構造の数理
X. 「つながり具合」の数学的な表現 — グラフ

Sakaé Fuchino (渕野 昌)

Kobe University (神戸大学大学院 システム情報学研究科)

fuchino@diamond.kobe-u.ac.jp

http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/

(December 25, 2010 (18:19 JST) version)

神戸大学 2010 年度後期の講義

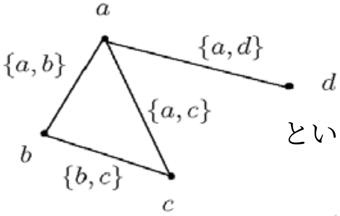
December 16, 2010

This presentation is typeset by pLATEX with beamer class.

グラフ

- "点" の集合と，これらの点のうちの幾つかの異る 2 点を結ぶ "辺" が与えられているとき，これを **グラフ** とよぶ．

- X を点の集合とするとき，$x, y \in X, x \neq y$ が辺で結ばれているとき，この辺を $\{x, y\}$ で表現することにすると，グラフとは，集合 X と X 上の辺の集合 $E \subseteq \{\{x, y\} : x, y \in X, x \neq y\}$ の組，(X, E) で表現されると考えることができる．
- 例: $X = \{a, b, c, d\}$,
$E = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, d\}\}$ とするとき，グラフ (X, E) は，



という図式であらわせる．

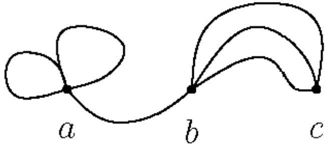
単純グラフと複合グラフ

- 前ページの 1 番目のグラフの例のように，2 点の間に複数の辺があるようなグラフや，一点でループになっているような辺のあるグラフは，前ページ後半のようなやり方ではうまく表現できない.

- 前ページ後半でのような (X, E) として表すことのできるグラフを **単純グラフ** といい，2 点間に複数の辺があったり，一点でループとなっているような辺も許すようなグラフを **複合グラフ** とよぶ.

- 複合グラフは，グラフの点の全体の集合 X と，$[X]^{\leq 2} = \{\{x, y\} : x, y \in X\}$ として，$\{x, y\} \in [X]^{\leq 2}$ (あるいは $x = y$ となっているときの $\{x\} \in [X]^{\leq 2}$) に対し，x と y を結ぶ辺の数（あるいは $x = y$ のときには，x でのループの数）を与えるような関数 $f : [X]^{\leq 2} \to \mathbb{N}$ の組 (X, f) で与えることができる.

- 例.



は, $X = \{a, b, c\}$ として, $f : [X]^{\leq 2} \to \mathbb{N}$ を,

$$f(\{a\}) = 2,\ f(\{b\}) = 0,\ f(\{c\}) = 0,\ f(\{a, b\}) = 1,$$
$$f(\{b, c\}) = 3,\ f(\{c, a\} = 0),\ f(\emptyset) = 0$$

と定義すれば, (X, f) によりあらわせる. — ただし, $f(\emptyset)$ の値は, 空集合(くうしゅうごう)（何も要素を持たない集合 — 要素を 0 個持つ集合）$\emptyset$ が f 定義域に入っているので 0 と定めたが, これは複合グラフ (X, f) の構造には何の影響も及ぼさない.

- 以下で話す 2 つのグラフの応用のうち, オイラーの定理は複合グラフに関するもので, ラムジーの定理は単純グラフに関するものである. 以下では, それぞれについて, どの種類のグラフについて述べているのかは明らかなので, 単に「グラフ」と言うことにする.

グラフの応用 — Königsberg の 7 つの橋

- Königsberg （ケーニッヒスベルク — 現在のカリニングラード）を流れるプレーゲル河には中之島と中洲の間に，7 つの橋がかかっていた．これらの橋をそれぞれ一回づつ渡るような街の歩き方はあるか? という問題が古くから知られていた．

18 世紀ごろの Königsberg の地図

Königsberg の 7 つの橋の否定的解決

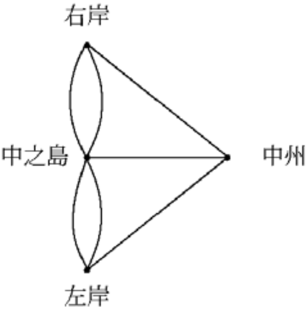
前ページの地図の拡大図

オイラー

- オイラー (Leonhard Euler 1707(宝永 4 年) — 1783 (天明 3 年)) は，l735 年（享保（きょうほう）20 年）「これらの 7 つの橋をそれぞれ一回づつ渡る歩き方は存在しない」 ことを証明したが，この証明のために，前のスライドで述べたグラフの概念を導入した（ただし，当時は集合を用いる表現はまだ発明されていなかった）．

問題のグラフへの翻訳

$\Rightarrow$



- Königsberg の 7 つの橋をそれぞれ一回づつ渡って街を歩くことができることと，上の複合グラフが一筆書できることとは同値である．

オイラーの定理（の一つ）

定理 1 (Euler, 1735)

G を連結な（つまり，辺をたどってどの点からどの点へも行けるような）有限グラフとするとき，G が一筆書きできるなら，

▷1 G のすべての点の次数（つまり，その点につながっている辺の数）は偶数であるか，または

▷2 G は次数が奇数の点をちょうど 2 つ持つ

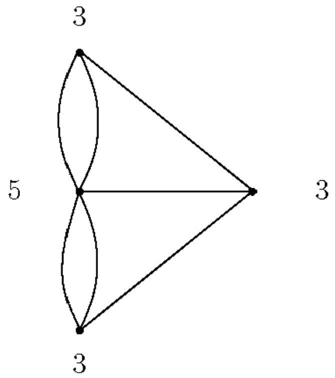
のどちらかが成り立つ．

つまり，

「G のすべての点の次数は偶数である」も「G は次数が奇数の点をちょうど 2 つ持つ」も成り立たなければ，G は一筆書きできない

7 つの橋の問題の否定的解決

「G のすべての点の次数は偶数である」も「G は次数が奇数の点をちょうど 2 つ持つ」も成り立たなければ，G は一筆書きできない．



- 実はオイラーの定理の逆も成り立つ（証明は連結な有限グラフの点の数に関する帰納法を使う）．

パーティーの招待客

- 次のような問題（パズル）を考えてみる:

> パーティーに n 人の客をよんだときには，この中に必ず，3 人の互いに互いを知っている人たちがいるか，または，3 人の互いに互いを知らない人達がいるかのどちらかが起きるようにするには，n は最低いくつならよいか？

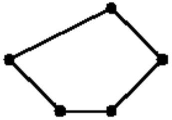
- n 人の客をグラフの点だと思い，このなかの異る 2 人が知合いならこの 2 人は辺で結ばれていると思い，そうでなければ，この 2 人は辺で結ばれていないと思うことにすれば,「知人である」というつながり具合をあらわすグラフが得られる.
- 上のようなグラフを使ってパズルを翻訳すると:

> n 個の点を持つ任意のグラフが，互いに辺で結ばれている 3 つの点か，あるいは，どれも互いに辺で結ばれていない 3 つの点の，少なくともどちらか片方の種類ものを持つためには，n は最低いくつならよいか？

- このパズルの答は次のようなものである:

パーティーの招待客 (2/3)

- n が 6 以上であることは，
次の例を見れば明らかである:



- 逆に n が 6 以上なら，求める性質が成り立つ:

6 個以上の点を持つ任意のグラフは，互いに辺で結ばれている 3 つの点か，あるいは，どれもお互いに辺で結ばれていない 3 つの点の少なくともどちらか片方の種類のものを持つ．

証明．　ちょうど 6 つの点を持つグラフについて考えれば十分である．$G = (X, E)$ をちょうど 6 つの点を持つグラフとして，x_0 を点の一つとする．x_0 の他には，5 つの点があるので，これらの 5 つの点のうち，うまく異る 3 点 a, b c をとると，

(a) x_0 は a とも b とも c とも辺でつながっている（つまり，$\{x_0, a\}$, $\{x_0, b\}$, $\{x_0, c\} \in E$）または，

(b) x_0 は a, b, c のどれとも辺でつながっていない（つまり，$\{x_0, a\} \notin E$, $\{x_0, b\} \notin E$, $\{x_0, c\} \notin E$）

のとちらかが成り立つようにできる．

パーティーの招待客 (3/3)

証明の続き: (a) の場合には，もし，a, b, c のうちの 2 つ，たとえば a と b が辺でつながっていたとすると，x_0, a, b はどれも互いに辺でつながった 3 点となる．もしそのようなペアが a, b, c のうちになければ，a, b, c は どれも互いに辺でつながっていない 3 点となる．

(b) の場合も同様である: もし a, b, c のうち 2 つ，たとえば，a と b が辺でつながっていなかったとすると，x_0, a, b はどれも互いに辺でつながっていない 3 点である．もしそのようなペアが a, b, c のうちになければ，a, b, c は どれも互いに辺でつながっている 3 点である． □

ラムゼイ数

- パーティーの問題で出てきた $n = 6$ は次のように一般化することができる.
  - 自然数 $k > 0$ に対して, $r(k)$ を, 以下の性質を持つような数 n のうち最小のものとする:
    - n 個以上の点を持つ任意のグラフに対し, その点のうちの k 個の点で, それぞれすべてお互いに辺でつながっているか, または, それぞれすべてお互いに辺でつながっていないかのどちらかが成り立つようなものが存在する.
- $r(k)$ はイギリスの数学者／哲学者 Frank P. Ramsey (1903(明治 36 年) – 1930(昭和 5 年)) にちなんでラムゼイ数 (Ramsey numbers) とよばれている.
- $r(1) = 1$ で, $r(2) = 2$ となることは, 上の定義からすぐに分る. 前のページで示したことから, $r(3) = 6$ である.

ラムゼイ数 (2/3)

- もっと一般的には次が知られている:

> すべての自然数 $k \geqq 1$ に対し，ラムゼイ数 $r(k)$ は定義できて，
> $2^{\frac{k}{2}} < r(k) < {}_{2k-2}C_{k-1}$ が成り立つ．

- $r(k)$ がすべての自然数 $k \geqq 1$ に対し定義できる（つまり，$r(k)$ に求められている性質を持つ数が実際に存在する）ことは，ラムゼイの 1930 年 (昭和 5 年) の論文にある一般的な定理から出てくる．$r(k) < {}_{2k-2}C_{k-1}$ は Erdős と Szekeres による 1935 年 (昭和 10 年) の論文で示されている．$2^{\frac{k}{2}} < r(k)$ は Erdős により，1946 年 (昭和 21 年) に証明された．
- $r(4) = 18$ となることが知られている．上の不等式から，$6 \leqq r(5) < 70$ がわかるが，この不等式は更に改良されて，$43 < r(5) < 49$ となることが知られている．しかし，$r(5)$ の具体的な値はまだわかっていない（上の不等式から，有限個の場合をチェックすれば値は求まるはずだが，普通に計算しようとすると，必要になる計算の量や時間が物理的な限界を越えてしまう）．
- Erdős の次の言葉（ジョーク）は，この状況の適切な評価といえる:

ラムゼイ数 (3/3)

Erdős asks us to imagine an alien force, vastly more powerful than us, landing on Earth and demanding the value of $r(5)$ or they will destroy our planet. In that case, he claims, we should marshal all our computers and all our mathematicians and attempt to find the value. But suppose, instead, that they ask for $r(6)$. In that case, he believes, we should attempt to destroy the aliens.

Joel H. Spencer, Ten Lectures on the Probabilistic Method, SIAM (1994).
ただし，記号のはこのスライドでの記法に変更している．

P. エルエシュ
(P.Erdős, 1913–1996)

¡Gracias por su atención!

- オイラーの定理とその逆の証明は,

http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/chubu/method-math-WS06.pdf
を参照.

- ラムゼイ数については,

Ramsey's Theorem — Wikipedia

ピーター・フランクル，代数の閃き，数学セミナー 2011 年 1 月号, 50–53.

などを参照.

- 注意: ２０１１年１月１３日の講義は休講とします.