゅうごう，set）とは，数学的な対象を集めることで得られる新しい数学の対象のこと．たとえば，実数 (real numbers) の全体を集めてでき集合が考えられるが，これを $\mathbb{R}$ とあらわす．

ある集合 $G$ の上にある演算 $\circ$ が定義されていて，次の 3 つの性質が成り立つとき，$G$ と $\circ$ の組 $(G, \circ)$ は 群 であるという:

(g1) すべての $G$ の要素 $x$, $y$, $z$ に対し $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ が成り立つ　　（結合法則）

(g2) ある $G$ の要素 $E$ があって，どんな $G$ の要素 $x$ に対しても $x \circ E = E \circ x = x$ が成り立つ．　　（単位元の存在）

(g3) 上の (g2) でのような $E$ をとるとき，どんな $G$ の要素 $x$ に対しても $x \circ y = y \circ x = E$ となる $G$ の要素 $y$ が存在する．　　（逆元の存在）

# 復習: 群の定義 (2)



- $(G, \circ)$ が群のとき，簡単のため，$\circ$ への言及を省略して "$G$ が群である"，と言うこともある．
- $(G, \circ)$ が群のとき，(g2) を満たすような $G$ の要素 $E$ を $(G, \circ)$ の 単位元 という．実は，単位元は必ず一意に決まる（後出）．
- $(G, \circ)$ が群で $x$ が $G$ の要素のとき，(g3) を満たすような $G$ の要素 $y$ を $x$ の 逆元 とよぶ．実は，与えられた $G$ の要素 $x$ に対して $x$ の逆元は必ず一意に決まる（後出）．

$(G, \circ)$ が群で，さらに次の (g4) を満たすとき，$(G, \circ)$ は アーベル群 (abelian group) である，という．

(g4) すべての $G$ の要素 $x$, $y$ に対し，$x \circ y = y \circ x$ が成り立つ．
(可換性)

- アーベル群の「アーベル」は，数学者 Niels Henrik Abel にちなむ．ふつう人名は大文字で始めるが，アーベル群の概念は非常に頻繁に用いられるため，小文字で abelian group と書く書き方が定着している．

# アーベル



アーベル (Niels Henrik Abel 1802(享和 2 年) - 1829(文政 12 年))
http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Abel.html
http://ja.wikipedia.org/wiki/ニールス・アーベル

# 復習：群の例



- $G = \mathbb{R}$ として $\circ$ を数の足し算とするとき，$(G, \circ)$ はアーベル群である．これは「$(\mathbb{R}, +)$ はアーベル群である」とも表現できる．
- $G$ を $\mathbb{R}$ から $0$ を除いたもの（集合の記号法を用いると $\mathbb{R} \setminus \{0\}$）を $G$ として $\circ$ を数のかけ算とするとき，$(G, \circ)$ はアーベル群である（演習問題）．
- 同様に，$\mathbb{R}^+$ で正の（$0$ より真に大きい）実数の全体をあらわすことにすると，$(\mathbb{R}^+, \times)$ もアーベル群である（演習問題）．
- $G$ を 3 次元空間の原点を中心とした回転の全体とする．$G$ の要素 $x, y$ に対し，$x \circ y$ で回転 $y$ と $x$ の合成を表すことにする．つまり $x \circ y$ はまず $y$ だけ回転してその後 $x$ だけ回転したときの結果としての回転である．このとき $(G, \circ)$ は群となるが，アーベル群ではない（演習問題）．この群は幾何学などでも重要な役割をはたす．
- $G$ を $0$ だけからなる集合 $\{0\}$ とする．$G$ 上の演算 $\circ$ を $0 \circ 0 = 0$ で定義すると，$(G, \circ)$ はアーベル群になる（演習問題）．

# 群論の歴史



- 「群」を研究する数学の研究分野は現在では
群論 (group theory) とよばれている.

- 群の概念が最初に用いられたのは，前出の アーベル や
ガロアによる（5 次以上の）方程式の解の研究においてだった.

E. ガロア (Evariste Galois 1811（文化 8 年）– 1832（天保 3 年）フランス)

# 群の歴史 (2)



- 1920 年代，ドイツのゲッチンゲン (Göttingen) 大学での E. ネーター を中心とする数学者たちによって，群を含む 代数学 の諸概念が，この講義でのようなスタイルで整理された．

E. ネーター (Emmy Amalie Noether 1882（明治 15 年）– 1935（昭和 10 年）ドイツ-アメリカ)

# 群の性質



- $X$ が集合のとき $a \in X$ で “$a$ は $X$ の要素（のひとつ）である” をあらわす．$\in$ はギリシャ語のイプシロンの変形で，element（要素）にかけている．

- 群を定義する性質（群の公理）(g1), (g2), (g3) から以下が導ける:

**定理 1**

$(G, \circ)$ を任意の群とする．このとき，

(1) $(G, \circ)$ の単位元は一意に決まる．

(2) すべての $x \in G$ に対し，$x$ の逆元は一意に決まる．

(3) $E$ を $(G, \circ)$ の単位元とする．任意の $x \in G$ に対し，$y \in G$ が $x \circ y = E$ を満たすなら，$y$ は $x$ の逆元である．

# 群の性質 (2)



定理 1

$(G, \circ)$ を任意の群とする．このとき，

(1) $(G, \circ)$ の単位元は一意に決まる．

(2) すべての $x \in G$ に対し，$x$ の逆元は一意に決まる．

(3) $E$ を $(G, \circ)$ の単位元とする．任意の $x \in G$ に対し，$y \in G$ が $x \circ y = E$ を満たすなら，$y$ は $x$ の逆元である．

証明. (1) のみを示し，(2), (3) は演習とする．
$E_0, E_1 \in G$ がともに単位元の性質 (g2) を満たすなら，つまり，

(g2)$_0$ すべての $x \in G$ に対し $x \circ E_0 = E_0 \circ x = x$ が成り立ち;

(g2)$_1$ すべての $x \in G$ に対し $x \circ E_1 = E_1 \circ x = x$ が成り立つ

なら $E_0$ と $E_1$ が等しくなることを示せばよい．これは次の等式により示せる:

$$\underset{\uparrow\,(g2)_1}{E_0 =} E_0 \circ \underset{\uparrow\,(g2)_0}{E_1 =} E_1$$

**(証明終り)**

# ¡Gracias por su atención!



このスライドも含めて，講義のスライドと，スライドの printer friendly version は，

http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/kobe/index.html

に順次リンクします.