

構造の数理

VIII. 「順序の理論」の数学的な基礎（その 2）

Sakaé Fuchino (渕野 昌)

Kobe University (神戸大学大学院 システム情報学研究科)

`fuchino@diamond.kobe-u.ac.jp`

`http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/`

(December 8, 2010 (15:16 JST) version)

神戸大学 2010 年度後期の講義

December 2, 2010

This presentation is typeset by $\text{\LaTeX}$ with beamer class.

▶ X を集合とするとき X 上の二項関係 R が 半順序 であるとは、 R が次の性質を満たすことである。

▷ すべての $a \in X$ に対し、 $a R a$ (反射律)

▷ すべての $a, b \in X$ に対し、 $a R b$ かつ $b R a$ なら $a = b$ が成り立つ (反対称律)

▷ すべての $a, b, c \in X$ に対し、 $a R b$ かつ $b R c$ なら、 $a R c$ が成り立つ (推移律)

▶ X 上の半順序 R が更に次の性質を持つとき、 R は 線形順序 であるという：

▷ すべての $a, b \in X$ に対し、 $a R b$ または $b R a$ の少なくとも片方は成り立つ (比較可能性)

▶ X を集合とするとき X 上の二項関係 R が 半順序 であるとは、 R が次の性質を満たすことである。

▷ すべての $a \in X$ に対し、 $a R a$ (反射律)

▷ すべての $a, b \in X$ に対し、 $a R b$ かつ $b R a$ なら $a = b$ が成り立つ (反対称律)

▷ すべての $a, b, c \in X$ に対し、 $a R b$ かつ $b R c$ なら、 $a R c$ が成り立つ (推移律)

▶ X 上の半順序 R が更に次の性質を持つとき、 R は 線形順序 であるという：

▷ すべての $a, b \in X$ に対し、 $a R b$ または $b R a$ の少なくとも片方は成り立つ (比較可能性)

▶ X を集合とするとき X 上の二項関係 R が 半順序 であるとは、 R が次の性質を満たすことである。

▷ すべての $a \in X$ に対し、 $a R a$ (反射律)

▷ すべての $a, b \in X$ に対し、 $a R b$ かつ $b R a$ なら $a = b$ が成り立つ (反対称律)

▷ すべての $a, b, c \in X$ に対し、 $a R b$ かつ $b R c$ なら、 $a R c$ が成り立つ (推移律)

▶ X 上の半順序 R が更に次の性質を持つとき、 R は 線形順序 であるという：

▷ すべての $a, b \in X$ に対し、 $a R b$ または $b R a$ の少なくとも片方は成り立つ (比較可能性)

▶ X を集合とするとき X 上の二項関係 R が 半順序 であるとは、 R が次の性質を満たすことである。

▷ すべての $a \in X$ に対し、 $a R a$ (反射律)

▷ すべての $a, b \in X$ に対し、 $a R b$ かつ $b R a$ なら $a = b$ が成り立つ (反対称律)

▷ すべての $a, b, c \in X$ に対し、 $a R b$ かつ $b R c$ なら、 $a R c$ が成り立つ (推移律)

▶ X 上の半順序 R が更に次の性質を持つとき、 R は 線形順序 であるという：

▷ すべての $a, b \in X$ に対し、 $a R b$ または $b R a$ の少なくとも片方は成り立つ (比較可能性)

▶ X, X' を集合として, $X \subseteq X'$ とする ◀ 記号の復習 ($X = X'$ の場合も考える).

R を X 上の二項関係として R' を X' 上の二項関係とするととき,

▷ R' が R の 拡張 であるとは, すべての $x, y \in X$ に対して,
 $x R y \Rightarrow x R' y$ が成り立つこととする.

▷ R が R' の X への 制限 であるとは, すべての $x, y \in X$ に対して,
 $x R y \Leftrightarrow x R' y$ が成り立つこととする. ◀ 例

▶ 集合 X に対し X の デカルト積 (Cartesian product) X^2 を
 $X^2 = \{(x, y) : x, y \in X\}$ と定義する. 同様に,
 $X^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in X\}$ etc. とする ◀ 例

▶ X 上の二項関係 R は, X^2 の部分集合 $\{(x, y) \in X^2 : x R y\}$
と同一視することができる. この同一視により,

▷ R' は R の拡張である $\Leftrightarrow R \subseteq R'$.

▷ R は R' の X への制限である $\Leftrightarrow R$ は R' と X^2 の共通部分である ($R = R' \cap X^2$).

▶ X, X' を集合として, $X \subseteq X'$ とする (記号の復習) ($X = X'$ の場合も考える).

R を X 上の二項関係として R' を X' 上の二項関係とするととき,

▷ R' が R の 拡張 であるとは, すべての $x, y \in X$ に対して,
 $x R y \Rightarrow x R' y$ が成り立つこととする.

▷ R が R' の X への 制限 であるとは, すべての $x, y \in X$ に対して,
 $x R y \Leftrightarrow x R' y$ が成り立つこととする. (例)

▶ 集合 X に対し X の デカルト積 (Cartesian product) X^2 を
 $X^2 = \{(x, y) : x, y \in X\}$ と定義する. 同様に,
 $X^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in X\}$ etc. とする (例)

▶ X 上の二項関係 R は, X^2 の部分集合 $\{(x, y) \in X^2 : x R y\}$
と同一視することができる. この同一視により,

▷ R' は R の拡張である $\Leftrightarrow R \subseteq R'$.

▷ R は R' の X への制限である $\Leftrightarrow R$ は R' と X^2 の共通部分である ($R = R' \cap X^2$).

▶ X, X' を集合として, $X \subseteq X'$ とする (記号の復習) ($X = X'$ の場合も考える).

R を X 上の二項関係として R' を X' 上の二項関係とするととき,

▷ R' が R の **拡張** であるとは, すべての $x, y \in X$ に対して, $x R y \Rightarrow x R' y$ が成り立つこととする.

▷ R が R' の X への **制限** であるとは, すべての $x, y \in X$ に対して, $x R y \Leftrightarrow x R' y$ が成り立つこととする. (例)

▶ 集合 X に対し X の **デカルト積** (Cartesian product) X^2 を $X^2 = \{(x, y) : x, y \in X\}$ と定義する. 同様に, $X^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in X\}$ etc. とする (例)

▶ X 上の二項関係 R は, X^2 の部分集合 $\{(x, y) \in X^2 : x R y\}$ と同一視することができる. この同一視により,

▷ R' は R の拡張である $\Leftrightarrow R \subseteq R'$.

▷ R は R' の X への制限である $\Leftrightarrow R$ は R' と X^2 の共通部分である ($R = R' \cap X^2$).

▶ X, X' を集合として, $X \subseteq X'$ とする (記号の復習) ($X = X'$ の場合も考える).

R を X 上の二項関係として R' を X' 上の二項関係とするととき,

▷ R' が R の **拡張** であるとは, すべての $x, y \in X$ に対して, $x R y \Rightarrow x R' y$ が成り立つこととする.

▷ R が R' の X への **制限** であるとは, すべての $x, y \in X$ に対して, $x R y \Leftrightarrow x R' y$ が成り立つこととする. (例)

▶ 集合 X に対し X の **デカルト積** (Cartesian product) X^2 を $X^2 = \{(x, y) : x, y \in X\}$ と定義する. 同様に, $X^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in X\}$ etc. とする (例)

▶ X 上の二項関係 R は, X^2 の部分集合 $\{(x, y) \in X^2 : x R y\}$ と同一視することができる. この同一視により,

▷ R' は R の拡張である $\Leftrightarrow R \subseteq R'$.

▷ R は R' の X への制限である $\Leftrightarrow R$ は R' と X^2 の共通部分である ($R = R' \cap X^2$).

▶ X, X' を集合として, $X \subseteq X'$ とする ◀ 記号の復習 ($X = X'$ の場合も考える).

R を X 上の二項関係として R' を X' 上の二項関係とするととき,

▷ R' が R の 拡張 であるとは, すべての $x, y \in X$ に対して, $x R y \Rightarrow x R' y$ が成り立つこととする.

▷ R が R' の X への 制限 であるとは, すべての $x, y \in X$ に対して, $x R y \Leftrightarrow x R' y$ が成り立つこととする. ◀ 例

▶ 集合 X に対し X の デカルト積 (Cartesian product) X^2 を $X^2 = \{(x, y) : x, y \in X\}$ と定義する. 同様に, $X^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in X\}$ etc. とする ◀ 例

▶ X 上の二項関係 R は, X^2 の部分集合 $\{(x, y) \in X^2 : x R y\}$ と同一視することができる. この同一視により,

▷ R' は R の拡張である $\Leftrightarrow R \subseteq R'$.

▷ R は R' の X への制限である $\Leftrightarrow R$ は R' と X^2 の共通部分である ($R = R' \cap X^2$).

▶ X, X' を集合として, $X \subseteq X'$ とする (◀ 記号の復習) ($X = X'$ の場合も考える).

R を X 上の二項関係として R' を X' 上の二項関係とするととき,

▷ R' が R の 拡張 であるとは, すべての $x, y \in X$ に対して, $x R y \Rightarrow x R' y$ が成り立つこととする.

▷ R が R' の X への 制限 であるとは, すべての $x, y \in X$ に対して, $x R y \Leftrightarrow x R' y$ が成り立つこととする. (◀ 例)

▶ 集合 X に対し X の デカルト積 (Cartesian product) X^2 を $X^2 = \{(x, y) : x, y \in X\}$ と定義する. 同様に, $X^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in X\}$ etc. とする (◀ 例)

▶ X 上の二項関係 R は, X^2 の部分集合 $\{(x, y) \in X^2 : x R y\}$ と同一視することができる. この同一視により,

▷ R' は R の拡張である $\Leftrightarrow R \subseteq R'$.

▷ R は R' の X への制限である $\Leftrightarrow R$ は R' と X^2 の共通部分である ($R = R' \cap X^2$).

▶ X, X' を集合として, $X \subseteq X'$ とする (◀ 記号の復習) ($X = X'$ の場合も考える).

R を X 上の二項関係として R' を X' 上の二項関係とするととき,

▷ R' が R の **拡張** であるとは, すべての $x, y \in X$ に対して, $x R y \Rightarrow x R' y$ が成り立つこととする.

▷ R が R' の X への **制限** であるとは, すべての $x, y \in X$ に対して, $x R y \Leftrightarrow x R' y$ が成り立つこととする. (◀ 例)

▶ 集合 X に対し X の **デカルト積** (Cartesian product) X^2 を $X^2 = \{(x, y) : x, y \in X\}$ と定義する. 同様に, $X^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in X\}$ etc. とする (◀ 例)

▶ X 上の二項関係 R は, X^2 の部分集合 $\{(x, y) \in X^2 : x R y\}$ と同一視することができる. この同一視により,

▷ R' は R の拡張である $\Leftrightarrow R \subseteq R'$.

▷ R は R' の X への制限である $\Leftrightarrow R$ は R' と X^2 の共通部分である ($R = R' \cap X^2$).

▶ X, X' を集合として, $X \subseteq X'$ とする (◀ 記号の復習) ($X = X'$ の場合も考える).

R を X 上の二項関係として R' を X' 上の二項関係とするととき,

▷ R' が R の **拡張** であるとは, すべての $x, y \in X$ に対して, $x R y \Rightarrow x R' y$ が成り立つこととする.

▷ R が R' の X への **制限** であるとは, すべての $x, y \in X$ に対して, $x R y \Leftrightarrow x R' y$ が成り立つこととする. (◀ 例)

▶ 集合 X に対し X の **デカルト積** (Cartesian product) X^2 を $X^2 = \{(x, y) : x, y \in X\}$ と定義する. 同様に, $X^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in X\}$ etc. とする (◀ 例)

▶ X 上の二項関係 R は, X^2 の部分集合 $\{(x, y) \in X^2 : x R y\}$ と同一視することができる. この同一視により,

▷ R' は R の拡張である $\Leftrightarrow R \subseteq R'$.

▷ R は R' の X への制限である $\Leftrightarrow R$ は R' と X^2 の共通部分である ($R = R' \cap X^2$).

▶ X, X' を集合として, $X \subseteq X'$ とする ◀ 記号の復習 ($X = X'$ の場合も考える).

R を X 上の二項関係として R' を X' 上の二項関係とするととき,

▷ R' が R の 拡張 であるとは, すべての $x, y \in X$ に対して, $x R y \Rightarrow x R' y$ が成り立つこととする.

▷ R が R' の X への 制限 であるとは, すべての $x, y \in X$ に対して, $x R y \Leftrightarrow x R' y$ が成り立つこととする. ◀ 例

▶ 集合 X に対し X の デカルト積 (Cartesian product) X^2 を $X^2 = \{(x, y) : x, y \in X\}$ と定義する. 同様に, $X^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in X\}$ etc. とする ◀ 例

▶ X 上の二項関係 R は, X^2 の部分集合 $\{(x, y) \in X^2 : x R y\}$ と同一視することができる. この同一視により,

▷ R' は R の拡張である $\Leftrightarrow R \subseteq R'$.

▷ R は R' の X への制限である $\Leftrightarrow R$ は R' と X^2 の共通部分である ($R = R' \cap X^2$).

定理 1

すべての空でない（つまり要素を少なくとも 1 つは持つ）有限集合 X と X 上の任意の半順序 R に対して、 R の拡張となっている X 上の全順序 $\tilde{R}$ が存在する。

証明方針: X の要素の数に関する帰納法で示す。

以下の補題を用いる。 [用語の解説](#)

補題 2

すべての空でない有限集合 X と X の上の半順序 R に対し、 R に関する X の極小元 [用語の定義](#) が存在する。

- ▶ 上の補題も有限集合 X の要素の数に関する帰納法で証明する。
- ▶ 上の補題では一般には「 X は有限」という条件は落せないことに注意! たとえば、 $\mathbb{Q}$ 上の順序 $\leq$ を考えると $\leq$ に関する $\mathbb{Q}$ の極小元は存在しない!

上の補題と定理の証明は次回に見ることにする。

定理 1

すべての空でない（つまり要素を少なくとも 1 つは持つ）有限集合 X と X 上の任意の半順序 R に対して、 R の拡張となっている X 上の全順序 $\tilde{R}$ が存在する。

証明方針: X の要素の数に関する帰納法で示す。

以下の補題を用いる。 [用語の解説](#)

補題 2

すべての空でない有限集合 X と X の上の半順序 R に対し、 R に関する X の極小元 [用語の定義](#) が存在する。

- ▶ 上の補題も有限集合 X の要素の数に関する帰納法で証明する。
- ▶ 上の補題では一般には「 X は有限」という条件は落せないことに注意! たとえば、 $\mathbb{Q}$ 上の順序 $\leq$ を考えると $\leq$ に関する $\mathbb{Q}$ の極小元は存在しない!

上の補題と定理の証明は次回に見ることにする。

定理 1

すべての空でない（つまり要素を少なくとも 1 つは持つ）有限集合 X と X 上の任意の半順序 R に対して、 R の拡張となっている X 上の全順序 $\tilde{R}$ が存在する。

証明方針: X の要素の数に関する帰納法で示す。

以下の補題を用いる。 [用語の解説](#)

補題 2

すべての空でない有限集合 X と X の上の半順序 R に対し、 R に関する X の極小元 [用語の定義](#) が存在する。

- ▶ 上の補題も有限集合 X の要素の数に関する帰納法で証明する。
- ▶ 上の補題では一般には「 X は有限」という条件は落せないことに注意! たとえば、 $\mathbb{Q}$ 上の順序 $\leq$ を考えると $\leq$ に関する $\mathbb{Q}$ の極小元は存在しない!

上の補題と定理の証明は次回に見ることにする。

定理 1

すべての空でない（つまり要素を少なくとも 1 つは持つ）有限集合 X と X 上の任意の半順序 R に対して、 R の拡張となっている X 上の全順序 $\tilde{R}$ が存在する。

証明方針: X の要素の数に関する帰納法で示す。

以下の補題を用いる。 [用語の解説](#)

補題 2

すべての空でない有限集合 X と X の上の半順序 R に対し、 R に関する X の極小元 [用語の定義](#) が存在する。

- ▶ 上の補題も有限集合 X の要素の数に関する帰納法で証明する。
- ▶ 上の補題では一般には「 X は有限」という条件は落せないことに注意! たとえば、 $\mathbb{Q}$ 上の順序 $\leq$ を考えると $\leq$ に関する $\mathbb{Q}$ の極小元は存在しない!

上の補題と定理の証明は次回に見ることにする。

定理 1

すべての空でない（つまり要素を少なくとも 1 つは持つ）有限集合 X と X 上の任意の半順序 R に対して、 R の拡張となっている X 上の全順序 $\tilde{R}$ が存在する。

証明方針: X の要素の数に関する帰納法で示す。

以下の補題を用いる。 [用語の解説](#)

補題 2

すべての空でない有限集合 X と X の上の半順序 R に対し、 R に関する X の極小元 [用語の定義](#) が存在する。

▶ 上の補題も有限集合 X の要素の数に関する帰納法で証明する。

▶ 上の補題では一般には「 X は有限」という条件は落せないことに注意! たとえば、 $\mathbb{Q}$ 上の順序 $\leq$ を考えると $\leq$ に関する $\mathbb{Q}$ の極小元は存在しない!

上の補題と定理の証明は次回に見ることにする。

定理 1

すべての空でない（つまり要素を少なくとも 1 つは持つ）有限集合 X と X 上の任意の半順序 R に対して、 R の拡張となっている X 上の全順序 $\tilde{R}$ が存在する。

証明方針: X の要素の数に関する帰納法で示す。

以下の補題を用いる。 [用語の解説](#)

補題 2

すべての空でない有限集合 X と X の上の半順序 R に対し、 R に関する X の極小元 [用語の定義](#) が存在する。

- ▶ 上の補題も有限集合 X の要素の数に関する帰納法で証明する。
- ▶ 上の補題では一般には「 X は有限」という条件は落せないことに注意! たとえば、 $\mathbb{Q}$ 上の順序 $\leq$ を考えると $\leq$ に関する $\mathbb{Q}$ の極小元は存在しない!

上の補題と定理の証明は次回に見ることにする。

定理 1

すべての空でない（つまり要素を少なくとも 1 つは持つ）有限集合 X と X 上の任意の半順序 R に対して、 R の拡張となっている X 上の全順序 $\tilde{R}$ が存在する。

証明方針: X の要素の数に関する帰納法で示す。

以下の補題を用いる。 [用語の解説](#)

補題 2

すべての空でない有限集合 X と X の上の半順序 R に対し、 R に関する X の極小元 [用語の定義](#) が存在する。

- ▶ 上の補題も有限集合 X の要素の数に関する帰納法で証明する。
- ▶ 上の補題では一般には「 X は有限」という条件は落せないことに注意! たとえば、 $\mathbb{Q}$ 上の順序 $\leq$ を考えると $\leq$ に関する $\mathbb{Q}$ の極小元は存在しない!

上の補題と定理の証明は次回に見ることにする。

¡Gracias por su atención!

構造の数理 VIII (5/5)

▶ X と Y を集合とするとき、 $X \subseteq Y$ で X は Y の 部分集合 であることあらわす. つまり, $X \subseteq Y$ は,

すべての $x \in X$ に対して $x \in Y$ が成り立つ

(あるいは, すべての x に対して, $x \in X \Rightarrow x \in Y$) が成り立つことである.

▷ $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ である. $\subseteq$ は推移律を満たす. したがって, 上の例から $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ であることが帰結できる.

▶ X と Y を集合とするとき、 $X \subseteq Y$ で X は Y の 部分集合 であることあらわす. つまり, $X \subseteq Y$ は,

すべての $x \in X$ に対して $x \in Y$ が成り立つ

(あるいは, すべての x に対して, $x \in X \Rightarrow x \in Y$) が成り立つことである.

▷ $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ である. $\subseteq$ は推移律を満たす. したがって, 上の例から $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ であることが帰結できる.

▶ X と Y を集合とするとき、 $X \subseteq Y$ で X は Y の 部分集合 であることあらわす. つまり, $X \subseteq Y$ は,

すべての $x \in X$ に対して $x \in Y$ が成り立つ

(あるいは, すべての x に対して, $x \in X \Rightarrow x \in Y$) が成り立つことである.

▷ $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ である. $\subseteq$ は推移律を満たす. したがって, 上の例から $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ であることが帰結できる.

▶ X と Y を集合とするとき、 $X \subseteq Y$ で X は Y の 部分集合 であることあらわす．つまり、 $X \subseteq Y$ は、

すべての $x \in X$ に対して $x \in Y$ が成り立つ

（あるいは、すべての x に対して、 $x \in X \Rightarrow x \in Y$ ）が成り立つことである．

▷ $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ である． $\subseteq$ は推移律を満たす．したがって、上の例から $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ であることが帰結できる．

▶ $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$ だったが, $\mathbb{Q}$ 上の大小関係 $\leq$ は, $\mathbb{N}$ 上の数の大小関係 $\leq$ の拡張となっている.

$\mathbb{N}$ 上の大小関係 $\leq$ は $\mathbb{Q}$ 上の大小関係 $\leq$ の $\mathbb{N}$ への制限である.

▶ $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ だが, $\mathbb{Q}$ 上の大小関係 $\leq$ と $\mathbb{R}$ 上の大小関係 $\leq$ も上と同じ関係にある.

▶ $\mathbb{N}$ 上の関係 $n R m \Leftrightarrow m = n + 1$ を考える (この関係は順序でも半順序でもない!). $\mathbb{N}$ 上の大小関係 $\leq$, も $\mathbb{Q}$ 上の大小関係 $\leq$ も R の拡張だが, R は, どちらの大小関係の $\mathbb{N}$ への制限でもない.

▶ $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$ だったが, $\mathbb{Q}$ 上の大小関係 $\leq$ は, $\mathbb{N}$ 上の数の大小関係 $\leq$ の拡張となっている.

$\mathbb{N}$ 上の大小関係 $\leq$ は $\mathbb{Q}$ 上の大小関係 $\leq$ の $\mathbb{N}$ への制限である.

▶ $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ だが, $\mathbb{Q}$ 上の大小関係 $\leq$ と $\mathbb{R}$ 上の大小関係 $\leq$ も上と同じ関係にある.

▶ $\mathbb{N}$ 上の関係 $n R m \Leftrightarrow m = n + 1$ を考える (この関係は順序でも半順序でもない!). $\mathbb{N}$ 上の大小関係 $\leq$, も $\mathbb{Q}$ 上の大小関係 $\leq$ も R の拡張だが, R は, どちらの大小関係の $\mathbb{N}$ への制限でもない.

▶ $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$ だったが、 $\mathbb{Q}$ 上の大小関係 $\leq$ は、 $\mathbb{N}$ 上の数の大小関係 $\leq$ の拡張となっている。

$\mathbb{N}$ 上の大小関係 $\leq$ は $\mathbb{Q}$ 上の大小関係 $\leq$ の $\mathbb{N}$ への制限である。

▶ $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ だが、 $\mathbb{Q}$ 上の大小関係 $\leq$ と $\mathbb{R}$ 上の大小関係 $\leq$ も上と同じ関係にある。

▶ $\mathbb{N}$ 上の関係 $n R m \Leftrightarrow m = n + 1$ を考える (この関係は順序でも半順序でもない!)。 $\mathbb{N}$ 上の大小関係 $\leq$, も $\mathbb{Q}$ 上の大小関係 $\leq$ も R の拡張だが、 R は、どちらの大小関係の $\mathbb{N}$ への制限でもない。

▶ $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$ だったが、 $\mathbb{Q}$ 上の大小関係 $\leq$ は、 $\mathbb{N}$ 上の数の大小関係 $\leq$ の拡張となっている。

$\mathbb{N}$ 上の大小関係 $\leq$ は $\mathbb{Q}$ 上の大小関係 $\leq$ の $\mathbb{N}$ への制限である。

▶ $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ だが、 $\mathbb{Q}$ 上の大小関係 $\leq$ と $\mathbb{R}$ 上の大小関係 $\leq$ も上と同じ関係にある。

▶ $\mathbb{N}$ 上の関係 $n R m \Leftrightarrow m = n + 1$ を考える (この関係は順序でも半順序でもない!)。 $\mathbb{N}$ 上の大小関係 $\leq$, も $\mathbb{Q}$ 上の大小関係 $\leq$ も R の拡張だが、 R は、どちらの大小関係の $\mathbb{N}$ への制限でもない。

▶ $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$ だったが、 $\mathbb{Q}$ 上の大小関係 $\leq$ は、 $\mathbb{N}$ 上の数の大小関係 $\leq$ の拡張となっている。

$\mathbb{N}$ 上の大小関係 $\leq$ は $\mathbb{Q}$ 上の大小関係 $\leq$ の $\mathbb{N}$ への制限である。

▶ $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ だが、 $\mathbb{Q}$ 上の大小関係 $\leq$ と $\mathbb{R}$ 上の大小関係 $\leq$ も上と同じ関係にある。

▶ $\mathbb{N}$ 上の関係 $n R m \Leftrightarrow m = n + 1$ を考える（この関係は順序でも半順序でもない!）。 $\mathbb{N}$ 上の大小関係 $\leq$ も $\mathbb{Q}$ 上の大小関係 $\leq$ も R の拡張だが、 R は、どちらの大小関係の $\mathbb{N}$ への制限でもない。

▶ $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$ だったが、 $\mathbb{Q}$ 上の大小関係 $\leq$ は、 $\mathbb{N}$ 上の数の大小関係 $\leq$ の拡張となっている。

$\mathbb{N}$ 上の大小関係 $\leq$ は $\mathbb{Q}$ 上の大小関係 $\leq$ の $\mathbb{N}$ への制限である。

▶ $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ だが、 $\mathbb{Q}$ 上の大小関係 $\leq$ と $\mathbb{R}$ 上の大小関係 $\leq$ も上と同じ関係にある。

▶ $\mathbb{N}$ 上の関係 $n R m \Leftrightarrow m = n + 1$ を考える（この関係は順序でも半順序でもない!）。 $\mathbb{N}$ 上の大小関係 $\leq$ も $\mathbb{Q}$ 上の大小関係 $\leq$ も R の拡張だが、 R は、どちらの大小関係の $\mathbb{N}$ への制限でもない。

構造の数理 VIII (A3)

▶ $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ だが, (x, y) を座標 (x, y) を持つ平面上の点と同一視することで, $\mathbb{R}^2$ を平面上の点の全体の集合とみなすことができる. 同様の同一視により, $\mathbb{R}^3$ は空間の点の全体の集合とみなせ, $\mathbb{R}^4$ は時空の点の全体の集合とみなせる.

デカルト積の例

構造の数理 VIII (A3)

▶ $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ だが, (x, y) を座標 (x, y) を持つ平面上の点と同一視することで, $\mathbb{R}^2$ を平面上の点の全体の集合とみなすことができる. 同様の同一視により, $\mathbb{R}^3$ は空間の点の全体の集合とみなせ, $\mathbb{R}^4$ は時空の点の全体の集合とみなせる.

構造の数理 VIII (A3)

▶ X がちょうど n 個の要素を持つ有限集合（要素の数が有限な集合）とすると、 X^2 は n^2 個の要素を持つ有限集合となる。

構造の数理 VIII (A3)

▶ X がちょうど n 個の要素を持つ有限集合（要素の数が有限な集合）とすると、 X^2 は n^2 個の要素を持つ有限集合となる。

◀ 帰納法の解説

▶ $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ だが, (x, y) を座標 (x, y) を持つ平面上の点と同一視することで, $\mathbb{R}^2$ を平面上の点の全体の集合とみなすことができる. 同様の同一視により, $\mathbb{R}^3$ は空間の点の全体の集合とみなせ, $\mathbb{R}^4$ は時空の点の全体の集合とみなせる.

▶ X がちょうど n 個の要素を持つ有限集合（要素の数が有限な集合）とすると、 X^2 は n^2 個の要素を持つ有限集合となる。

証明. n に関する帰納法で証明する. ◀ 帰納法の解説

$n = 0$ のとき、つまり X が要素を一つも持たない集合のときには、 X^2 も定義から要素を一つも持たない集合になるので $0^2 = 0$ となり、主張は成り立つ。

▶ $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ だが, (x, y) を座標 (x, y) を持つ平面上の点と同一視することで, $\mathbb{R}^2$ を平面上の点の全体の集合とみなすことができる. 同様の同一視により, $\mathbb{R}^3$ は空間の点の全体の集合とみなせ, $\mathbb{R}^4$ は時空の点の全体の集合とみなせる.

▶ X がちょうど n 個の要素を持つ有限集合（要素の数が有限な集合）とすると、 X^2 は n^2 個の要素を持つ有限集合となる。

証明. n に関する帰納法で証明する. ◀ 帰納法の解説

$n = 0$ のとき、つまり X が要素を一つも持たない集合のときには、 X^2 も定義から要素を一つも持たない集合になるので $0^2 = 0$ となり、主張は成り立つ。

$n = k$ に対し、主張が成り立つとすると、 $n = k + 1$ のときにも主張が成り立つことを示す。 X を $k + 1$ 個の要素を持つ集合として、 $x_0 \in X$ を一つ固定する。

▶ $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ だが, (x, y) を座標 (x, y) を持つ平面上の点と同一視することで, $\mathbb{R}^2$ を平面上の点の全体の集合とみなすことができる. 同様の同一視により, $\mathbb{R}^3$ は空間の点の全体の集合とみなせ, $\mathbb{R}^4$ は時空の点の全体の集合とみなせる.

▶ X がちょうど n 個の要素を持つ有限集合（要素の数が有限な集合）とすると、 X^2 は n^2 個の要素を持つ有限集合となる。

証明. n に関する帰納法で証明する. ◀ 帰納法の解説

$n = 0$ のとき、つまり X が要素を一つも持たない集合のときには、 X^2 も定義から要素を一つも持たない集合になるので $0^2 = 0$ となり、主張は成り立つ。

$n = k$ に対し、主張が成り立つとすると、 $n = k + 1$ のときにも主張が成り立つことを示す. X を $k + 1$ 個の要素を持つ集合として、 $x_0 \in X$ を一つ固定する.

X_0 を X の x_0 以外の要素の全体とすると, X_0 は k 個の要素を持つ集合となる.

X^2 は次の 4 つの集合に分割される. $(X_0)^2$, $\{(x_0, x) : x \in X_0\}$, $\{(x, x_0) : x \in X_0\}$, $\{(x_0, x_0)\}$. 帰納法の仮定から, $(X_0)^2$ は k^2 個の要素を持つ.

デカルト積の例

構造の数理 VIII (A3)

▶ $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ だが, (x, y) を座標 (x, y) を持つ平面上の点と同一視することで, $\mathbb{R}^2$ を平面上の点の全体の集合とみなすことができる. 同様の同一視により, $\mathbb{R}^3$ は空間の点の全体の集合とみなせ, $\mathbb{R}^4$ は時空の点の全体の集合とみなせる.

▶ X がちょうど n 個の要素を持つ有限集合（要素の数が有限な集合）とすると、 X^2 は n^2 個の要素を持つ有限集合となる。

証明. n に関する帰納法で証明する. ◀ 帰納法の解説

$n = 0$ のとき、つまり X が要素を一つも持たない集合のときには、 X^2 も定義から要素を一つも持たない集合になるので $0^2 = 0$ となり、主張は成り立つ。

$n = k$ に対し、主張が成り立つとすると、 $n = k + 1$ のときにも主張が成り立つことを示す. X を $k + 1$ 個の要素を持つ集合として、 $x_0 \in X$ を一つ固定する.

X_0 を X の x_0 以外の要素の全体とすると, X_0 は k 個の要素を持つ集合となる.

X^2 は次の 4 つの集合に分割される. $(X_0)^2$, $\{(x_0, x) : x \in X_0\}$, $\{(x, x_0) : x \in X_0\}$, $\{(x_0, x_0)\}$. 帰納法の仮定から, $(X_0)^2$ は k^2 個の要素を持つ.

▶ $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ だが, (x, y) を座標 (x, y) を持つ平面上の点と同一視することで, $\mathbb{R}^2$ を平面上の点の全体の集合とみなすことができる. 同様の同一視により, $\mathbb{R}^3$ は空間の点の全体の集合とみなせ, $\mathbb{R}^4$ は時空の点の全体の集合とみなせる.

▶ X がちょうど n 個の要素を持つ有限集合（要素の数が有限な集合）とすると、 X^2 は n^2 個の要素を持つ有限集合となる。

証明. n に関する帰納法で証明する. ◀ 帰納法の解説

$n = 0$ のとき、つまり X が要素を一つも持たない集合のときには、 X^2 も定義から要素を一つも持たない集合になるので $0^2 = 0$ となり、主張は成り立つ。

$n = k$ に対し、主張が成り立つとすると、 $n = k + 1$ のときにも主張が成り立つことを示す. X を $k + 1$ 個の要素を持つ集合として、 $x_0 \in X$ を一つ固定する.

X_0 を X の x_0 以外の要素の全体とすると, X_0 は k 個の要素を持つ集合となる.

X^2 は次の 4 つの集合に分割される. $(X_0)^2$, $\{(x_0, x) : x \in X_0\}$, $\{(x, x_0) : x \in X_0\}$, $\{(x_0, x_0)\}$. 帰納法の仮定から, $(X_0)^2$ は k^2 個の要素を持つ.

残りの集合はそれぞれ $k, k, 1$ 個の要素を持つ。したがって、 X^2 の要素の数は、これらの数を足して $k^2 + k + k + 1 = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$ となり、

デカルト積の例

構造的数理 VIII (A3)

▶ $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ だが, (x, y) を座標 (x, y) を持つ平面上の点と同一視することで, $\mathbb{R}^2$ を平面上の点の全体の集合とみなすことができる. 同様の同一視により, $\mathbb{R}^3$ は空間の点の全体の集合とみなせ, $\mathbb{R}^4$ は時空の点の全体の集合とみなせる.

▶ X がちょうど n 個の要素を持つ有限集合 (要素の数が有限な集合) とするとき, X^2 は n^2 個の要素を持つ有限集合となる.

証明. n に関する帰納法で証明する. ◀ 帰納法の解説

$n = 0$ のとき, つまり X が要素を一つも持たない集合のときには, X^2 も定義から要素を一つも持たない集合になるので $0^2 = 0$ となり, 主張は成り立つ.

$n = k$ に対し, 主張が成り立つとすると, $n = k + 1$ のときにも主張が成り立つことを示す. X を $k + 1$ 個の要素を持つ集合として, $x_0 \in X$ を一つ固定する.

X_0 を X の x_0 以外の要素の全体とすると, X_0 は k 個の要素を持つ集合となる.

X^2 は次の 4 つの集合に分割される. $(X_0)^2, \{(x_0, x) : x \in X_0\},$

$\{(x, x_0) : x \in X_0\}, \{(x_0, x_0)\}$. 帰納法の仮定から, $(X_0)^2$ は k^2 個の要素を持つ.

残りの集合はそれぞれ $k, k, 1$ 個の要素を持つ. したがって, X^2 の要素の数は, これらの数を足して $k^2 + k + k + 1 = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$ となり,

$n = k + 1$ に対しても主張が成り立つことが示せた.

帰納法 (induction または mathematical induction) とは、次のような論法のことである:

$\mathcal{A}(n)$ を自然数 n に対するある主張とする. m_0 をある自然数とすると, 「すべての自然数 $n \geq m_0$ に対し $\mathcal{A}(n)$ が成り立つ」を証明するために, 次のことを示す

▷1 $\mathcal{A}(m_0)$ が成り立つ.

▷2 $n = k$ のときに $\mathcal{A}(n)$ (つまり $\mathcal{A}(k)$) が成り立つとすると, $n = k + 1$ のときにも $\mathcal{A}(n)$ (つまり $\mathcal{A}(k + 1)$) が成り立つ.

▶ 上の ▷1 は 帰納法の始め (the beginning of the induction), ▷2 は 帰納法のステップ (the step of the induction または the induction step) と呼ばれる.

▶ 哲学では, 多くの例から, 法則を抽出することを 帰納 (induction) という. mathematical induction という用語は, この帰納と帰納法を区別するための用語だが, いささか長い表現なので, 数学では通常単に induction と言うことが多い.

帰納法 (induction または mathematical induction) とは、次のような論法のことである:

$\mathcal{A}(n)$ を自然数 n に対するある主張とする. m_0 をある自然数とすると, 「すべての自然数 $n \geq m_0$ に対し $\mathcal{A}(n)$ が成り立つ」を証明するために, 次のことを示す

▷1 $\mathcal{A}(m_0)$ が成り立つ.

▷2 $n = k$ のときに $\mathcal{A}(n)$ (つまり $\mathcal{A}(k)$) が成り立つとすると, $n = k + 1$ のときにも $\mathcal{A}(n)$ (つまり $\mathcal{A}(k + 1)$) が成り立つ.

▶ 上の ▷1 は 帰納法の始め (the beginning of the induction), ▷2 は 帰納法のステップ (the step of the induction または the induction step) と呼ばれる.

▶ 哲学では, 多くの例から, 法則を抽出することを 帰納 (induction) という. mathematical induction という用語は, この帰納と帰納法を区別するための用語だが, いささか長い表現なので, 数学では通常単に induction と言うことが多い.

(数学的) 帰納法

構造の数理 VIII (A4)

帰納法 (induction または mathematical induction) とは、次のような論法のことである:

$\mathcal{A}(n)$ を自然数 n に対するある主張とする. m_0 をある自然数とすると, 「すべての自然数 $n \geq m_0$ に対し $\mathcal{A}(n)$ が成り立つ」を証明するために, 次のことを示す

▷1 $\mathcal{A}(m_0)$ が成り立つ.

▷2 $n = k$ のときに $\mathcal{A}(n)$ (つまり $\mathcal{A}(k)$) が成り立つとすると, $n = k + 1$ のときにも $\mathcal{A}(n)$ (つまり $\mathcal{A}(k + 1)$) が成り立つ.

▶ 上の ▷1 は 帰納法の始め (the beginning of the induction), ▷2 は 帰納法のステップ (the step of the induction または the induction step) と呼ばれる.

▶ 哲学では, 多くの例から, 法則を抽出することを 帰納 (induction) という. mathematical induction という用語は, この帰納と帰納法を区別するための用語だが, いささか長い表現なので, 数学では通常単に induction と言うことが多い.

(数学的) 帰納法

構造の数理 VIII (A4)

帰納法 (induction または mathematical induction) とは、次のような論法のことである:

$\mathcal{A}(n)$ を自然数 n に対するある主張とする. m_0 をある自然数とすると, 「すべての自然数 $n \geq m_0$ に対し $\mathcal{A}(n)$ が成り立つ」を証明するために, 次のことを示す

▷1 $\mathcal{A}(m_0)$ が成り立つ.

▷2 $n = k$ のときに $\mathcal{A}(n)$ (つまり $\mathcal{A}(k)$) が成り立つとすると, $n = k + 1$ のときにも $\mathcal{A}(n)$ (つまり $\mathcal{A}(k + 1)$) が成り立つ.

▶ 上の ▷1 は 帰納法の始め (the beginning of the induction), ▷2 は 帰納法のステップ (the step of the induction または the induction step) と呼ばれる.

▶ 哲学では, 多くの例から, 法則を抽出することを 帰納 (induction) という. mathematical induction という用語は, この帰納と帰納法を区別するための用語だが, いささか長い表現なので, 数学では通常単に induction と言うことが多い.

帰納法 (induction または mathematical induction) とは、次のような論法のことである:

$\mathcal{A}(n)$ を自然数 n に対するある主張とする. m_0 をある自然数とすると, 「すべての自然数 $n \geq m_0$ に対し $\mathcal{A}(n)$ が成り立つ」を証明するために, 次のことを示す

▷1 $\mathcal{A}(m_0)$ が成り立つ.

▷2 $n = k$ のときに $\mathcal{A}(n)$ (つまり $\mathcal{A}(k)$) が成り立つとすると, $n = k + 1$ のときにも $\mathcal{A}(n)$ (つまり $\mathcal{A}(k + 1)$) が成り立つ.

▶ 上の ▷1 は 帰納法の始め (the beginning of the induction), ▷2 は 帰納法のステップ (the step of the induction または the induction step) と呼ばれる.

▶ 哲学では, 多くの例から, 法則を抽出することを 帰納 (induction) という. mathematical induction という用語は, この帰納と帰納法を区別するための用語だが, いささか長い表現なので, 数学では通常単に induction と言うことが多い.

► 定理を証明するときに必要となる技術的な主張で、定理ほどは独立していないもののことを **補題 (lemma)** とよぶ.

► X を集合として R を X 上の半順序とするとき、 $x \in X$ が X の R に関する極小元である、とは、すべての x と異なる $y \in X$ に対し、 $y \not R x$ が成り立つことである.

▶ 定理を証明するときに必要となる技術的な主張で、定理ほどは独立していないもののことを **補題 (lemma)** とよぶ.

▶ X を集合として R を X 上の半順序とするとき、 $x \in X$ が X の R に関する極小元である、とは、すべての x と異なる $y \in X$ に対し、 $y \not R x$ が成り立つことである.