構造の数理

VII. 「順序の理論」の数学的な基礎（その 1）

Sakaé Fuchino (渕野 昌)

Kobe University (神戸大学大学院 システム情報学研究科)

fuchino@diamond.kobe-u.ac.jp

http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/

(December 1, 2010 (19:58 JST) version)

神戸大学 2010 年度後期の講義

November 25, 2010

This presentation is typeset by pLATEX with beamer class.

数の大小関係

- X を, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ のどれかとする.

解説

このとき X 上の（通常の）大小関係 $\leqq$ は次の性質を満たす:

- すべての $a \in X$ に対し, $a \leqq a$ (反射律)
- すべての $a, b \in X$ に対し, $a \leqq b$ かつ $b \leqq a$ なら $a = b$ が成り立つ (反対称律)
- すべての $a, b, c \in X$ に対し, $a \leqq b$ かつ $b \leqq c$ なら, $a \leqq c$ が成り立つ (推移律)
- すべての $a, b \in X$ に対し, $a \leqq b$ または $b \leqq a$ の少なくとも片方は成り立つ (比較可能性)

- 任意の集合 X 上の二項関係 R が上の $\leqq$ の性質に相当する性質を満たすとき, R は X 上の **線型順序** であるという.

数の大小関係

解説

- X を, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ のどれかとする.

このとき X 上の（通常の）大小関係 $\leqq$ は次の性質を満たす:

- すべての $a \in X$ に対し, $a \leqq a$ (反射律)
- すべての $a, b \in X$ に対し, $a \leqq b$ かつ $b \leqq a$ なら $a = b$ が成り立つ (反対称律)
- すべての $a, b, c \in X$ に対し, $a \leqq b$ かつ $b \leqq c$ なら, $a \leqq c$ が成り立つ (推移律)
- すべての $a, b \in X$ に対し, $a \leqq b$ または $b \leqq a$ の少なくとも片方は成り立つ (比較可能性)

- 任意の集合 X 上の二項関係 R が上の $\leqq$ の性質に相当する性質を満たすとき, R は X 上の 線型順序 であるという.

数の大小関係

- X を，$\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ のどれかとする．

解説

このとき X 上の（通常の）大小関係 $\leqq$ は次の性質を満たす:

- すべての $a \in X$ に対し，$a \leqq a$ (反射律)
- すべての $a, b \in X$ に対し，$a \leqq b$ かつ $b \leqq a$ なら $a = b$ が成り立つ (反対称律)
- すべての $a, b, c \in X$ に対し，$a \leqq b$ かつ $b \leqq c$ なら，$a \leqq c$ が成り立つ (推移律)
- すべての $a, b \in X$ に対し，$a \leqq b$ または $b \leqq a$ の少なくとも片方は成り立つ (比較可能性)

- 任意の集合 X 上の二項関係 R が上の $\leqq$ の性質に相当する性質を満たすとき，R は X 上の 線型順序 であるという．

数の大小関係

解説

- X を，$\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ のどれかとする．

このとき X 上の（通常の）大小関係 $\leqq$ は次の性質を満たす:

- すべての $a \in X$ に対し，$a \leqq a$ (反射律)
- すべての $a, b \in X$ に対し，$a \leqq b$ かつ $b \leqq a$ なら $a = b$ が成り立つ (反対称律)
- すべての $a, b, c \in X$ に対し，$a \leqq b$ かつ $b \leqq c$ なら，$a \leqq c$ が成り立つ (推移律)
- すべての $a, b \in X$ に対し，$a \leqq b$ または $b \leqq a$ の少なくとも片方は成り立つ (比較可能性)

- 任意の集合 X 上の二項関係 R が上の $\leqq$ の性質に相当する性質を満たすとき，R は X 上の 線型順序 であるという．

数の大小関係

- X を，$\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ のどれかとする．

解説

このとき X 上の（通常の）大小関係 $\leqq$ は次の性質を満たす:

- すべての $a \in X$ に対し，$a \leqq a$ (反射律)
- すべての $a, b \in X$ に対し，$a \leqq b$ かつ $b \leqq a$ なら $a = b$ が成り立つ (反対称律)
- すべての $a, b, c \in X$ に対し，$a \leqq b$ かつ $b \leqq c$ なら，$a \leqq c$ が成り立つ (推移律)
- すべての $a, b \in X$ に対し，$a \leqq b$ または $b \leqq a$ の少なくとも片方は成り立つ (比較可能性)

- 任意の集合 X 上の二項関係 R が上の $\leqq$ の性質に相当する性質を満たすとき，R は X 上の 線型順序 であるという．

数の大小関係

解説

- X を，$\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ のどれかとする．

このとき X 上の（通常の）大小関係 $\leqq$ は次の性質を満たす:

- すべての $a \in X$ に対し，$a \leqq a$ (反射律)
- すべての $a, b \in X$ に対し，$a \leqq b$ かつ $b \leqq a$ なら $a = b$ が成り立つ (反対称律)
- すべての $a, b, c \in X$ に対し，$a \leqq b$ かつ $b \leqq c$ なら，$a \leqq c$ が成り立つ (推移律)
- すべての $a, b \in X$ に対し，$a \leqq b$ または $b \leqq a$ の少なくとも片方は成り立つ (比較可能性)

- 任意の集合 X 上の二項関係 R が上の $\leqq$ の性質に相当する性質を満たすとき，R は X 上の **線型順序** であるという．

数の大小関係

解説

- X を，$\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ のどれかとする．

このとき X 上の（通常の）大小関係 $\leqq$ は次の性質を満たす:

- すべての $a \in X$ に対し，$a \leqq a$ (反射律)
- すべての $a, b \in X$ に対し，$a \leqq b$ かつ $b \leqq a$ なら $a = b$ が成り立つ (反対称律)
- すべての $a, b, c \in X$ に対し，$a \leqq b$ かつ $b \leqq c$ なら，$a \leqq c$ が成り立つ (推移律)
- すべての $a, b \in X$ に対し，$a \leqq b$ または $b \leqq a$ の少なくとも片方は成り立つ (比較可能性)

- 任意の集合 X 上の二項関係 R が上の $\leqq$ の性質に相当する性質を満たすとき，R は X 上の 線型順序 であるという．

数の大小関係

解説

- X を，$\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ のどれかとする．

このとき X 上の（通常の）大小関係 $\leqq$ は次の性質を満たす:

- すべての $a \in X$ に対し，$a \leqq a$ (反射律)
- すべての $a, b \in X$ に対し，$a \leqq b$ かつ $b \leqq a$ なら $a = b$ が成り立つ (反対称律)
- すべての $a, b, c \in X$ に対し，$a \leqq b$ かつ $b \leqq c$ なら，$a \leqq c$ が成り立つ (推移律)
- すべての $a, b \in X$ に対し，$a \leqq b$ または $b \leqq a$ の少なくとも片方は成り立つ (比較可能性)

- 任意の集合 X 上の二項関係 R が上の $\leqq$ の性質に相当する性質を満たすとき，R は X 上の 線型順序 であるという．

数の大小関係

解説

- X を，$\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ のどれかとする．

このとき X 上の（通常の）大小関係 $\leqq$ は次の性質を満たす:

- すべての $a \in X$ に対し，$a \leqq a$ (反射律)
- すべての $a, b \in X$ に対し，$a \leqq b$ かつ $b \leqq a$ なら $a = b$ が成り立つ (反対称律)
- すべての $a, b, c \in X$ に対し，$a \leqq b$ かつ $b \leqq c$ なら，$a \leqq c$ が成り立つ (推移律)
- すべての $a, b \in X$ に対し，$a \leqq b$ または $b \leqq a$ の少なくとも片方は成り立つ (比較可能性)

- 任意の集合 X 上の二項関係 R が上の $\leqq$ の性質に相当する性質を満たすとき，R は X 上の 線型順序 であるという．

数の大小関係

解説

- X を，$\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ のどれかとする．

このとき X 上の（通常の）大小関係 $\leqq$ は次の性質を満たす:

- すべての $a \in X$ に対し，$a \leqq a$ （反射律）
- すべての $a, b \in X$ に対し，$a \leqq b$ かつ $b \leqq a$ なら $a = b$ が成り立つ （反対称律）
- すべての $a, b, c \in X$ に対し，$a \leqq b$ かつ $b \leqq c$ なら，$a \leqq c$ が成り立つ （推移律）
- すべての $a, b \in X$ に対し，$a \leqq b$ または $b \leqq a$ の少なくとも片方は成り立つ （比較可能性）

- 任意の集合 X 上の二項関係 R が上の $\leqq$ の性質に相当する性質を満たすとき，R は X 上の **線型順序** であるという．

数の大小関係

- X を，$\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ のどれかとする．

解説

このとき X 上の（通常の）大小関係 $\leqq$ は次の性質を満たす:

- すべての $a \in X$ に対し，$a \leqq a$ (反射律)
- すべての $a, b \in X$ に対し，$a \leqq b$ かつ $b \leqq a$ なら $a = b$ が成り立つ (反対称律)
- すべての $a, b, c \in X$ に対し，$a \leqq b$ かつ $b \leqq c$ なら，$a \leqq c$ が成り立つ (推移律)
- すべての $a, b \in X$ に対し，$a \leqq b$ または $b \leqq a$ の少なくとも片方は成り立つ (比較可能性)

- 任意の集合 X 上の二項関係 R が上の $\leqq$ の性質に相当する性質を満たすとき，R は X 上の 線型順序 であるという．

数の大小関係

▶ X を，$\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ のどれかとする．

◂ 解説

このとき X 上の（通常の）大小関係 $\leqq$ は次の性質を満たす:

- ▷ すべての $a \in X$ に対し，$a \leqq a$ (反射律)
- ▷ すべての $a, b \in X$ に対し，$a \leqq b$ かつ $b \leqq a$ なら $a = b$ が成り立つ (反対称律)
- ▷ すべての $a, b, c \in X$ に対し，$a \leqq b$ かつ $b \leqq c$ なら，$a \leqq c$ が成り立つ (推移律)
- ▷ すべての $a, b \in X$ に対し，$a \leqq b$ または $b \leqq a$ の少なくとも片方は成り立つ (比較可能性)

▶ 任意の集合 X 上の二項関係 R が上の $\leqq$ の性質に相当する性質を満たすとき，R は X 上の 線型順序 であるという．

線形順序

- X を任意の集合とするとき，X 上の二項関係 R が次の性質を満たすとき，R は X 上の 線形順序 (linear ordering) あるいは，全順序 (total ordering) であるという:
  - すべての $a \in X$ に対し，$a \, R \, a$ (反射律)
  - すべての $a, b \in X$ に対し，$a \, R \, b$ かつ $b \, R \, a$ なら $a = b$ が成り立つ (反対称律)
  - すべての $a, b, c \in X$ に対し，$a \, R \, b$ かつ $b \, R \, c$ なら，$a \, R \, c$ が成り立つ (推移律)
  - すべての $a, b \in X$ に対し，$a \, R \, b$ または $b \, R \, a$ の少なくとも片方は成り立つ (比較可能性)

線形順序

- X を任意の集合とするとき，X 上の二項関係 R が次の性質を満たすとき，R は X 上の 線形順序 (linear ordering) あるいは，全順序 (total ordering) であるという:
  - すべての $a \in X$ に対し，$a\,R\,a$ (反射律)
  - すべての $a, b \in X$ に対し，$a\,R\,b$ かつ $b\,R\,a$ なら $a = b$ が成り立つ (反対称律)
  - すべての $a, b, c \in X$ に対し，$a\,R\,b$ かつ $b\,R\,c$ なら，$a\,R\,c$ が成り立つ (推移律)
  - すべての $a, b \in X$ に対し，$a\,R\,b$ または $b\,R\,a$ の少なくとも片方は成り立つ (比較可能性)

線形順序

- X を任意の集合とするとき，X 上の二項関係 R が次の性質を満たすとき，R は X 上の 線形順序 (linear ordering) あるいは，全順序 (total ordering) であるという:

  - すべての $a \in X$ に対し，$a \, R \, a$ (反射律)
  - すべての $a, b \in X$ に対し，$a \, R \, b$ かつ $b \, R \, a$ なら $a = b$ が成り立つ (反対称律)
  - すべての $a, b, c \in X$ に対し，$a \, R \, b$ かつ $b \, R \, c$ なら，$a \, R \, c$ が成り立つ (推移律)
  - すべての $a, b \in X$ に対し，$a \, R \, b$ または $b \, R \, a$ の少なくとも片方は成り立つ (比較可能性)

線形順序

- X を任意の集合とするとき，X 上の二項関係 R が次の性質を満たすとき，R は X 上の 線形順序 (linear ordering) あるいは，全順序 (total ordering) であるという:
  - すべての $a \in X$ に対し，$a \, R \, a$ (反射律)
  - すべての $a, b \in X$ に対し，$a \, R \, b$ かつ $b \, R \, a$ なら $a = b$ が成り立つ (反対称律)
  - すべての $a, b, c \in X$ に対し，$a \, R \, b$ かつ $b \, R \, c$ なら，$a \, R \, c$ が成り立つ (推移律)
  - すべての $a, b \in X$ に対し，$a \, R \, b$ または $b \, R \, a$ の少なくとも片方は成り立つ (比較可能性)

線形順序

- X を任意の集合とするとき，X 上の二項関係 R が次の性質を満たすとき，R は X 上の 線形順序 (linear ordering) あるいは，全順序 (total ordering) であるという:

  - すべての $a \in X$ に対し，$a\,R\,a$ (反射律)
  - すべての $a, b \in X$ に対し，$a\,R\,b$ かつ $b\,R\,a$ なら $a = b$ が成り立つ (反対称律)
  - すべての $a, b, c \in X$ に対し，$a\,R\,b$ かつ $b\,R\,c$ なら，$a\,R\,c$ が成り立つ (推移律)
  - すべての $a, b \in X$ に対し，$a\,R\,b$ または $b\,R\,a$ の少なくとも片方は成り立つ (比較可能性)

線形順序

- X を任意の集合とするとき，X 上の二項関係 R が次の性質を満たすとき，R は X 上の 線形順序 (linear ordering) あるいは，全順序 (total ordering) であるという:

  - すべての $a \in X$ に対し，$a \mathrel{R} a$ (反射律)
  - すべての $a, b \in X$ に対し，$a \mathrel{R} b$ かつ $b \mathrel{R} a$ なら $a = b$ が成り立つ (反対称律)
  - すべての $a, b, c \in X$ に対し，$a \mathrel{R} b$ かつ $b \mathrel{R} c$ なら，$a \mathrel{R} c$ が成り立つ (推移律)
  - すべての $a, b \in X$ に対し，$a \mathrel{R} b$ または $b \mathrel{R} a$ の少なくとも片方は成り立つ (比較可能性)

線形順序

- X を任意の集合とするとき，X 上の二項関係 R が次の性質を満たすとき，R は X 上の 線形順序 (linear ordering) あるいは，全順序 (total ordering) であるという:

  - すべての $a \in X$ に対し，$a\,R\,a$ (反射律)
  - すべての $a, b \in X$ に対し，$a\,R\,b$ かつ $b\,R\,a$ なら $a = b$ が成り立つ (反対称律)
  - すべての $a, b, c \in X$ に対し，$a\,R\,b$ かつ $b\,R\,c$ なら，$a\,R\,c$ が成り立つ (推移律)
  - すべての $a, b \in X$ に対し，$a\,R\,b$ または $b\,R\,a$ の少なくとも片方は成り立つ (比較可能性)

線形順序

- X を任意の集合とするとき，X 上の二項関係 R が次の性質を満たすとき，R は X 上の 線形順序 (linear ordering) あるいは，全順序 (total ordering) であるという:

  - すべての $a \in X$ に対し，$a\,R\,a$ (反射律)
  - すべての $a, b \in X$ に対し，$a\,R\,b$ かつ $b\,R\,a$ なら $a = b$ が成り立つ (反対称律)
  - すべての $a, b, c \in X$ に対し，$a\,R\,b$ かつ $b\,R\,c$ なら，$a\,R\,c$ が成り立つ (推移律)
  - すべての $a, b \in X$ に対し，$a\,R\,b$ または $b\,R\,a$ の少なくとも片方は成り立つ (比較可能性)

線形順序

- X を任意の集合とするとき，X 上の二項関係 R が次の性質を満たすとき，R は X 上の 線形順序 (linear ordering) あるいは，全順序 (total ordering) であるという:

  - すべての $a \in X$ に対し，$a\,R\,a$ (反射律)
  - すべての $a, b \in X$ に対し，$a\,R\,b$ かつ $b\,R\,a$ なら $a = b$ が成り立つ (反対称律)
  - すべての $a, b, c \in X$ に対し，$a\,R\,b$ かつ $b\,R\,c$ なら，$a\,R\,c$ が成り立つ (推移律)
  - すべての $a, b \in X$ に対し，$a\,R\,b$ または $b\,R\,a$ の少なくとも片方は成り立つ (比較可能性)

線形順序

- X を任意の集合とするとき，X 上の二項関係 R が次の性質を満たすとき，R は X 上の 線形順序 (linear ordering) あるいは，全順序 (total ordering) であるという:

  - すべての $a \in X$ に対し，$a \mathrel{R} a$ (反射律)
  - すべての $a, b \in X$ に対し，$a \mathrel{R} b$ かつ $b \mathrel{R} a$ なら $a = b$ が成り立つ (反対称律)
  - すべての $a, b, c \in X$ に対し，$a \mathrel{R} b$ かつ $b \mathrel{R} c$ なら，$a \mathrel{R} c$ が成り立つ (推移律)
  - すべての $a, b \in X$ に対し，$a \mathrel{R} b$ または $b \mathrel{R} a$ の少なくとも片方は成り立つ (比較可能性)

線型順序の例

- X を任意の集合とするとき，X 上の二項関係 R が次の性質を満たすとき，R は X 上の 線形順序 (linear ordering) あるいは，全順序 (total ordering) であるという:
  - すべての $a \in X$ に対し，$a\,R\,a$ (反射律)
  - すべての $a, b \in X$ に対し，$a\,R\,b$ かつ $b\,R\,a$ なら $a = b$ (反対称律)
  - すべての $a, b, c \in X$ に対し，$a\,R\,b$ かつ $b\,R\,c$ なら，$a\,R\,c$ (推移律)
  - すべての $a, b \in X$ に対し，$a\,R\,b$ または $b\,R\,a$ の少なくとも片方は成り立つ (比較可能性)

- X を $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ のどれかとするとき，X 上の通常の大小関係 $\leq$ は X 上の線形順序である．

- $X = \{$ ぐー, ちょき, ぱー $\}$ とする．X 上の二項関係 R を，$x\,R\,y$ となる $x, y \in X$ の組は，(ぐー, ぐー), (ちょき, ちょき), (ぱー, ぱー), (ちょき, ぐー), (ぐー, ぱー), (ぱー, ちょき) であるとして定義する．つまり $x\,R\,y$ はじゃんけんで，あいこになるか，y が x に勝つこと，として定義する．このとき R は X 上の線型順序か? R は線形順序の性質のうちどれを満たすか?

線型順序の例

- X を任意の集合とするとき，X 上の二項関係 R が次の性質を満たすとき，R は X 上の 線形順序 (linear ordering) あるいは，全順序 (total ordering) であるという:
  - すべての $a \in X$ に対し，$a\ R\ a$ (反射律)
  - すべての $a, b \in X$ に対し，$a\ R\ b$ かつ $b\ R\ a$ なら $a = b$ (反対称律)
  - すべての $a, b, c \in X$ に対し，$a\ R\ b$ かつ $b\ R\ c$ なら，$a\ R\ c$ (推移律)
  - すべての $a, b \in X$ に対し，$a\ R\ b$ または $b\ R\ a$ の少なくとも片方は成り立つ (比較可能性)

- X を $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ のどれかとするとき，X 上の通常の大小関係 $\leq$ は X 上の線形順序である．

- $X = \{$ ぐー, ちょき, ぱー $\}$ とする．X 上の二項関係 R を，$x\ R\ y$ となる $x, y \in X$ の組は，(ぐー, ぐー), (ちょき, ちょき), (ぱー, ぱー), (ちょき, ぐー), (ぐー, ぱー), (ぱー, ちょき) であるとして定義する．つまり $x\ R\ y$ はじゃんけんで，あいこになるか，y が x に勝つこと，として定義する．このとき R は X 上の線型順序か? R は線形順序の性質のうちどれを満たすか?

線型順序の例

- X を任意の集合とするとき，X 上の二項関係 R が次の性質を満たすとき，R は X 上の 線形順序 (linear ordering) あるいは，全順序 (total ordering) であるという:
  - すべての $a \in X$ に対し，$a \mathrel{R} a$ （反射律）
  - すべての $a, b \in X$ に対し，$a \mathrel{R} b$ かつ $b \mathrel{R} a$ なら $a = b$ （反対称律）
  - すべての $a, b, c \in X$ に対し，$a \mathrel{R} b$ かつ $b \mathrel{R} c$ なら，$a \mathrel{R} c$ （推移律）
  - すべての $a, b \in X$ に対し，$a \mathrel{R} b$ または $b \mathrel{R} a$ の少なくとも片方は成り立つ （比較可能性）

- X を $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ のどれかとするとき，X 上の通常の大小関係 $\leqq$ は X 上の線形順序である．

- $X = \{\,$ぐー, ちょき, ぱー$\,\}$ とする．X 上の二項関係 R を，$x \mathrel{R} y$ となる $x, y \in X$ の組は，(ぐー, ぐー), (ちょき, ちょき), (ぱー, ぱー), (ちょき, ぐー), (ぐー, ぱー), (ぱー, ちょき) であるとして定義する．つまり $x \mathrel{R} y$ はじゃんけんで，あいこになるか，y が x に勝つこと，として定義する．このとき R は X 上の線型順序か? R は線形順序の性質のうちどれを満たすか?

線型順序の例

- X を任意の集合とするとき，X 上の二項関係 R が次の性質を満たすとき，R は X 上の 線形順序 (linear ordering) あるいは，全順序 (total ordering) であるという:
  - すべての $a \in X$ に対し，$a \mathrel{R} a$ (反射律)
  - すべての $a, b \in X$ に対し，$a \mathrel{R} b$ かつ $b \mathrel{R} a$ なら $a = b$ (反対称律)
  - すべての $a, b, c \in X$ に対し，$a \mathrel{R} b$ かつ $b \mathrel{R} c$ なら，$a \mathrel{R} c$ (推移律)
  - すべての $a, b \in X$ に対し，$a \mathrel{R} b$ または $b \mathrel{R} a$ の少なくとも片方は成り立つ (比較可能性)

- X を $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ のどれかとするとき，X 上の通常の大小関係 $\leqq$ は X 上の線形順序である．

- $X = \{$ ぐー, ちょき, ぱー $\}$ とする．X 上の二項関係 R を，$x \mathrel{R} y$ となる $x, y \in X$ の組は，(ぐー, ぐー), (ちょき, ちょき), (ぱー, ぱー), (ちょき, ぐー), (ぐー, ぱー), (ぱー, ちょき) であるとして定義する．つまり $x \mathrel{R} y$ はじゃんけんで，あいこになるか，y が x に勝つこと，として定義する．このとき R は X 上の線型順序か? R は線形順序の性質のうちどれを満たすか?

線型順序の例

▶ X を任意の集合とするとき，X 上の二項関係 R が次の性質を満たすとき，R は X 上の 線形順序 (linear ordering) あるいは，全順序 (total ordering) であるという:

▷ すべての $a \in X$ に対し，$a\ R\ a$ (反射律)

▷ すべての $a, b \in X$ に対し，$a\ R\ b$ かつ $b\ R\ a$ なら $a = b$ (反対称律)

▷ すべての $a, b, c \in X$ に対し，$a\ R\ b$ かつ $b\ R\ c$ なら，$a\ R\ c$ (推移律)

▷ すべての $a, b \in X$ に対し，$a\ R\ b$ または $b\ R\ a$ の少なくとも片方は成り立つ (比較可能性)

▶ X を $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ のどれかとするとき，X 上の通常の大小関係 $\leqq$ は X 上の線形順序である．

▶ $X = \{$ ぐー, ちょき, ぱー $\}$ とする．X 上の二項関係 R を，$x\ R\ y$ となる $x, y \in X$ の組は，(ぐー, ぐー), (ちょき, ちょき), (ぱー, ぱー), (ちょき, ぐー), (ぐー, ぱー), (ぱー, ちょき) であるとして定義する．つまり $x\ R\ y$ はじゃんけんで，あいこになるか，y が x に勝つこと，として定義する．このとき R は X 上の線型順序か? R は線形順序の性質のうちどれを満たすか?

線形順序の例 (その 2)

- $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$ とするとき，$\mathbb{N}$ 上の二項関係 R を，m, $n \in \mathbb{N}$ に対し，$m = pk + q$, $n = p'k + q'$ とするとき（ただし，p, q, p', $q' \in \mathbb{N}$ で $0 \leqq q, q' < k$ とする），

$$m\ R\ n \Leftrightarrow m = n \text{ または } (q = q' \text{ かつ } p < p') \text{ または } q < q'$$

と定義する．$q = q'$ は前回の記号を使うと $m \equiv n \pmod k$ とも書ける，$q < q'$ を $m < n \pmod k$ と書くことにすると，

$$\boxed{\begin{array}{l} m\ R\ n \Leftrightarrow \\ \qquad (m \equiv n \pmod k \text{ かつ } m \leqq n) \text{ または } m < n \pmod k \end{array}}$$

ともあらわせる．R は $\mathbb{N}$ 上の線形順序となる（演習）．$\mathbb{N}$ を R に関して小さい順に並べると，

$$0, k, 2k, \ldots, 1, k+1, 2k+1, \ldots, 2, k+2, 2k+2\ , \ldots \ldots, k-1, 2k-1, 3k-1, \ldots$$

となる．$k = 1$ のときには，上の順序は通常の $\leqq$ と一致する．$k > 1$ のときには，上の順序で $, \ldots$ の部分（無限に続くプロセス）が k 個あらわれる．

線形順序の例 (その 2)

- $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$ とするとき，$\mathbb{N}$ 上の二項関係 R を，m, $n \in \mathbb{N}$ に対し，$m = pk + q$, $n = p'k + q'$ とするとき（ただし，p, q, p', $q' \in \mathbb{N}$ で $0 \leqq q, q' < k$ とする），

$$m\ R\ n \Leftrightarrow m = n \text{ または } (q = q' \text{ かつ } p < p') \text{ または } q < q'$$

と定義する．$q = q'$ は前回の記号を使うと $m \equiv n (\bmod k)$ とも書ける，$q < q'$ を $m < n (\bmod k)$ と書くことにすると，

$$\boxed{\begin{array}{l} m\ R\ n \Leftrightarrow \\ \qquad (m \equiv n (\bmod k) \text{ かつ } m \leqq n) \text{ または } m < n (\bmod k) \end{array}}$$

ともあらわせる．R は $\mathbb{N}$ 上の線形順序となる（演習）．$\mathbb{N}$ を R に関して小さい順に並べると，

$$0, k, 2k, \ldots, 1, k+1, 2k+1, \ldots, 2, k+2, 2k+2, \ldots\ldots, k-1, 2k-1, 3k-1, \ldots$$

となる．$k = 1$ のときには，上の順序は通常の $\leqq$ と一致する．$k > 1$ のときには，上の順序で $, \ldots$ の部分（無限に続くプロセス）が k 個あらわれる．

線形順序の例 (その 2)

- $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$ とするとき，$\mathbb{N}$ 上の二項関係 R を，m, $n \in \mathbb{N}$ に対し，$m = pk + q$, $n = p'k + q'$ とするとき（ただし，p, q, p', $q' \in \mathbb{N}$ で $0 \leqq q, q' < k$ とする），

$$m \; R \; n \Leftrightarrow m = n \text{ または } (q = q' \text{ かつ } p < p') \text{ または } q < q'$$

と定義する．$q = q'$ は前回の記号を使うと $m \equiv n (\mathrm{mod}\, k)$ とも書ける，$q < q'$ を $m < n (\mathrm{mod}\, k)$ と書くことにすると，

$$\boxed{\begin{aligned} &m \; R \; n \Leftrightarrow \\ &\qquad (m \equiv n (\mathrm{mod}\, k) \text{ かつ } m \leqq n) \text{ または } m < n (\mathrm{mod}\, k) \end{aligned}}$$

ともあらわせる．R は $\mathbb{N}$ 上の線形順序となる（演習）．$\mathbb{N}$ を R に関して小さい順に並べると，

$$0, k, 2k, \ldots, 1, k+1, 2k+1, \ldots, 2, k+2, 2k+2, \ldots\ldots, k-1, 2k-1, 3k-1, \ldots$$

となる．$k = 1$ のときには，上の順序は通常の $\leqq$ と一致する．$k > 1$ のときには，上の順序で $, \ldots$ の部分（無限に続くプロセス）が k 個あらわれる．

線形順序の例 (その 2)

- $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$ とするとき，$\mathbb{N}$ 上の二項関係 R を，m, $n \in \mathbb{N}$ に対し，$m = pk + q$, $n = p'k + q'$ とするとき（ただし，p, q, p', $q' \in \mathbb{N}$ で $0 \leqq q, q' < k$ とする），

$$m\ R\ n \Leftrightarrow m = n \text{ または } (q = q' \text{ かつ } p < p') \text{ または } q < q'$$

と定義する．$q = q'$ は前回の記号を使うと $m \equiv n (\bmod k)$ とも書ける，$q < q'$ を $m < n (\bmod k)$ と書くことにすると，

$$\boxed{\begin{array}{l} m\ R\ n \Leftrightarrow \\ \qquad (m \equiv n (\bmod k) \text{ かつ } m \leqq n) \text{ または } m < n (\bmod k) \end{array}}$$

ともあらわせる．R は $\mathbb{N}$ 上の線形順序となる（演習）．$\mathbb{N}$ を R に関して小さい順に並べると，

$$0, k, 2k, \ldots, 1, k+1, 2k+1, \ldots, 2, k+2, 2k+2\ , \ldots\ldots, k-1, 2k-1, 3k-1, \ldots$$

となる．$k = 1$ のときには，上の順序は通常の $\leqq$ と一致する．$k > 1$ のときには，上の順序で $, \ldots$ の部分（無限に続くプロセス）が k 個あらわれる．

線形順序の例 (その 2)

▶ $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$ とするとき，$\mathbb{N}$ 上の二項関係 R を，m, $n \in \mathbb{N}$ に対し，$m = pk + q$, $n = p'k + q'$ とするとき（ただし，p, q, p', $q' \in \mathbb{N}$ で $0 \leqq q, q' < k$ とする），

$$m \; R \; n \Leftrightarrow m = n \text{ または } (q = q' \text{ かつ } p < p') \text{ または } q < q'$$

と定義する．$q = q'$ は前回の記号を使うと $m \equiv n (\mathrm{mod}\, k)$ とも書ける，$q < q'$ を $m < n (\mathrm{mod}\, k)$ と書くことにすると，

$$\boxed{\begin{aligned} & m \; R \; n \Leftrightarrow \\ & \qquad (m \equiv n (\mathrm{mod}\, k) \text{ かつ } m \leqq n) \text{ または } m < n (\mathrm{mod}\, k) \end{aligned}}$$

ともあらわせる．R は $\mathbb{N}$ 上の線形順序となる（演習）．$\mathbb{N}$ を R に関して小さい順に並べると，

$$0, k, 2k, \ldots, 1, k+1, 2k+1, \ldots, 2, k+2, 2k+2 \; , \ldots \ldots, k-1, 2k-1, 3k-1, \ldots$$

となる．$k = 1$ のときには，上の順序は通常の $\leqq$ と一致する．$k > 1$ のときには，上の順序で $, \ldots$ の部分（無限に続くプロセス）が k 個あらわれる．

線形順序の例 (その 2)

- $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$ とするとき，$\mathbb{N}$ 上の二項関係 R を，m, $n \in \mathbb{N}$ に対し，$m = pk + q$, $n = p'k + q'$ とするとき（ただし，p, q, p', $q' \in \mathbb{N}$ で $0 \leqq q, q' < k$ とする），

$$m \mathrel{R} n \Leftrightarrow m = n \text{ または } (q = q' \text{ かつ } p < p') \text{ または } q < q'$$

と定義する．$q = q'$ は前回の記号を使うと $m \equiv n (\mathrm{mod}\ k)$ とも書ける，$q < q'$ を $m < n (\mathrm{mod}\ k)$ と書くことにすると，

$$\boxed{m \mathrel{R} n \Leftrightarrow (m \equiv n (\mathrm{mod}\ k) \text{ かつ } m \leqq n) \text{ または } m < n (\mathrm{mod}\ k)}$$

ともあらわせる．R は $\mathbb{N}$ 上の線形順序となる（演習）．$\mathbb{N}$ を R に関して小さい順に並べると，

$$0, k, 2k, \ldots, 1, k+1, 2k+1, \ldots, 2, k+2, 2k+2, \ldots\ldots, k-1, 2k-1, 3k-1, \ldots$$

となる．$k = 1$ のときには，上の順序は通常の $\leqq$ と一致する．$k > 1$ のときには，上の順序で $, \ldots$ の部分（無限に続くプロセス）が k 個あらわれる．

線形順序の例 (その 2)

- $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$ とするとき，$\mathbb{N}$ 上の二項関係 R を，m, $n \in \mathbb{N}$ に対し，$m = pk + q$, $n = p'k + q'$ とするとき（ただし，p, q, p', $q' \in \mathbb{N}$ で $0 \leqq q, q' < k$ とする），

$$m \; R \; n \Leftrightarrow m = n \text{ または } (q = q' \text{ かつ } p < p') \text{ または } q < q'$$

と定義する．$q = q'$ は前回の記号を使うと $m \equiv n (\bmod k)$ とも書ける，$q < q'$ を $m < n (\bmod k)$ と書くことにすると，

$$\boxed{\begin{array}{l} m \; R \; n \Leftrightarrow \\ \qquad (m \equiv n (\bmod k) \text{ かつ } m \leqq n) \text{ または } m < n (\bmod k) \end{array}}$$

ともあらわせる．R は $\mathbb{N}$ 上の線形順序となる（演習）．$\mathbb{N}$ を R に関して小さい順に並べると，

$$0, k, 2k, \ldots, 1, k+1, 2k+1, \ldots, 2, k+2, 2k+2, \ldots\ldots, k-1, 2k-1, 3k-1, \ldots$$

となる．$k = 1$ のときには，上の順序は通常の $\leqq$ と一致する．$k > 1$ のときには，上の順序で $, \ldots$ の部分（無限に続くプロセス）が k 個あらわれる．

線形順序の例 (その 2)

▶ $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$ とするとき，$\mathbb{N}$ 上の二項関係 R を，m, $n \in \mathbb{N}$ に対し，$m = pk + q$, $n = p'k + q'$ とするとき（ただし，p, q, p', $q' \in \mathbb{N}$ で $0 \leqq q, q' < k$ とする），

$$m \; R \; n \Leftrightarrow m = n \text{ または } (q = q' \text{ かつ } p < p') \text{ または } q < q'$$

と定義する．$q = q'$ は前回の記号を使うと $m \equiv n (\mathrm{mod}\ k)$ とも書ける，$q < q'$ を $m < n (\mathrm{mod}\ k)$ と書くことにすると，

$$\boxed{\begin{aligned} & m \; R \; n \Leftrightarrow \\ & \qquad (m \equiv n (\mathrm{mod}\ k) \text{ かつ } m \leqq n) \text{ または } m < n (\mathrm{mod}\ k) \end{aligned}}$$

ともあらわせる．R は $\mathbb{N}$ 上の線形順序となる（演習）．$\mathbb{N}$ を R に関して小さい順に並べると，

$$0, k, 2k, \ldots, 1, k+1, 2k+1, \ldots, 2, k+2, 2k+2, \ldots\ldots, k-1, 2k-1, 3k-1, \ldots$$

となる．$k = 1$ のときには，上の順序は通常の $\leqq$ と一致する．
$k > 1$ のときには，上の順序で $, \ldots$ の部分（無限に続くプロセス）が k 個あらわれる．

線形順序の例 (その 2)

▶ $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$ とするとき，$\mathbb{N}$ 上の二項関係 R を，m, $n \in \mathbb{N}$ に対し，$m = pk + q$, $n = p'k + q'$ とするとき（ただし，p, q, p', $q' \in \mathbb{N}$ で $0 \leqq q, q' < k$ とする），

$m \mathrel{R} n \Leftrightarrow m = n$ または $(q = q'$ かつ $p < p')$ または $q < q'$

と定義する．$q = q'$ は前回の記号を使うと $m \equiv n (\mathrm{mod}\ k)$ とも書ける，$q < q'$ を $m < n (\mathrm{mod}\ k)$ と書くことにすると，

$$\boxed{m \mathrel{R} n \Leftrightarrow (m \equiv n (\mathrm{mod}\ k) \text{ かつ } m \leqq n) \text{ または } m < n (\mathrm{mod}\ k)}$$

ともあらわせる．R は $\mathbb{N}$ 上の線形順序となる（演習）．$\mathbb{N}$ を R に関して小さい順に並べると，

$0, k, 2k, \ldots, 1, k+1, 2k+1, \ldots, 2, k+2, 2k+2, \ldots\ldots, k-1, 2k-1, 3k-1, \ldots$

となる．$k = 1$ のときには，上の順序は通常の $\leqq$ と一致する．
$k > 1$ のときには，上の順序で $, \ldots$ の部分（無限に続くプロセス）が k 個あらわれる．

半順序

- 集合 X 上の二項関係 R が線形順序の性質のうち，比較可能性以外の性質を満たすとき（比較可能性は成り立っていても成り立っていなくてもどちらでもよい）， R は 半順序 (partial ordering) であるという．つまり:

R が X 上の半順序であるとは， R が次の 3 つの性質を満たすことである:

- すべての $a \in X$ に対し， $a \mathrel{R} a$ (反射律)
- すべての $a, b \in X$ に対し， $a \mathrel{R} b$ かつ $b \mathrel{R} a$ なら $a = b$ が成り立つ (反対称律)
- すべての $a, b, c \in X$ に対し， $a \mathrel{R} b$ かつ $b \mathrel{R} c$ なら， $a \mathrel{R} c$ が成り立つ (推移律)

半順序

- 集合 X 上の二項関係 R が線形順序の性質のうち，比較可能性以外の性質を満たすとき（比較可能性は成り立っていても成り立っていなくてもどちらでもよい），R は半順序 (partial ordering) であるという．つまり:

R が X 上の半順序であるとは，R が次の 3 つの性質を満たすことである:

- すべての $a \in X$ に対し，$a \, R \, a$ (反射律)
- すべての $a, b \in X$ に対し，$a \, R \, b$ かつ $b \, R \, a$ なら $a = b$ が成り立つ (反対称律)
- すべての $a, b, c \in X$ に対し，$a \, R \, b$ かつ $b \, R \, c$ なら，$a \, R \, c$ が成り立つ (推移律)

半順序

- 集合 X 上の二項関係 R が線形順序の性質のうち，比較可能性以外の性質を満たすとき（比較可能性は成り立っていても成り立っていなくてもどちらでもよい），R は 半順序 (partial ordering) であるという．つまり:

R が X 上の半順序であるとは，R が次の 3 つの性質を満たすことである:

- すべての $a \in X$ に対し，$a \mathrel{R} a$ (反射律)
- すべての $a, b \in X$ に対し，$a \mathrel{R} b$ かつ $b \mathrel{R} a$ なら $a = b$ が成り立つ (反対称律)
- すべての $a, b, c \in X$ に対し，$a \mathrel{R} b$ かつ $b \mathrel{R} c$ なら，$a \mathrel{R} c$ が成り立つ (推移律)

半順序

- 集合 X 上の二項関係 R が線形順序の性質のうち，比較可能性以外の性質を満たすとき（比較可能性は成り立っていても成り立っていなくてもどちらでもよい），R は 半順序 (partial ordering) であるという．つまり:

R が X 上の半順序であるとは，R が次の 3 つの性質を満たすことである:

- すべての $a \in X$ に対し，$a \, R \, a$ (反射律)
- すべての $a, b \in X$ に対し，$a \, R \, b$ かつ $b \, R \, a$ なら $a = b$ が成り立つ (反対称律)
- すべての $a, b, c \in X$ に対し，$a \, R \, b$ かつ $b \, R \, c$ なら，$a \, R \, c$ が成り立つ (推移律)

半順序

- 集合 X 上の二項関係 R が線形順序の性質のうち，比較可能性以外の性質を満たすとき（比較可能性は成り立っていても成り立っていなくてもどちらでもよい）， R は 半順序 (partial ordering) であるという．つまり:

R が X 上の半順序であるとは， R が次の 3 つの性質を満たすことである:

- すべての $a \in X$ に対し， $a \mathrel{R} a$ (反射律)
- すべての $a, b \in X$ に対し， $a \mathrel{R} b$ かつ $b \mathrel{R} a$ なら $a = b$ が成り立つ (反対称律)
- すべての $a, b, c \in X$ に対し， $a \mathrel{R} b$ かつ $b \mathrel{R} c$ なら， $a \mathrel{R} c$ が成り立つ (推移律)

半順序

- 集合 X 上の二項関係 R が線形順序の性質のうち，比較可能性以外の性質を満たすとき（比較可能性は成り立っていても成り立っていなくてもどちらでもよい），R は 半順序 (partial ordering) であるという．つまり:

R が X 上の半順序であるとは，R が次の 3 つの性質を満たすことである:

- すべての $a \in X$ に対し，$a\,R\,a$ (反射律)
- すべての $a, b \in X$ に対し，$a\,R\,b$ かつ $b\,R\,a$ なら $a = b$ が成り立つ (反対称律)
- すべての $a, b, c \in X$ に対し，$a\,R\,b$ かつ $b\,R\,c$ なら，$a\,R\,c$ が成り立つ (推移律)

半順序

- 集合 X 上の二項関係 R が線形順序の性質のうち，比較可能性以外の性質を満たすとき（比較可能性は成り立っていても成り立っていなくてもどちらでもよい），R は 半順序 (partial ordering) であるという．つまり:

R が X 上の半順序であるとは，R が次の 3 つの性質を満たすことである:

- すべての $a \in X$ に対し，$a \, R \, a$ (反射律)
- すべての $a, b \in X$ に対し，$a \, R \, b$ かつ $b \, R \, a$ なら $a = b$ が成り立つ (反対称律)
- すべての $a, b, c \in X$ に対し，$a \, R \, b$ かつ $b \, R \, c$ なら，$a \, R \, c$ が成り立つ (推移律)

半順序

▶ 集合 X 上の二項関係 R が線形順序の性質のうち，比較可能性以外の性質を満たすとき（比較可能性は成り立っていても成り立っていなくてもどちらでもよい），R は半順序 (partial ordering) であるという．つまり:

R が X 上の半順序であるとは，R が次の 3 つの性質を満たすことである:

▷ すべての $a \in X$ に対し，$a\,R\,a$ (反射律)

▷ すべての $a, b \in X$ に対し，$a\,R\,b$ かつ $b\,R\,a$ なら $a = b$ が成り立つ (反対称律)

▷ すべての $a, b, c \in X$ に対し，$a\,R\,b$ かつ $b\,R\,c$ なら，$a\,R\,c$ が成り立つ (推移律)

半順序

- 集合 X 上の二項関係 R が線形順序の性質のうち，比較可能性以外の性質を満たすとき（比較可能性は成り立っていても成り立っていなくてもどちらでもよい），R は 半順序 (partial ordering) であるという．つまり:

R が X 上の半順序であるとは，R が次の 3 つの性質を満たすことである:

- すべての $a \in X$ に対し，$a \mathrel{R} a$ (反射律)
- すべての $a, b \in X$ に対し，$a \mathrel{R} b$ かつ $b \mathrel{R} a$ なら $a = b$ が成り立つ (反対称律)
- すべての $a, b, c \in X$ に対し，$a \mathrel{R} b$ かつ $b \mathrel{R} c$ なら，$a \mathrel{R} c$ が成り立つ (推移律)

半順序の例

R が X 上の半順序であるとは，R が次の 3 つの性質を満たすことである:

- ▷ すべての $a \in X$ に対し，$a\,R\,a$ (反射律)
- ▷ すべての $a, b \in X$ に対し，$a\,R\,b$ かつ $b\,R\,a$ なら $a = b$ (反対称律)
- ▷ すべての $a, b, c \in X$ に対し，$a\,R\,b$ かつ $b\,R\,c$ なら，$a\,R\,c$ (推移律)

- X 上の任意の線形順序は X 上の半順序でもある．
- X 上の関係 R を $a\,R\,b \Leftrightarrow a = b$ で定義すると， R は半順序である．
- $\mathbb{N}$ 上の半順序 R を $m\,R\,n \Leftrightarrow m$ は n を割りきる で定義すると，R は半順序となる．たとえば， $2 \not R\, 3$ かつ $3 \not R\, 2$ だから，この R は線形順序ではないことがわかる．

半順序の例

R が X 上の半順序であるとは，R が次の 3 つの性質を満たすことである:

- すべての $a \in X$ に対し，$a\,R\,a$ (反射律)
- すべての $a, b \in X$ に対し，$a\,R\,b$ かつ $b\,R\,a$ なら $a = b$ (反対称律)
- すべての $a, b, c \in X$ に対し，$a\,R\,b$ かつ $b\,R\,c$ なら，$a\,R\,c$ (推移律)

- X 上の任意の線形順序は X 上の半順序でもある．
- X 上の関係 R を $a\,R\,b \Leftrightarrow a = b$ で定義すると，R は半順序である．
- $\mathbb{N}$ 上の半順序 R を $m\,R\,n \Leftrightarrow m$ は n を割りきる で定義すると，R は半順序となる．たとえば，$2 \not R\, 3$ かつ $3 \not R\, 2$ だから，この R は線形順序ではないことがわかる．

半順序の例

R が X 上の半順序であるとは，R が次の 3 つの性質を満たすことである:

- ▷ すべての $a \in X$ に対し，$a \mathrel{R} a$ (反射律)
- ▷ すべての $a, b \in X$ に対し，$a \mathrel{R} b$ かつ $b \mathrel{R} a$ なら $a = b$ (反対称律)
- ▷ すべての $a, b, c \in X$ に対し，$a \mathrel{R} b$ かつ $b \mathrel{R} c$ なら，$a \mathrel{R} c$ (推移律)

- X 上の任意の線形順序は X 上の半順序でもある．
- X 上の関係 R を $a \mathrel{R} b \Leftrightarrow a = b$ で定義すると，R は半順序である．
- $\mathbb{N}$ 上の半順序 R を $m \mathrel{R} n \Leftrightarrow m$ は n を割りきる で定義すると，R は半順序となる．たとえば，$2 \not\mathrel{R} 3$ かつ $3 \not\mathrel{R} 2$ だから，この R は線形順序ではないことがわかる．

半順序の例

R が X 上の半順序であるとは，R が次の 3 つの性質を満たすことである:

- ▷ すべての $a \in X$ に対し，$a\, R\, a$ (反射律)
- ▷ すべての $a, b \in X$ に対し，$a\, R\, b$ かつ $b\, R\, a$ なら $a = b$ (反対称律)
- ▷ すべての $a, b, c \in X$ に対し，$a\, R\, b$ かつ $b\, R\, c$ なら，$a\, R\, c$ (推移律)

- ▶ X 上の任意の線形順序は X 上の半順序でもある.
- ▶ X 上の関係 R を $a\, R\, b \Leftrightarrow a = b$ で定義すると，R は半順序である.
- ▶ $\mathbb{N}$ 上の半順序 R を $m\, R\, n \Leftrightarrow m$ は n を割りきる で定義すると，R は半順序となる．たとえば，$2 \not R\, 3$ かつ $3 \not R\, 2$ だから，この R は線形順序ではないことがわかる.

半順序の線形順序への拡張

定理 1

有限集合 X 上の任意の半順序 R は，X 上の線形順序 R' に拡張できる．

- X 上の二項関係 R' が，別の X 上の二項関係 R の拡張であるとは，すべての $a, b \in X$ に対し，$a\,R\,b$ なら，$a\,R'\,b$ となることである．
- 定理の証明の方針：X の要素の数に関する帰納法で証明する．
- 例：$X = \mathbb{N}$ として $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$ とする．$m, n \in \mathbb{N}$ に対し，

$m\,R\,n \Leftrightarrow m = n$

$m\,R'\,n \Leftrightarrow m \equiv n \pmod{k}$ かつ $m \leq n$;

$m\,R''\,n \Leftrightarrow (m \equiv n \pmod{k}$ かつ $m \leq n$ または $m < n \pmod{k})$

とする．R' は R の拡張で，R'' は R' の拡張である．R'' は

線型順序の最後の例

での関係と一致するから，線型順序である．

半順序の線形順序への拡張

定理 1

有限集合 X 上の任意の半順序 R は，X 上の線形順序 R' に拡張できる．

- X 上の二項関係 R' が，別の X 上の二項関係 R の拡張であるとは，すべての $a, b \in X$ に対し，$a \, R \, b$ なら，$a \, R' \, b$ となることである．
- 定理の証明の方針: X の要素の数に関する帰納法で証明する．
- 例: $X = \mathbb{N}$ として $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$ とする． $m, n \in \mathbb{N}$ に対し，

$m \, R \, n \Leftrightarrow m = n$

$m \, R' \, n \Leftrightarrow m \equiv n \pmod k$ かつ $m \leq n$;

$m \, R'' \, n \Leftrightarrow (m \equiv n \pmod k$ かつ $m \leq n$ または $m < n \pmod k)$

とする． R' は R の拡張で，R'' は R' の拡張である． R'' は

◂ 線型順序の最後の例 での関係と一致するから，線型順序である．

半順序の線形順序への拡張

定理 1

有限集合 X 上の任意の半順序 R は, X 上の線形順序 R' に拡張できる.

- X 上の二項関係 R' が, 別の X 上の二項関係 R の拡張であるとは, すべての $a, b \in X$ に対し, $a\,R\,b$ なら, $a\,R'\,b$ となることである.
- 定理の証明の方針: X の要素の数に関する帰納法で証明する.
- 例: $X = \mathbb{N}$ として $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$ とする. $m, n \in \mathbb{N}$ に対し,

$m\,R\,n \Leftrightarrow m = n$

$m\,R'\,n \Leftrightarrow m \equiv n \pmod k$ かつ $m \leq n$;

$m\,R''\,n \Leftrightarrow (m \equiv n \pmod k$ かつ $m \leq n$ または $m < n \pmod k)$

とする. R' は R の拡張で, R'' は R' の拡張である. R'' は での関係と一致するから, 線型順序である.

半順序の線形順序への拡張

定理 1

有限集合 X 上の任意の半順序 R は，X 上の線形順序 R' に拡張できる．

- X 上の二項関係 R' が，別の X 上の二項関係 R の拡張であるとは，すべての $a, b \in X$ に対し，$a\,R\,b$ なら，$a\,R'\,b$ となることである．
- 定理の証明の方針: X の要素の数に関する帰納法で証明する．
- 例: $X = \mathbb{N}$ として $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$ とする．$m, n \in \mathbb{N}$ に対し，

$m\,R\,n \Leftrightarrow m = n$

$m\,R'\,n \Leftrightarrow m \equiv n \pmod k$ かつ $m \leq n$;

$m\,R''\,n \Leftrightarrow (m \equiv n \pmod k$ かつ $m \leq n$ または $m < n \pmod k)$

とする．R' は R の拡張で，R'' は R' の拡張である．R'' は

◀ 線型順序の最後の例

での関係と一致するから，線型順序である．

半順序の線形順序への拡張

定理 1

有限集合 X 上の任意の半順序 R は，X 上の線形順序 R' に拡張できる．

- X 上の二項関係 R' が，別の X 上の二項関係 R の拡張であるとは，すべての $a, b \in X$ に対し，$a\,R\,b$ なら，$a\,R'\,b$ となることである．
- 定理の証明の方針： X の要素の数に関する帰納法で証明する．
- 例: $X = \mathbb{N}$ として $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$ とする． $m, n \in \mathbb{N}$ に対し，

$m\,R\,n \Leftrightarrow m = n$

$m\,R'\,n \Leftrightarrow m \equiv n \pmod k$ かつ $m \leq n$;

$m\,R''\,n \Leftrightarrow (m \equiv n \pmod k)$ かつ $m \leq n$ または $m < n \pmod k)$

とする． R' は R の拡張で，R'' は R' の拡張である． R'' は

◀ 線型順序の最後の例

での関係と一致するから，線型順序である．

半順序の線形順序への拡張

定理 1

有限集合 X 上の任意の半順序 R は，X 上の線形順序 R' に拡張できる．

- X 上の二項関係 R' が，別の X 上の二項関係 R の拡張であるとは，すべての $a, b \in X$ に対し，$a \mathrel{R} b$ なら，$a \mathrel{R'} b$ となることである．
- 定理の証明の方針: X の要素の数に関する帰納法で証明する．
- 例: $X = \mathbb{N}$ として $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$ とする．$m, n \in \mathbb{N}$ に対し，

$m \mathrel{R} n \Leftrightarrow m = n$

$m \mathrel{R'} n \Leftrightarrow m \equiv n \pmod{k}$ かつ $m \leq n$;

$m \mathrel{R''} n \Leftrightarrow (m \equiv n \pmod{k}$ かつ $m \leq n$ または $m < n \pmod{k})$

とする．R' は R の拡張で，R'' は R' の拡張である．R'' は $\mathbb{N}$ での関係と一致するから，線型順序である．

◀ 線型順序の最後の例

半順序の線形順序への拡張

定理 1

有限集合 X 上の任意の半順序 R は，X 上の線形順序 R' に拡張できる．

- X 上の二項関係 R' が，別の X 上の二項関係 R の拡張であるとは，すべての $a, b \in X$ に対し，$a \, R \, b$ なら，$a \, R' \, b$ となることである．
- 定理の証明の方針: X の要素の数に関する帰納法で証明する．
- 例: $X = \mathbb{N}$ として $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$ とする．$m, n \in \mathbb{N}$ に対し，

$m \, R \, n \Leftrightarrow m = n$

$m \, R' \, n \Leftrightarrow m \equiv n \pmod{k}$ かつ $m \leq n$;

$m \, R'' \, n \Leftrightarrow (m \equiv n \pmod{k}$ かつ $m \leq n$ または $m < n \pmod{k})$

とする．R' は R の拡張で，R'' は R' の拡張である．R'' は

◂ 線型順序の最後の例

での関係と一致するから，線型順序である．

半順序の線形順序への拡張

定理 1

有限集合 X 上の任意の半順序 R は，X 上の線形順序 R' に拡張できる．

- X 上の二項関係 R' が，別の X 上の二項関係 R の拡張であるとは，すべての $a, b \in X$ に対し，$a \mathrel{R} b$ なら，$a \mathrel{R'} b$ となることである．
- 定理の証明の方針: X の要素の数に関する帰納法で証明する．
- 例: $X = \mathbb{N}$ として $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$ とする．$m, n \in \mathbb{N}$ に対し，

$m \mathrel{R} n \Leftrightarrow m = n$

$m \mathrel{R'} n \Leftrightarrow m \equiv n \pmod{k}$ かつ $m \leq n$;

$m \mathrel{R''} n \Leftrightarrow (m \equiv n \pmod{k}$ かつ $m \leq n$ または $m < n \pmod{k})$

とする．R' は R の拡張で，R'' は R' の拡張である．R'' は

での関係と一致するから，線型順序である．

◀ 線型順序の最後の例

半順序の線形順序への拡張

定理 1

有限集合 X 上の任意の半順序 R は，X 上の線形順序 R' に拡張できる．

- X 上の二項関係 R' が，別の X 上の二項関係 R の拡張であるとは，すべての $a, b \in X$ に対し，$a\,R\,b$ なら，$a\,R'\,b$ となることである．
- 定理の証明の方針: X の要素の数に関する帰納法で証明する．
- 例: $X = \mathbb{N}$ として $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$ とする． $m, n \in \mathbb{N}$ に対し，

$m\,R\,n \Leftrightarrow m = n$

$m\,R'\,n \Leftrightarrow m \equiv n \pmod k$ かつ $m \leq n$;

$m\,R''\,n \Leftrightarrow (m \equiv n \pmod k$ かつ $m \leq n$ または $m < n \pmod k)$

とする． R' は R の拡張で，R'' は R' の拡張である． R'' は
での関係と一致するから，線型順序である．

半順序の線形順序への拡張

定理 1

有限集合 X 上の任意の半順序 R は，X 上の線形順序 R' に拡張できる．

- X 上の二項関係 R' が，別の X 上の二項関係 R の拡張であるとは，すべての $a, b \in X$ に対し，$a \, R \, b$ なら，$a \, R' \, b$ となることである．
- 定理の証明の方針: X の要素の数に関する帰納法で証明する．
- 例: $X = \mathbb{N}$ として $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$ とする．$m, n \in \mathbb{N}$ に対し，

$m \, R \, n \Leftrightarrow m = n$

$m \, R' \, n \Leftrightarrow m \equiv n \pmod{k}$ かつ $m \leqq n$;

$m \, R'' \, n \Leftrightarrow (m \equiv n \pmod{k}$ かつ $m \leqq n$ または $m < n \pmod{k})$

とする．R' は R の拡張で，R'' は R' の拡張である．R'' は

での関係と一致するから，線型順序である．

◂ 線型順序の最後の例

半順序の線形順序への拡張

定理 1

有限集合 X 上の任意の半順序 R は，X 上の線形順序 R' に拡張できる．

- X 上の二項関係 R' が，別の X 上の二項関係 R の拡張であるとは，すべての $a, b \in X$ に対し，$a\,R\,b$ なら，$a\,R'\,b$ となることである．
- 定理の証明の方針: X の要素の数に関する帰納法で証明する．
- 例: $X = \mathbb{N}$ として $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$ とする．$m, n \in \mathbb{N}$ に対し，

$m\,R\,n \Leftrightarrow m = n$

$m\,R'\,n \Leftrightarrow m \equiv n \pmod k$ かつ $m \leqq n$;

$m\,R''\,n \Leftrightarrow (m \equiv n \pmod k$ かつ $m \leqq n$ または $m < n \pmod k)$

とする．R' は R の拡張で，R'' は R' の拡張である．R'' は

◂ 線型順序の最後の例 での関係と一致するから，線型順序である．

¡Gracias por su atención!

$\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, ect.

- $\mathbb{R} = \{x : x \text{ は実数}\}$

実数: 数直線上の点に対応する数.

- $\mathbb{Q} = \{x : x \text{ は有理数}\}$

有理数: 分数として表わせる数.

- $\mathbb{Z} = \{k, -k : k \in \mathbb{N}\}$

$\mathbb{Z}$ の要素は整数と呼ばれるのだった.

前回に導入した記号を用いて: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

$\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, ect.

- $\mathbb{R} = \{x \ : \ x$ は実数 $\}$

実数: 数直線上の点に対応する数.

- $\mathbb{Q} = \{x \ : \ x$ は有理数 $\}$

有理数: 分数として表わせる数.

- $\mathbb{Z} = \{k, -k \ : \ k \in \mathbb{N}\}$

$\mathbb{Z}$ の要素は整数と呼ばれるのだった.

前回に導入した記号を用いて: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

$\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, ect.

- $\mathbb{R} = \{x \ : \ x$ は実数 $\}$

実数: 数直線上の点に対応する数.

- $\mathbb{Q} = \{x \ : \ x$ は有理数 $\}$

有理数: 分数として表わせる数.

- $\mathbb{Z} = \{k, -k \ : \ k \in \mathbb{N}\}$

$\mathbb{Z}$ の要素は整数と呼ばれるのだった.

前回に導入した記号を用いて: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

戻る

- $\mathbb{R} = \{x \ : \ x \text{ は実数 }\}$

実数: 数直線上の点に対応する数.

- $\mathbb{Q} = \{x \ : \ x \text{ は有理数 }\}$

有理数: 分数として表わせる数.

- $\mathbb{Z} = \{k, -k \ : \ k \in \mathbb{N}\}$

$\mathbb{Z}$ の要素は整数と呼ばれるのだった.

前回に導入した記号を用いて: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

$\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, ect.

- $\mathbb{R} = \{x \ : \ x$ は実数 $\}$

実数: 数直線上の点に対応する数.

- $\mathbb{Q} = \{x \ : \ x$ は有理数 $\}$

有理数: 分数として表わせる数.

- $\mathbb{Z} = \{k, -k \ : \ k \in \mathbb{N}\}$

$\mathbb{Z}$ の要素は整数と呼ばれるのだった.

前回に導入した記号を用いて: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

$\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, ect.

- $\mathbb{R} = \{x \,:\, x \text{ は実数}\}$

実数: 数直線上の点に対応する数.

- $\mathbb{Q} = \{x \,:\, x \text{ は有理数}\}$

有理数: 分数として表わせる数.

- $\mathbb{Z} = \{k, -k \,:\, k \in \mathbb{N}\}$

$\mathbb{Z}$ の要素は整数と呼ばれるのだった.

前回に導入した記号を用いて: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

$\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, ect.

- $\mathbb{R} = \{x : x \text{ は実数 }\}$

実数: 数直線上の点に対応する数.

- $\mathbb{Q} = \{x : x \text{ は有理数 }\}$

有理数: 分数として表わせる数.

- $\mathbb{Z} = \{k, -k : k \in \mathbb{N}\}$

$\mathbb{Z}$ の要素は整数と呼ばれるのだった.

前回に導入した記号を用いて: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

$\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, ect.

- $\mathbb{R} = \{x \,:\, x \text{ は実数 }\}$

実数: 数直線上の点に対応する数.

- $\mathbb{Q} = \{x \,:\, x \text{ は有理数 }\}$

有理数: 分数として表わせる数.

- $\mathbb{Z} = \{k, -k \,:\, k \in \mathbb{N}\}$

$\mathbb{Z}$ の要素は整数と呼ばれるのだった.

前回に導入した記号を用いて: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

戻る