構造の数理

VI. 「同一視」の数学的な基礎（その 2）

Sakaé Fuchino (渕野 昌)

Kobe University (神戸大学大学院 システム情報学研究科)

fuchino@diamond.kobe-u.ac.jp

http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/

(November 24, 2010 (17:17 JST) version)

神戸大学 2010 年度後期の講義

November 18, 2010

This presentation is typeset by pLATEX with beamer class.

前回の reaction papers のコメントに答える

- 前回に書いてもらったことで， reaction papers で複数の似たコメントがあったものについて，私なりの返答をしておこうと思います.

- 自分は「文系」なので，難しい数学の話はついてゆけない．なんとかしてほしい.

- 期末テストが手におえないのではないかと不安だ.

- 声が小さい．もっと大きな声で講義してほしい.

前回の reaction papers のコメントに答える

- 前回に書いてもらったことで， reaction papers で複数の似たコメントがあったものについて，私なりの返答をしておこうと思います．

- 自分は「文系」なので，難しい数学の話はついてゆけない． なんとかしてほしい．
- 期末テストが手におえないのではないかと不安だ．
- 声が小さい． もっと大きな声で講義してほしい．

前回の reaction papers のコメントに答える

- 前回に書いてもらったことで, reaction papers で複数の似たコメントがあったものについて, 私なりの返答をしておこうと思います.

- 自分は「文系」なので, 難しい数学の話はついてゆけない. なんとかしてほしい.
- 期末テストが手におえないのではないかと不安だ.
- 声が小さい. もっと大きな声で講義してほしい.

前回の reaction papers のコメントに答える

- 前回に書いてもらったことで， reaction papers で複数の似たコメントがあったものについて，私なりの返答をしておこうと思います．

- 自分は「文系」なので，難しい数学の話はついてゆけない．なんとかしてほしい．
- 期末テストが手におえないのではないかと不安だ．
- 声が小さい．もっと大きな声で講義してほしい．

同値関係 — 前回の復習

- X をある集合として $\sim$ を X の 2 つの要素の間の，ある関係（二項関係）とする．つまり，$a, b \in X$ をとったとき $a \sim b$ であるか，$a \sim b$ でない（これを $a \not\sim b$ とあらわすことにする）かが定まっているようなものとする．
- X 上の二項関係 $\sim$ が X 上の 同値関係 (equivalence relation) である，とは以下の 3 つの性質が成り立つことである:

> ▷ すべての $a \in X$, に対し，$a \sim a$ である． (反射律)
> ▷ すべての $a, b \in X$ に対し，$a \sim b$ なら $b \sim a$ である． (対称律)
> ▷ すべての $a, b, c \in X$ に対し，$a \sim b$, かつ $b \sim c$ なら $a \sim c$ である． (推移律)

同値関係の例

同値関係 — 前回の復習

- X をある集合として $\sim$ を X の 2 つの要素の間の，ある関係（二項関係）とする．つまり，$a, b \in X$ をとったとき $a \sim b$ であるか，$a \sim b$ でない（これを $a \not\sim b$ とあらわすことにする）かが定まっているようなものとする．
- X 上の二項関係 $\sim$ が X 上の 同値関係 (equivalence relation) である，とは以下の 3 つの性質が成り立つことである:

> ▷ すべての $a \in X$, に対し，$a \sim a$ である．(反射律)
> ▷ すべての $a, b \in X$ に対し，$a \sim b$ なら $b \sim a$ である．(対称律)
> ▷ すべての $a, b, c \in X$ に対し，$a \sim b$, かつ $b \sim c$ なら $a \sim c$ である．(推移律)

◀ 同値関係の例

同値関係 — 前回の復習

- X をある集合として $\sim$ を X の 2 つの要素の間の，ある関係（二項関係）とする．つまり，$a, b \in X$ をとったとき $a \sim b$ であるか，$a \sim b$ でない（これを $a \not\sim b$ とあらわすことにする）かが定まっているようなものとする．
- X 上の二項関係 $\sim$ が X 上の 同値関係 (equivalence relation) である，とは以下の 3 つの性質が成り立つことである:

> ▷ すべての $a \in X$, に対し，$a \sim a$ である． (反射律)
>
> ▷ すべての $a, b \in X$ に対し，$a \sim b$ なら $b \sim a$ である． (対称律)
>
> ▷ すべての $a, b, c \in X$ に対し，$a \sim b$, かつ $b \sim c$ なら $a \sim c$ である． (推移律)

◀ 同値関係の例

同値関係 — 前回の復習

- X をある集合として $\sim$ を X の 2 つの要素の間の，ある関係（二項関係）とする．つまり，$a, b \in X$ をとったとき $a \sim b$ であるか，$a \sim b$ でない（これを $a \not\sim b$ とあらわすことにする）かが定まっているようなものとする．
- X 上の二項関係 $\sim$ が X 上の 同値関係 (equivalence relation) である，とは以下の 3 つの性質が成り立つことである:

> ▷ すべての $a \in X$, に対し，$a \sim a$ である．(反射律)
>
> ▷ すべての $a, b \in X$ に対し，$a \sim b$ なら $b \sim a$ である．(対称律)
>
> ▷ すべての $a, b, c \in X$ に対し，$a \sim b$, かつ $b \sim c$ なら $a \sim c$ である．(推移律)

◀ 同値関係の例

同値関係 — 前回の復習

- X をある集合として $\sim$ を X の 2 つの要素の間の，ある関係（二項関係）とする．つまり，$a, b \in X$ をとったとき $a \sim b$ であるか，$a \sim b$ でない（これを $a \not\sim b$ とあらわすことにする）かが定まっているようなものとする．
- X 上の二項関係 $\sim$ が X 上の 同値関係 (equivalence relation) である，とは以下の 3 つの性質が成り立つことである:

- すべての $a \in X$, に対し，$a \sim a$ である． (反射律)
- すべての $a, b \in X$ に対し，$a \sim b$ なら $b \sim a$ である． (対称律)
- すべての $a, b, c \in X$ に対し，$a \sim b$, かつ $b \sim c$ なら $a \sim c$ である． (推移律)

同値関係の例

同値関係 — 前回の復習

- X をある集合として $\sim$ を X の 2 つの要素の間の，ある関係（二項関係）とする．つまり，$a, b \in X$ をとったとき $a \sim b$ であるか，$a \sim b$ でない（これを $a \not\sim b$ とあらわすことにする）かが定まっているようなものとする．
- X 上の二項関係 $\sim$ が X 上の 同値関係 (equivalence relation) である，とは以下の 3 つの性質が成り立つことである:

▷ すべての $a \in X$, に対し，$a \sim a$ である．　(反射律)

▷ すべての $a, b \in X$ に対し，$a \sim b$ なら $b \sim a$ である．　(対称律)

▷ すべての $a, b, c \in X$ に対し，$a \sim b$, かつ $b \sim c$ なら $a \sim c$ である．　(推移律)

◀ 同値関係の例

同値関係 — 前回の復習

- X をある集合として $\sim$ を X の2つの要素の間の，ある関係（二項関係）とする．つまり，$a, b \in X$ をとったとき $a \sim b$ であるか，$a \sim b$ でない（これを $a \not\sim b$ とあらわすことにする）かが定まっているようなものとする．
- X 上の二項関係 $\sim$ が X 上の 同値関係 (equivalence relation) である，とは以下の3つの性質が成り立つことである:

> ▷ すべての $a \in X$, に対し，$a \sim a$ である． (反射律)
>
> ▷ すべての $a, b \in X$ に対し，$a \sim b$ なら $b \sim a$ である． (対称律)
>
> ▷ すべての $a, b, c \in X$ に対し，$a \sim b$, かつ $b \sim c$ なら $a \sim c$ である． (推移律)

◂ 同値関係の例

同値関係の生成

- $x \sim y$ を「 x と y は等しいか，または x と y は友達である」とすれば，$\sim$ は同値関係を規定する性質のうち 反射律 と 対称律 は成り立つが，推移律は（必ずしも）成り立たない．
- $x \sim^* y$ を，「 x と y は等しいか，または x と y は友達であるか，または，友達の友達であるか，または，友達の友達の友達であるか $\cdots$ 」とすると，$\sim^*$ は同値関係となる．より一般には:

定理 1

X を集合として，$\sim$ は 反射律と対称律を満たす X 上の二項関係とする．このとき，X 上の二項関係 $\sim^*$ を，$x, y \in X$ に対し，

$x \sim^* y \Leftrightarrow$
$x \sim y$ か，または，ある $n \in \mathbb{N}$ と，ある X の要素の列 $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ に対して，$x \sim y_0$, $y_0 \sim y_1$, $y_1 \sim y_2, \ldots, y_{n-1} \sim y_n$, $y_n \sim y$ が成り立つ．

となることとして定義すると，$\sim^*$ は X 上の同値関係となる．

証明. 演習 $\square$

同値関係の生成

- $x \sim y$ を「x と y は等しいか，または x と y は友達である」とすれば，$\sim$ は同値関係を規定する性質のうち 反射律 と 対称律 は成り立つが，推移律は（必ずしも）成り立たない．
- $x \sim^* y$ を，「x と y は等しいか，または x と y は友達であるか，または，友達の友達であるか，または，友達の友達の友達であるか $\cdots$」とすると，$\sim^*$ は同値関係となる．より一般には:

定理 1

X を集合として，$\sim$ は 反射律と対称律を満たす X 上の二項関係とする．このとき，X 上の二項関係 $\sim^*$ を，$x, y \in X$ に対し，

$x \sim^* y \Leftrightarrow$
$x \sim y$ か，または，ある $n \in \mathbb{N}$ と，ある X の要素の列 $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ に対して，$x \sim y_0$, $y_0 \sim y_1$, $y_1 \sim y_2, \ldots, y_{n-1} \sim y_n$, $y_n \sim y$ が成り立つ．

となることとして定義すると，$\sim^*$ は X 上の同値関係となる．

証明．演習 $\square$

同値関係の生成

- $x \sim y$ を「x と y は等しいか，または x と y は友達である」とすれば，$\sim$ は同値関係を規定する性質のうち 反射律 と 対称律 は成り立つが，推移律は（必ずしも）成り立たない．

- $x \sim^* y$ を，「x と y は等しいか，または x と y は友達であるか，または，友達の友達であるか，または，友達の友達の友達であるか …」とすると，$\sim^*$ は同値関係となる．より一般には:

定理 1

X を集合として，$\sim$ は 反射律と対称律を満たす X 上の二項関係とする．このとき，X 上の二項関係 $\sim^*$ を，$x, y \in X$ に対し，

$x \sim^* y \Leftrightarrow$
$x \sim y$ か，または，ある $n \in \mathbb{N}$ と，ある X の要素の列 $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ に対して，$x \sim y_0$, $y_0 \sim y_1$, $y_1 \sim y_2, \ldots, y_{n-1} \sim y_n$, $y_n \sim y$ が成り立つ．

となることとして定義すると，$\sim^*$ は X 上の同値関係となる．

証明． 演習 □

同値関係の生成

- $x \sim y$ を「 x と y は等しいか，または x と y は友達である」とすれば，$\sim$ は同値関係を規定する性質のうち 反射律 と 対称律 は成り立つが，推移律は（必ずしも）成り立たない．
- $x \sim^* y$ を,「 x と y は等しいか，または x と y は友達であるか，または，友達の友達であるか，または，友達の友達の友達であるか $\cdots$ 」とすると，$\sim^*$ は同値関係となる．より一般には:

定理 1

X を集合として，$\sim$ は 反射律と対称律を満たす X 上の二項関係とする．このとき，X 上の二項関係 $\sim^*$ を，$x, y \in X$ に対し，

$x \sim^* y \Leftrightarrow$
$x \sim y$ か，または，ある $n \in \mathbb{N}$ と，ある X の要素の列 $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ に対して，$x \sim y_0$, $y_0 \sim y_1$, $y_1 \sim y_2, \ldots, y_{n-1} \sim y_n$, $y_n \sim y$ が成り立つ．

となることとして定義すると，$\sim^*$ は X 上の同値関係となる．

証明． 演習 □

同値関係の生成

- $x \sim y$ を「x と y は等しいか，または x と y は友達である」とすれば，$\sim$ は同値関係を規定する性質のうち 反射律 と 対称律 は成り立つが，推移律は（必ずしも）成り立たない．
- $x \sim^* y$ を，「x と y は等しいか，または x と y は友達であるか，または，友達の友達であるか，または，友達の友達の友達であるか $\cdots$」とすると，$\sim^*$ は同値関係となる．より一般には:

定理 1

X を集合として，$\sim$ は 反射律と対称律を満たす X 上の二項関係とする．このとき，X 上の二項関係 $\sim^*$ を，$x, y \in X$ に対し，

$x \sim^* y \Leftrightarrow$
$x \sim y$ か，または，ある $n \in \mathbb{N}$ と，ある X の要素の列 y_0, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ に対して，$x \sim y_0$, $y_0 \sim y_1$, $y_1 \sim y_2, \ldots, y_{n-1} \sim y_n$, $y_n \sim y$ が成り立つ．

となることとして定義すると，$\sim^*$ は X 上の同値関係となる．

証明． 演習 $\square$

同値関係の生成

- $x \sim y$ を「x と y は等しいか，または x と y は友達である」とすれば，$\sim$ は同値関係を規定する性質のうち <u>反射律</u> と <u>対称律</u> は成り立つが，推移律は（必ずしも）成り立たない．
- $x \sim^* y$ を,「x と y は等しいか，または x と y は友達であるか，または，友達の友達であるか，または，友達の友達の友達であるか $\cdots$ 」とすると，$\sim^*$ は同値関係となる．より一般には:

定理 1

X を集合として，$\sim$ は 反射律と対称律を満たす X 上の二項関係とする．このとき，X 上の二項関係 $\sim^*$ を，$x, y \in X$ に対し，

$x \sim^* y \Leftrightarrow$
$x \sim y$ か，または，ある $n \in \mathbb{N}$ と，ある X の要素の列 y_0, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ に対して，$x \sim y_0$, $y_0 \sim y_1$, $y_1 \sim y_2, \ldots, y_{n-1} \sim y_n$, $y_n \sim y$ が成り立つ．

となることとして定義すると，$\sim^*$ は X 上の同値関係となる．

証明. 演習 □

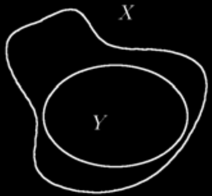
部分集合と分割

X を集合とするとき，Y が X の 部分集合 (subset, $Y \subseteq X$) であるとは，すべての $y \in Y$ に対して $y \in X$ が成り立つこと．

X の部分集合の族 $\mathcal{P} = \{S_0, S_1, S_2, \dots\}$ が X の 分割 (partition) であるとは，S_0, S_1, $S_2, \dots$ は互いに共通部分を持たず，S_0, S_1, $S_2, \dots$ を全部合せると X になること．

部分集合と分割

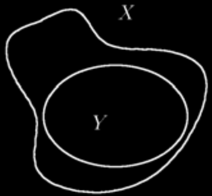
X を集合とするとき，Y が X の 部分集合 (subset，$Y \subseteq X$) であるとは，すべての $y \in Y$ に対して $y \in X$ が成り立つこと．



X の部分集合の族 $\mathcal{P} = \{S_0, S_1, S_2, \ldots\}$ が X の 分割 (partition) であるとは，S_0，S_1，$S_2, \ldots$ は互いに共通部分を持たず，S_0，S_1，$S_2, \ldots$ を全部合せると X になること．

部分集合と分割

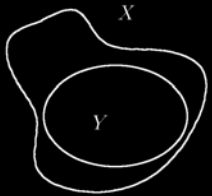
X を集合とするとき，Y が X の 部分集合 (subset，$Y \subseteq X$) であるとは，すべての $y \in Y$ に対して $y \in X$ が成り立つこと．



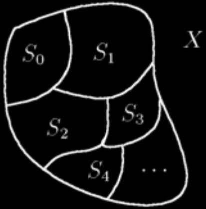
X の部分集合の族 $\mathcal{P} = \{S_0, S_1, S_2, \ldots\}$ が X の 分割 (partition) であるとは，S_0，S_1，$S_2, \ldots$ は互いに共通部分を持たず，S_0，S_1，$S_2, \ldots$ を全部合せると X になること．

部分集合と分割

X を集合とするとき，Y が X の 部分集合 (subset，$Y \subseteq X$) であるとは，すべての $y \in Y$ に対して $y \in X$ が成り立つこと．



X の部分集合の族 $\mathcal{P} = \{S_0, S_1, S_2, \ldots\}$ が X の 分割 (partition) であるとは，S_0，S_1，$S_2, \ldots$ は互いに共通部分を持たず，S_0，S_1，$S_2, \ldots$ を全部合せると X になること．



同値関係と同値類

- $\sim$ を集合 X 上の同値関係とする． $x \in X$ に対し，

  $$[x]_\sim = \{x' \in X : x \sim x'\}$$

  とする． $[x]_\sim$ は， x の $\sim$ に関する 同値類 (equivalence class) とよばれる．

  - $x \in [x]_\sim$ で $[x]_\sim \subseteq X$ である．
  - 任意の $x, y \in X$ に対し， $[x]_\sim = [y]_\sim$ であるか， $[x]_\sim$ と $[y]_\sim$ は共通部分を持たないかのどちらかである． したがって，

定理 2

$\sim$ が集合 X 上の同値関係のとき， $\mathcal{P}_\sim = \{[x]_\sim : x \in X\}$ は X の分割になる．

- 逆に， $\mathcal{P}$ が X の分割のとき， $x, y \in X$ に対し， $x \sim_\mathcal{P} y$ を「$S \in \mathcal{P}$ で $x, y \in S$ となるものがある」ことで定義すると， $\sim_\mathcal{P}$ は同値関係になる（演習）．

同値関係と同値類

- $\sim$ を集合 X 上の同値関係とする．$x \in X$ に対し，

$$[x]_\sim = \{x' \in X : x \sim x'\}$$

とする．$[x]_\sim$ は，x の $\sim$ に関する 同値類 (equivalence class) とよばれる．

▷ $x \in [x]_\sim$ で $[x]_\sim \subseteq X$ である．

▷ 任意の $x, y \in X$ に対し，$[x]_\sim = [y]_\sim$ であるか，$[x]_\sim$ と $[y]_\sim$ は共通部分を持たないかのどちらかである．したがって，

定理 2

$\sim$ が集合 X 上の同値関係のとき，$\mathcal{P}_\sim = \{[x]_\sim : x \in X\}$ は X の分割になる．

- 逆に，$\mathcal{P}$ が X の分割のとき，$x, y \in X$ に対し，$x \sim_\mathcal{P} y$ を「$S \in \mathcal{P}$ で $x, y \in S$ となるものがある」ことで定義すると，$\sim_\mathcal{P}$ は同値関係になる（演習）．

同値関係と同値類

- $\sim$ を集合 X 上の同値関係とする． $x \in X$ に対し，

$$[x]_\sim = \{x' \in X : x \sim x'\}$$

とする． $[x]_\sim$ は， x の $\sim$ に関する **同値類** (equivalence class) とよばれる．

▷ $x \in [x]_\sim$ で $[x]_\sim \subseteq X$ である．

▷ 任意の $x, y \in X$ に対し， $[x]_\sim = [y]_\sim$ であるか， $[x]_\sim$ と $[y]_\sim$ は共通部分を持たないかのどちらかである． したがって，

定理 2

$\sim$ が集合 X 上の同値関係のとき， $\mathcal{P}_\sim = \{[x]_\sim : x \in X\}$ は X の分割になる．

- 逆に， $\mathcal{P}$ が X の分割のとき， $x, y \in X$ に対し， $x \sim_\mathcal{P} y$ を「$S \in \mathcal{P}$ で $x, y \in S$ となるものがある」ことで定義すると， $\sim_\mathcal{P}$ は同値関係になる（演習）．

同値関係と同値類

- $\sim$ を集合 X 上の同値関係とする． $x \in X$ に対し，

$$[x]_\sim = \{x' \in X : x \sim x'\}$$

とする． $[x]_\sim$ は， x の $\sim$ に関する 同値類 (equivalence class) とよばれる．

- $x \in [x]_\sim$ で $[x]_\sim \subseteq X$ である．
- 任意の $x, y \in X$ に対し， $[x]_\sim = [y]_\sim$ であるか， $[x]_\sim$ と $[y]_\sim$ は共通部分を持たないかのどちらかである． したがって，

定理 2

$\sim$ が集合 X 上の同値関係のとき， $\mathcal{P}_\sim = \{[x]_\sim : x \in X\}$ は X の分割になる．

- 逆に， $\mathcal{P}$ が X の分割のとき， $x, y \in X$ に対し， $x \sim_\mathcal{P} y$ を「$S \in \mathcal{P}$ で $x, y \in S$ となるものがある」ことで定義すると， $\sim_\mathcal{P}$ は同値関係になる（演習）．

同値関係と同値類

- $\sim$ を集合 X 上の同値関係とする． $x \in X$ に対し，

$$[x]_\sim = \{x' \in X : x \sim x'\}$$

とする． $[x]_\sim$ は， x の $\sim$ に関する 同値類 (equivalence class) とよばれる．

▷ $x \in [x]_\sim$ で $[x]_\sim \subseteq X$ である．

▷ 任意の $x, y \in X$ に対し， $[x]_\sim = [y]_\sim$ であるか， $[x]_\sim$ と $[y]_\sim$ は共通部分を持たないかのどちらかである． したがって，

定理 2

$\sim$ が集合 X 上の同値関係のとき， $\mathcal{P}_\sim = \{[x]_\sim : x \in X\}$ は X の分割になる．

- 逆に， $\mathcal{P}$ が X の分割のとき， $x, y \in X$ に対し， $x \sim_\mathcal{P} y$ を「$S \in \mathcal{P}$ で $x, y \in S$ となるものがある」ことで定義すると， $\sim_\mathcal{P}$ は同値関係になる（演習）．

同値関係と同値類

- $\sim$ を集合 X 上の同値関係とする．$x \in X$ に対し，

$$[x]_\sim = \{x' \in X : x \sim x'\}$$

とする．$[x]_\sim$ は，x の $\sim$ に関する 同値類 (equivalence class) とよばれる．

▷ $x \in [x]_\sim$ で $[x]_\sim \subseteq X$ である．

▷ 任意の $x, y \in X$ に対し，$[x]_\sim = [y]_\sim$ であるか，$[x]_\sim$ と $[y]_\sim$ は共通部分を持たないかのどちらかである．したがって，

定理 2

$\sim$ が集合 X 上の同値関係のとき，$\mathcal{P}_\sim = \{[x]_\sim : x \in X\}$ は X の分割になる．

- 逆に，$\mathcal{P}$ が X の分割のとき，$x, y \in X$ に対し，$x \sim_\mathcal{P} y$ を「$S \in \mathcal{P}$ で $x, y \in S$ となるものがある」ことで定義すると，$\sim_\mathcal{P}$ は同値関係になる（演習）．

同値関係と同値類

▶ $\sim$ を集合 X 上の同値関係とする． $x \in X$ に対し，

$$[x]_\sim = \{x' \in X : x \sim x'\}$$

とする． $[x]_\sim$ は， x の $\sim$ に関する 同値類 (equivalence class) とよばれる．

▷ $x \in [x]_\sim$ で $[x]_\sim \subseteq X$ である．

▷ 任意の $x, y \in X$ に対し， $[x]_\sim = [y]_\sim$ であるか， $[x]_\sim$ と $[y]_\sim$ は共通部分を持たないかのどちらかである． したがって，

定理 2

$\sim$ が集合 X 上の同値関係のとき， $\mathcal{P}_\sim = \{[x]_\sim : x \in X\}$ は X の分割になる．

▶ 逆に， $\mathcal{P}$ が X の分割のとき， $x, y \in X$ に対し， $x \sim_{\mathcal{P}} y$ を「$S \in \mathcal{P}$ で $x, y \in S$ となるものがある」ことで定義すると， $\sim_{\mathcal{P}}$ は同値関係になる（演習）．

同値関係と同値類

▶ $\sim$ を集合 X 上の同値関係とする．$x \in X$ に対し，

$$[x]_\sim = \{x' \in X : x \sim x'\}$$

とする．$[x]_\sim$ は，x の $\sim$ に関する 同値類 (equivalence class) とよばれる．

▷ $x \in [x]_\sim$ で $[x]_\sim \subseteq X$ である．

▷ 任意の $x, y \in X$ に対し，$[x]_\sim = [y]_\sim$ であるか，$[x]_\sim$ と $[y]_\sim$ は共通部分を持たないかのどちらかである．したがって，

定理 2

$\sim$ が集合 X 上の同値関係のとき，$\mathcal{P}_\sim = \{[x]_\sim : x \in X\}$ は X の分割になる．

▶ 逆に，$\mathcal{P}$ が X の分割のとき，$x, y \in X$ に対し，$x \sim_\mathcal{P} y$ を「$S \in \mathcal{P}$ で $x, y \in S$ となるものがある」ことで定義すると，$\sim_\mathcal{P}$ は同値関係になる（演習）．

同値関係と同値類

- $\sim$ を集合 X 上の同値関係とする．$x \in X$ に対し，
  $[x]_\sim \{x' \in X : x \sim x'\}$

定理 2

$\sim$ が集合 X 上の同値関係のとき，$\mathcal{P}_\sim = \{[x]_\sim : x \in X\}$ は X の分割になる．

- 逆に，$\mathcal{P}$ が X の分割のとき，$x, y \in X$ に対し，$x \sim_\mathcal{P} y$ を「$S \in \mathcal{P}$ で $x, y \in S$ となるものがある」ことで定義すると，$\sim_\mathcal{P}$ は同値関係になる．

- 上の，同値関係から分割の構成と，分割から同値関係の構成は互いに逆になっている．特に，

定理 3

(a) $\sim$ が X 上の同値関係なら，$\sim_{\mathcal{P}_\sim}$ は $\sim$ と一致する．

(b) $\mathcal{R}$ が X の分割なら $\mathcal{P}_{\sim_\mathcal{R}}$ は $\mathcal{R}$ と一致する．

同値関係と同値類

- $\sim$ を集合 X 上の同値関係とする． $x \in X$ に対し，
  $$[x]_\sim\{x' \in X : x \sim x'\}$$

定理 2

$\sim$ が集合 X 上の同値関係のとき， $\mathcal{P}_\sim = \{[x]_\sim : x \in X\}$ は X の分割になる．

- 逆に， $\mathcal{P}$ が X の分割のとき， $x, y \in X$ に対し， $x \sim_\mathcal{P} y$ を「$S \in \mathcal{P}$ で $x, y \in S$ となるものがある」ことで定義すると， $\sim_\mathcal{P}$ は同値関係になる．

- 上の，同値関係から分割の構成と，分割から同値関係の構成は互いに逆になっている． 特に，

定理 3

(a) $\sim$ が X 上の同値関係なら， $\sim_{\mathcal{P}_\sim}$ は $\sim$ と一致する．

(b) $\mathcal{R}$ が X の分割なら $\mathcal{P}_{\sim_\mathcal{R}}$ は $\mathcal{R}$ と一致する．

同値関係と同値類

- $\sim$ を集合 X 上の同値関係とする．$x \in X$ に対し，

  $[x]_{\sim}\{x' \in X : x \sim x'\}$

定理 2

$\sim$ が集合 X 上の同値関係のとき，$\mathcal{P}_{\sim} = \{[x]_{\sim} : x \in X\}$ は X の分割になる．

- 逆に，$\mathcal{P}$ が X の分割のとき，$x, y \in X$ に対し，$x \sim_{\mathcal{P}} y$ を「$S \in \mathcal{P}$ で $x, y \in S$ となるものがある」ことで定義すると，$\sim_{\mathcal{P}}$ は同値関係になる．

- 上の，同値関係から分割の構成と，分割から同値関係の構成は互いに逆になっている．特に，

定理 3

(a) $\sim$ が X 上の同値関係なら，$\sim_{\mathcal{P}_{\sim}}$ は $\sim$ と一致する．

(b) $\mathcal{R}$ が X の分割なら $\mathcal{P}_{\sim_{\mathcal{R}}}$ は $\mathcal{R}$ と一致する．

同値関係と同値類

- $\sim$ を集合 X 上の同値関係とする．$x \in X$ に対し，

  $[x]_{\sim}\{x' \in X : x \sim x'\}$

定理 2

$\sim$ が集合 X 上の同値関係のとき，$\mathcal{P}_{\sim} = \{[x]_{\sim} : x \in X\}$ は X の分割になる．

- 逆に，$\mathcal{P}$ が X の分割のとき，$x, y \in X$ に対し，$x \sim_{\mathcal{P}} y$ を「$S \in \mathcal{P}$ で $x, y \in S$ となるものがある」ことで定義すると，$\sim_{\mathcal{P}}$ は同値関係になる．

- 上の，同値関係から分割の構成と，分割から同値関係の構成は互いに逆になっている．特に，

定理 3

(a) $\sim$ が X 上の同値関係なら，$\sim_{\mathcal{P}_{\sim}}$ は $\sim$ と一致する．

(b) $\mathcal{R}$ が X の分割なら $\mathcal{P}_{\sim_{\mathcal{R}}}$ は $\mathcal{R}$ と一致する．

同値関係の惹き起こす分割の例

- $X = \mathbb{N}$ として X 上の $x \equiv y \pmod{k}$ を同値関係 $\sim$ として考える．ただし k は，ある正の自然数．このとき $\sim$ の同値類は，$[0]_\sim, [1]_\sim, [2]_\sim, \ldots, [k-1]_\sim$ の k 個である．
  特に $k = 2$ のときには，同値類は $[0]_\sim, [1]_\sim$ となり，これらは，それぞれ偶数の全体と奇数の全体である．
- X を平面上の直線の全体として，$\ell, \ell' \in X$ に対し，$\ell \sim \ell'$ を ℓ と ℓ' が平行であること，として導入する．このとき，$\sim$ の同値類の全体は，$\{[\ell]_\sim : \ell \text{ は原点を通る直線}\}$ として与えられる．$\sim$ の同値類は，直線の方向の抽象化となっていると考えられ，それぞれの同値類は原点を通るその方向の直線を，代表元として含む．

同値関係の惹き起こす分割の例

- $X = \mathbb{N}$ として X 上の $x \equiv y \pmod{k}$ を同値関係 $\sim$ として考える．ただし k は，ある正の自然数．このとき $\sim$ の同値類は，$[0]_\sim, [1]_\sim, [2]_\sim, \dots, [k-1]_\sim$ の k 個である．
特に $k = 2$ のときには，同値類は $[0]_\sim, [1]_\sim$ となり，これらは，それぞれ偶数の全体と奇数の全体である．

- X を平面上の直線の全体として，$\ell, \ell' \in X$ に対し，$\ell \sim \ell'$ を ℓ と ℓ' が平行であること，として導入する．このとき，$\sim$ の同値類の全体は，$\{[\ell]_\sim : \ell \text{ は原点を通る直線}\}$ として与えられる．$\sim$ の同値類は，直線の方向の抽象化となっていると考えられ，それぞれの同値類は原点を通るその方向の直線を，代表元 として含む．

同値関係の惹き起こす分割の例

- $X = \mathbb{N}$ として X 上の $x \equiv y \pmod{k}$ を同値関係 $\sim$ として考える．ただし k は，ある正の自然数．このとき $\sim$ の同値類は，$[0]_\sim, [1]_\sim, [2]_\sim, \dots, [k-1]_\sim$ の k 個である．

  特に $k = 2$ のときには，同値類は $[0]_\sim, [1]_\sim$ となり，これらは，それぞれ偶数の全体と奇数の全体である．

- X を平面上の直線の全体として，$\ell, \ell' \in X$ に対し，$\ell \sim \ell'$ を ℓ と ℓ' が平行であること，として導入する．このとき，$\sim$ の同値類の全体は，$\{[\ell]_\sim : \ell$ は原点を通る直線$\}$ として与えられる．$\sim$ の同値類は，直線の方向の抽象化となっていると考えられ，それぞれの同値類は原点を通るその方向の直線を，代表元 として含む．

同値関係の惹き起こす分割の例

- $X = \mathbb{N}$ として X 上の $x \equiv y \pmod{k}$ を同値関係 $\sim$ として考える．ただし k は，ある正の自然数．このとき $\sim$ の同値類は，$[0]_\sim, [1]_\sim, [2]_\sim, \dots, [k-1]_\sim$ の k 個である．
  特に $k = 2$ のときには，同値類は $[0]_\sim$, $[1]_\sim$ となり，これらは，それぞれ偶数の全体と奇数の全体である．

- X を平面上の直線の全体として，$\ell, \ell' \in X$ に対し，$\ell \sim \ell'$ を ℓ と ℓ' が平行であること，として導入する．このとき，$\sim$ の同値類の全体は，$\{[\ell]_\sim : \ell$ は原点を通る直線$\}$ として与えられる．$\sim$ の同値類は，直線の方向の抽象化となっていると考えられ，それぞれの同値類は原点を通るその方向の直線を，代表元 として含む．

同値関係の惹き起こす分割の例

- $X = \mathbb{N}$ として X 上の $x \equiv y \pmod{k}$ を同値関係 $\sim$ として考える．ただし k は，ある正の自然数．このとき $\sim$ の同値類は，$[0]_\sim, [1]_\sim, [2]_\sim, \ldots, [k-1]_\sim$ の k 個である．

  特に $k = 2$ のときには，同値類は $[0]_\sim, [1]_\sim$ となり，これらは，それぞれ偶数の全体と奇数の全体である．

- X を平面上の直線の全体として，$\ell, \ell' \in X$ に対し，$\ell \sim \ell'$ を ℓ と ℓ' が平行であること，として導入する．このとき，$\sim$ の同値類の全体は，$\{[\ell]_\sim : \ell$ は原点を通る直線$\}$ として与えられる．$\sim$ の同値類は，直線の方向の抽象化となっていると考えられ，それぞれの同値類は原点を通るその方向の直線を，代表元 として含む．

¡Gracias por su atención!

同値関係の例

- 任意の集合 X に対して X 上の二項関係 $=$ を考えると，これは同値関係である．

- X として自然数 (natural numbers) の全体 $\mathbb{N}$ を考える．$\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\cdots\}$ である．k を 0 でない自然数として，自然数上の二項関係 $\sim$ を，

$$m \sim n \iff \text{“}m\text{ を }k\text{ で割った余り”} = \text{“}n\text{ を }k\text{ で割った余り”}$$

で定義する．この二項関係 $\sim$ は $\mathbb{N}$ 上の同値関係である．

- 上の関係 $m \sim n$ は $m \equiv n \pmod{k}$ と表わされることが多い（mod は ”modulo” の略）．

- $m \equiv n \pmod{2}$ は奇数と偶数をそれぞれすべて同一視するような同値関係となっている．

- k を正の自然数として，すべての $m \in \mathbb{N}$ に対し，$n \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ で，$m \equiv n \pmod{k}$ となるものが存在する．[m を k で割った余りを n とすればよい．]

同値関係の例

▶ 任意の集合 X に対して X 上の二項関係 $=$ を考えると，これは同値関係である．

▶ X として自然数 (natural numbers) の全体 $\mathbb{N}$ を考える．
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$ である．k を 0 でない自然数として，自然数上の二項関係 $\sim$ を，

$$m \sim n \quad \Leftrightarrow$$
$$\text{“}m \text{ を } k \text{ で割った余り”} = \text{“}n \text{ を } k \text{ で割った余り”}$$

で定義する．この二項関係 $\sim$ は $\mathbb{N}$ 上の同値関係である．

▷ 上の関係 $m \sim n$ は $m \equiv n \pmod{k}$ と表わされることが多い（ mod は ”modulo” の略）．

▷ $m \equiv n \pmod{2}$ は奇数と偶数をそれぞれすべて同一視するような同値関係となっている．

▷ k を正の自然数として，すべての $m \in \mathbb{N}$ に対し，
$n \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ で，$m \equiv n \pmod{k}$ となるものが存在する．
[m を k で割った余りを n とすればよい．]

同値関係の例

- 任意の集合 X に対して X 上の二項関係 $=$ を考えると，これは同値関係である．

- X として自然数 (natural numbers) の全体 $\mathbb{N}$ を考える．
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$ である．k を 0 でない自然数として，自然数上の二項関係 $\sim$ を，

$$m \sim n \iff \text{“}m \text{ を } k \text{ で割った余り”} = \text{“}n \text{ を } k \text{ で割った余り”}$$

で定義する．この二項関係 $\sim$ は $\mathbb{N}$ 上の同値関係である．

▷ 上の関係 $m \sim n$ は $m \equiv n \pmod{k}$ と表わされることが多い（mod は ”modulo” の略）．

▷ $m \equiv n \pmod{2}$ は奇数と偶数をそれぞれすべて同一視するような同値関係となっている．

▷ k を正の自然数として，すべての $m \in \mathbb{N}$ に対し，$n \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ で，$m \equiv n \pmod{k}$ となるものが存在する．[m を k で割った余りを n とすればよい．]

同値関係の例

- 任意の集合 X に対して X 上の二項関係 $=$ を考えると，これは同値関係である．

- X として自然数 (natural numbers) の全体 $\mathbb{N}$ を考える．
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$ である． k を 0 でない自然数として，自然数上の二項関係 $\sim$ を，

$$m \sim n \iff \text{“}m \text{ を } k \text{ で割った余り”} = \text{“}n \text{ を } k \text{ で割った余り”}$$

で定義する．この二項関係 $\sim$ は $\mathbb{N}$ 上の同値関係である．

▷ 上の関係 $m \sim n$ は $m \equiv n \pmod k$ と表わされることが多い（ mod は "modulo" の略）．

▷ $m \equiv n \pmod 2$ は奇数と偶数をそれぞれすべて同一視するような同値関係となっている．

▷ k を正の自然数として，すべての $m \in \mathbb{N}$ に対し，$n \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ で，$m \equiv n \pmod k$ となるものが存在する．[m を k で割った余りを n とすればよい．]

同値関係の例

- 任意の集合 X に対して X 上の二項関係 $=$ を考えると，これは同値関係である．

- X として自然数 (natural numbers) の全体 $\mathbb{N}$ を考える．
$\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\cdots\}$ である．k を 0 でない自然数として，自然数上の二項関係 $\sim$ を，

$$m\sim n \iff$$
$$\text{“}m \text{ を } k \text{ で割った余り”} = \text{“}n \text{ を } k \text{ で割った余り”}$$

で定義する．この二項関係 $\sim$ は $\mathbb{N}$ 上の同値関係である．

▷ 上の関係 $m\sim n$ は $m\equiv n \pmod{k}$ と表わされることが多い（mod は "modulo" の略）．

▷ $m\equiv n \pmod{2}$ は奇数と偶数をそれぞれすべて同一視するような同値関係となっている．

▷ k を正の自然数として，すべての $m\in\mathbb{N}$ に対し，
$n\in\{0,1,\ldots,n-1\}$ で，$m\equiv n \pmod{k}$ となるものが存在する．
[m を k で割った余りを n とすればよい．]

同値関係の例

- 任意の集合 X に対して X 上の二項関係 $=$ を考えると，これは同値関係である．

- X として自然数 (natural numbers) の全体 $\mathbb{N}$ を考える．
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$ である．k を 0 でない自然数として，自然数上の二項関係 $\sim$ を，

$$m \sim n \iff$$
$$\text{“}m \text{ を } k \text{ で割った余り”} = \text{“}n \text{ を } k \text{ で割った余り”}$$

で定義する．この二項関係 $\sim$ は $\mathbb{N}$ 上の同値関係である．

- 上の関係 $m \sim n$ は $m \equiv n \pmod{k}$ と表わされることが多い（ mod は ”modulo” の略）．

- $m \equiv n \pmod{2}$ は奇数と偶数をそれぞれすべて同一視するような同値関係となっている．

- k を正の自然数として，すべての $m \in \mathbb{N}$ に対し，
$n \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ で，$m \equiv n \pmod{k}$ となるものが存在する．
[m を k で割った余りを n とすればよい．]

同値関係の例

- 任意の集合 X に対して X 上の二項関係 $=$ を考えると，これは同値関係である．

- X として自然数 (natural numbers) の全体 $\mathbb{N}$ を考える．
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$ である． k を 0 でない自然数として，自然数上の二項関係 $\sim$ を，

$$m \sim n \quad \Leftrightarrow$$
$$\text{“}m \text{ を } k \text{ で割った余り”} = \text{“}n \text{ を } k \text{ で割った余り”}$$

で定義する． この二項関係 $\sim$ は $\mathbb{N}$ 上の同値関係である．

▷ 上の関係 $m \sim n$ は $m \equiv n \pmod{k}$ と表わされることが多い（ mod は ”modulo” の略）．

▷ $m \equiv n \pmod{2}$ は奇数と偶数をそれぞれすべて同一視するような同値関係となっている．

▷ k を正の自然数として，すべての $m \in \mathbb{N}$ に対し，
$n \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ で， $m \equiv n \pmod{k}$ となるものが存在する．
[m を k で割った余りを n とすればよい．]

同値関係の例

▶ 任意の集合 X に対して X 上の二項関係 $=$ を考えると，これは同値関係である．

▶ X として自然数 (natural numbers) の全体 $\mathbb{N}$ を考える．
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$ である． k を 0 でない自然数として，自然数上の二項関係 $\sim$ を，

$$m \sim n \quad \Leftrightarrow$$
$$\text{“}m \text{ を } k \text{ で割った余り”} = \text{“}n \text{ を } k \text{ で割った余り”}$$

で定義する．この二項関係 $\sim$ は $\mathbb{N}$ 上の同値関係である．

▷ 上の関係 $m \sim n$ は $m \equiv n \pmod{k}$ と表わされることが多い（ mod は "modulo" の略）．

▷ $m \equiv n \pmod{2}$ は奇数と偶数をそれぞれすべて同一視するような同値関係となっている．

▷ k を正の自然数として，すべての $m \in \mathbb{N}$ に対し，
$n \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ で，$m \equiv n \pmod{k}$ となるものが存在する．
[m を k で割った余りを n とすればよい．]

同値関係の例

▶ 任意の集合 X に対して X 上の二項関係 $=$ を考えると，これは同値関係である．

▶ X として自然数 (natural numbers) の全体 $\mathbb{N}$ を考える．
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$ である．k を 0 でない自然数として，自然数上の二項関係 $\sim$ を，

$m \sim n \;\Leftrightarrow$
"m を k で割った余り" $=$ "n を k で割った余り"

で定義する．この二項関係 $\sim$ は $\mathbb{N}$ 上の同値関係である．

▷ 上の関係 $m \sim n$ は $m \equiv n \pmod{k}$ と表わされることが多い（ mod は "modulo" の略）.

▷ $m \equiv n \pmod{2}$ は奇数と偶数をそれぞれすべて同一視するような同値関係となっている．

▷ k を正の自然数として，すべての $m \in \mathbb{N}$ に対し，
$n \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ で，$m \equiv n \pmod{k}$ となるものが存在する．
[m を k で割った余りを n とすればよい．]

同値関係の例

▶ 任意の集合 X に対して X 上の二項関係 $=$ を考えると，これは同値関係である．

▶ X として自然数 (natural numbers) の全体 $\mathbb{N}$ を考える．
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$ である．k を 0 でない自然数として，自然数上の二項関係 $\sim$ を，

$m \sim n \iff$
"m を k で割った余り" $=$ "n を k で割った余り"

で定義する．この二項関係 $\sim$ は $\mathbb{N}$ 上の同値関係である．

▷ 上の関係 $m \sim n$ は $m \equiv n \pmod{k}$ と表わされることが多い（mod は "modulo" の略）．

▷ $m \equiv n \pmod{2}$ は奇数と偶数をそれぞれすべて同一視するような同値関係となっている．

▷ k を正の自然数として，すべての $m \in \mathbb{N}$ に対し，
$n \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ で，$m \equiv n \pmod{k}$ となるものが存在する．
[m を k で割った余りを n とすればよい．]

同値関係の例

▶ 任意の集合 X に対して X 上の二項関係 $=$ を考えると，これは同値関係である．

▶ X として自然数 (natural numbers) の全体 $\mathbb{N}$ を考える．$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$ である．k を 0 でない自然数として，自然数上の二項関係 $\sim$ を，

$$m \sim n \iff \text{“}m \text{ を } k \text{ で割った余り”} = \text{“}n \text{ を } k \text{ で割った余り”}$$

で定義する．この二項関係 $\sim$ は $\mathbb{N}$ 上の同値関係である．

▷ 上の関係 $m \sim n$ は $m \equiv n \pmod{k}$ と表わされることが多い（ mod は "modulo" の略）．

▷ $m \equiv n \pmod{2}$ は奇数と偶数をそれぞれすべて同一視するような同値関係となっている．

▷ k を正の自然数として，すべての $m \in \mathbb{N}$ に対し，$n \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ で，$m \equiv n \pmod{k}$ となるものが存在する．[m を k で割った余りを n とすればよい．]

同値関係の例 (2/2)

- X を平面上の直線の全体とする．つまり X は平面上の直線を全部集めてできる集合とする．$\ell, \ell' \in X$ に対し，$\ell \sim \ell'$ を，ℓ と ℓ' は平行である ことと定義すると，R は X 上の同値関係となる．
  - 平面上に原点 o をとって固定すると，次が成り立つ:

    各 $\ell \in X$ に対し，原点 o を通る $\ell^* \in X$ で，$\ell \sim \ell^*$ となるものがちょうど 1 つ定まる．

- X を平面上の三角形をすべて集めた集合とする，$t, t' \in X$ に対し，$t \sim t'$ を t と t' は合同である ことと定義すると，$\sim$ は同値関係となる．

- X を上の例と同じようにとる．$t, t' \in X$ に対し，$t \sim t'$ を t と t' は相似である ことと定義すると，$\sim$ は同値関係となる．

戻る

同値関係の例 (2/2)

- X を平面上の直線の全体とする．つまり X は平面上の直線を全部集めてできる集合とする．$\ell, \ell' \in X$ に対し，$\ell \sim \ell'$ を，ℓ と ℓ' は平行である ことと定義すると，R は X 上の同値関係となる．
  - 平面上に原点 o をとって固定すると，次が成り立つ:

    各 $\ell \in X$ に対し，原点 o を通る $\ell^* \in X$ で， $\ell \sim \ell^*$ となるものがちょうど 1 つ定まる．

- X を平面上の三角形をすべて集めた集合とする，$t, t' \in X$ に対し，$t \sim t'$ を t と t' は合同である ことと定義すると，$\sim$ は同値関係となる．

- X を上の例と同じようにとる．$t, t' \in X$ に対し，$t \sim t'$ を t と t' は相似である ことと定義すると，$\sim$ は同値関係となる．

同値関係の例 (2/2)

- X を平面上の直線の全体とする．つまり X は平面上の直線を全部集めてできる集合とする．$\ell, \ell' \in X$ に対し，$\ell \sim \ell'$ を，ℓ と ℓ' は平行である ことと定義すると，R は X 上の同値関係となる．
  - 平面上に原点 o をとって固定すると，次が成り立つ:

    各 $\ell \in X$ に対し，原点 o を通る $\ell^* \in X$ で，$\ell \sim \ell^*$ となるものがちょうど 1 つ定まる．

- X を平面上の三角形をすべて集めた集合とする，$t, t' \in X$ に対し，$t \sim t'$ を t と t' は合同である ことと定義すると，$\sim$ は同値関係となる．

- X を上の例と同じようにとる．$t, t' \in X$ に対し，$t \sim t'$ を t と t' は相似である ことと定義すると，$\sim$ は同値関係となる．

同値関係の例 (2/2)

- X を平面上の直線の全体とする．つまり X は平面上の直線を全部集めてできる集合とする．$\ell, \ell' \in X$ に対し，$\ell \sim \ell'$ を，ℓ と ℓ' は平行である ことと定義すると，R は X 上の同値関係となる．
  - 平面上に原点 o をとって固定すると，次が成り立つ:

    各 $\ell \in X$ に対し，原点 o を通る $\ell^* \in X$ で，$\ell \sim \ell^*$ となるものがちょうど 1 つ定まる．

- X を平面上の三角形をすべて集めた集合とする，$t, t' \in X$ に対し，$t \sim t'$ を t と t' は合同である ことと定義すると，$\sim$ は同値関係となる．

- X を上の例と同じようにとる．$t, t' \in X$ に対し，$t \sim t'$ を t と t' は相似である ことと定義すると，$\sim$ は同値関係となる．

戻る

同値関係の例 (2/2)

- X を平面上の直線の全体とする．つまり X は平面上の直線を全部集めてできる集合とする．$\ell, \ell' \in X$ に対し，$\ell \sim \ell'$ を，ℓ と ℓ' は平行である ことと定義すると，R は X 上の同値関係となる．

- 平面上に原点 o をとって固定すると，次が成り立つ:

  各 $\ell \in X$ に対し，原点 o を通る $\ell^* \in X$ で，$\ell \sim \ell^*$ となるものがちょうど 1 つ定まる．

- X を平面上の三角形をすべて集めた集合とする，$t, t' \in X$ に対し，$t \sim t'$ を t と t' は合同である ことと定義すると，$\sim$ は同値関係となる．

- X を上の例と同じようにとる．$t, t' \in X$ に対し，$t \sim t'$ を t と t' は相似である ことと定義すると，$\sim$ は同値関係となる．

同値関係の例 (2/2)

- X を平面上の直線の全体とする．つまり X は平面上の直線を全部集めてできる集合とする．$\ell, \ell' \in X$ に対し，$\ell \sim \ell'$ を，ℓ と ℓ' は平行である ことと定義すると，R は X 上の同値関係となる．
- 平面上に原点 o をとって固定すると，次が成り立つ:

  各 $\ell \in X$ に対し，原点 o を通る $\ell^* \in X$ で，$\ell \sim \ell^*$ となるものがちょうど 1 つ定まる．

- X を平面上の三角形をすべて集めた集合とする，$t, t' \in X$ に対し，$t \sim t'$ を t と t' は合同である ことと定義すると，$\sim$ は同値関係となる．
- X を上の例と同じようにとる．$t, t' \in X$ に対し，$t \sim t'$ を t と t' は相似である ことと定義すると，$\sim$ は同値関係となる．

同値関係の例 (2/2)

- X を平面上の直線の全体とする．つまり X は平面上の直線を全部集めてできる集合とする．$\ell, \ell' \in X$ に対し，$\ell \sim \ell'$ を，ℓ と ℓ' は平行である ことと定義すると，R は X 上の同値関係となる．
  - 平面上に原点 o をとって固定すると，次が成り立つ:

    各 $\ell \in X$ に対し，原点 o を通る $\ell^* \in X$ で，$\ell \sim \ell^*$ となるものがちょうど 1 つ定まる．

- X を平面上の三角形をすべて集めた集合とする，$t, t' \in X$ に対し，$t \sim t'$ を t と t' は合同である ことと定義すると，$\sim$ は同値関係となる．

- X を上の例と同じようにとる．$t, t' \in X$ に対し，$t \sim t'$ を t と t' は相似である ことと定義すると，$\sim$ は同値関係となる．

同値関係の例 (2/2)

- X を平面上の直線の全体とする．つまり X は平面上の直線を全部集めてできる集合とする．$\ell, \ell' \in X$ に対し，$\ell \sim \ell'$ を，ℓ と ℓ' は平行である ことと定義すると，R は X 上の同値関係となる．
  - 平面上に原点 o をとって固定すると，次が成り立つ:

    各 $\ell \in X$ に対し，原点 o を通る $\ell^* \in X$ で，$\ell \sim \ell^*$ となるものがちょうど 1 つ定まる．

- X を平面上の三角形をすべて集めた集合とする，$t, t' \in X$ に対し，$t \sim t'$ を t と t' は合同である ことと定義すると，$\sim$ は同値関係となる．

- X を上の例と同じようにとる．$t, t' \in X$ に対し，$t \sim t'$ を t と t' は相似である ことと定義すると，$\sim$ は同値関係となる．