

構造の数理

III. 演算の体系と代数的構造 (その 3)

Sakaé Fuchino (湊野 昌)

Kobe University (神戸大学大学院 システム情報学研究科)

`fuchino@diamond.kobe-u.ac.jp`

`http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/`

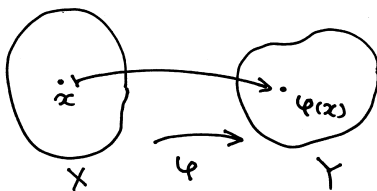
(November 3, 2010 (18:59 JST) version)

神戸大学 2010 年度後期の講義

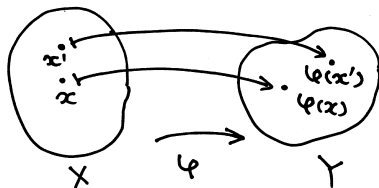
October 21, 2010

This presentation is typeset by p^LA_TE_X with beamer class.

- ▶ X と Y を集合とするとき, φ が X から Y への **写像** (mapping) であるとは, φ が X の各要素 x に Y のある要素を対応させる “規則” を与えていることである.
- ▶ $x \in X$ が φ によって対応させられる Y の要素のことを $\varphi(x)$ と書く.
- ▶ φ が X から Y での写像であることを, $\varphi: X \rightarrow Y$ であらわす.

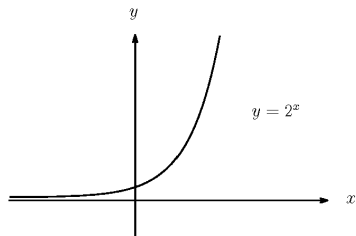


- ▶ \mathbb{R} から \mathbb{R} への写像は **関数** とよばれることもある.
- ▶ 写像 $\varphi: X \rightarrow Y$ が **単射** であるとは, $x, x' \in X$ で $x \neq x'$ ならば必ず $\varphi(x) \neq \varphi(x')$ が成り立つこと.



- ▶ 写像 $\varphi: X \rightarrow Y$ が **全射** であるとは, すべての $y \in Y$ に対し, $\varphi(x) = y$ となるような $x \in X$ が存在すること.
- ▶ 写像 $\varphi: X \rightarrow Y$ が **全単射** であるとは φ が全射かつ単射であること.

- ▶ $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \sin(x)$ として φ を定義すると, φ は全射でも単射でもない.
- ▶ 上と同じ写像を, $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]; x \mapsto \sin(x)$ ととらえなおすと, φ は全射だが単射ではない.
- ▶ $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto 2x$ とすると, φ は全単射である.
- ▶ $\mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} : r > 0\}$ だった. $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+; x \mapsto 2^x$ とすると φ は全単射である.



- ▶ (G, \circ) , (H, \bullet) を群とする．全単射 $\varphi: G \rightarrow H$ が，すべての $x, y \in G$ に対し， $\varphi(x \circ y) = \varphi(x) \bullet \varphi(y)$ を満たすとき， φ は群 G から群 H への同型写像 (isomorphism) である，という． G から H への同型写像が存在するとき， G と H は同型 (isomorphic) であるという．
- ▶ φ が G から H の同型写像なら， φ は G の単位元を H の単位元に移し， G での逆元を H での逆元に移す．
- ▶ G から H の同型写像は，上に述べたことから， G の群としての「構造」を H の群としての「構造」にちょうど対応させるものになっていることがわかる．したがって， G と H が同型の際には， G と H は互いのコピーになっていると考えることができ，群として同一視できる．

▶ $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+; x \mapsto 2^x$ を考える .

φ は全単射だった . 任意の実数 x, y に対し ,

$$\varphi(x + y) = 2^{x+y} = 2^x \times 2^y = \varphi(x) \times \varphi(y)$$

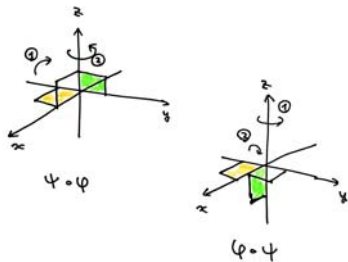
が成り立つ .

したがって , φ は $(\mathbb{R}, +)$ から (\mathbb{R}^+, \times) への同型写像になっていることがわかる .

- ▶ 群 (G, \circ) がアーベル群 \Leftrightarrow すべての $x, y \in G$ に対し,
 $x \circ y = y \circ x$ が成り立つ
- ▶ 群 (G, \circ) はアーベル群でない $\Leftrightarrow x, y \in G$ で $x \circ y \neq y \circ x$ と
なるものが存在する

▶ G を 3次元空間の原点を中心とした回転の全体とする． G の要素 x, y に対し， $x \circ y$ で回転 y と x の合成を表すことにする．つまり $x \circ y$ はまず y だけ回転してその後 x だけ回転したときの結果としての回転である．

このとき (G, \circ) は群となるが，アーベル群ではない．



このスライドも含めて，講義のスライドと，スライドの printer friendly version は，

<http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/kobe/index.html>

に順次リンクします．

来週，10月28日（木）の講義は **休講** とします