

無限を数える

Sakaé Fuchino (湊野 昌)

Graduate School of System Informatics
Kobe University

(神戸大学大学院 システム情報学研究科)

fuchino@diamond.kobe-u.ac.jp

<http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/>

(January 28, 2011 (01:17 JST) version)

神戸大学 2010 年度後期の講義

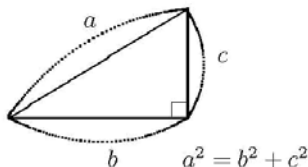
January 27, 2011

This presentation is typeset by p^AT_EX with beamer class.

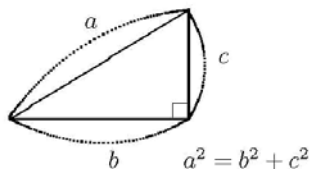
▶ 数学では, \mathbb{N} (自然数の全体), \mathbb{R} (実数の全体) など, 要素を無限に持つ集合 (無限集合) や, その上の様々な構造を考察する必要がある.

▶ 有限的な対象の考察でも, 間接的に無限が関与している場合もある. たとえば:

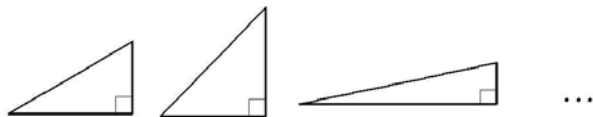
▷ 三平方の定理 (ピタゴラスの定理): すべての直角三角形の直角をはさむ二辺の長さの各々の二乗の和は, 他の辺の長さの二乗に等しい



▷ 三平方の定理 (ピタゴラスの定理): **すべての直角三角形の直角をはさむ二辺の長さの各々の二乗の和は, 他の辺の長さの二乗に等しい**



▷ この定理は, **すべての** 直角三角形に対して成り立つ性質を述べているが (互いに合同でない) 直角三角形は無限に存在する.





G. カントル (Georg Cantor, 1845 - 1918 (弘化2年 - 大正7年))

▶ 19 世後半には，無限を，より積極的に考察の対象とする数学の可能性や必要性がより強く感じられるようになってきた．

▶ カントルは，無限に関する研究を行い，現在では，集合論 (英語: set theory / ドイツ語: Mengenlehre) と呼ばれている，無限集合の性質を研究する数学の分野を確立した．

- ▶ 有限集合の要素の個数の比較の類推から（必ずしも有限とは限らない）2つの集合 X と Y が“同じ数”の要素を持っているということを、 X から Y の上への1対1写像が存在すること、定義する。
- ▶ この定義が有限の場合の拡張になっていることは、たとえば、 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ とするとき、 A と B の要素の数が等しいことが、

1	2	3	4	5
2	4	6	8	10

という対応（写像）の存在によって示せることを考えれば明らかであろう。

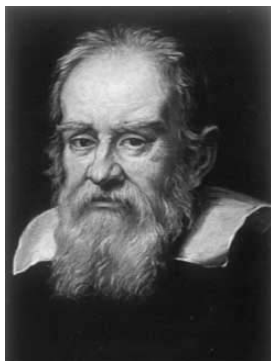
- ▶ ただし、無限集合の場合には、“要素の数”というのは意味不明なので、このようなとき X と Y は濃度が等しい (X and Y has the same cardinality) と表現することにする。

- ▶ 無限集合は、自分自身と濃度の等しい部分集合を必ず持つ!
- ▶ 例: E で偶数の全体をあらわすことにすると, $E \subsetneq \mathbb{N}$ である.
しかし, 対応

0	1	2	3	4	5	6	...	n	...
						
2	4	6	8	10	12	14	...	$2(n+1)$...

により E と \mathbb{N} は濃度が等しいことがわかる.

- ▶ 集合 X が \mathbb{N} と濃度が等しいとき, X は **可算 (かさん)** であるという.
- ▶ 上で見たことから, **偶数の全体は可算である.**



ガリレオ (Galileo Galilei, 1564 – 1642 (天文 (てんぶん)33 年 – 寛永 19 年))

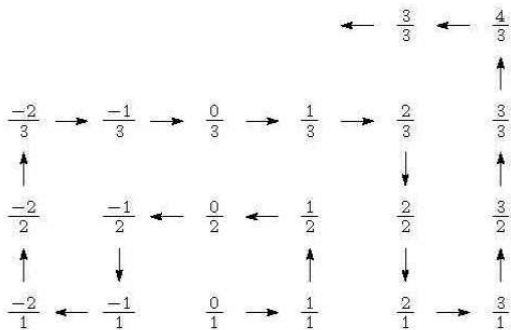
▶ 地動説で有名なガリレオは、彼の 1638 年の論文で上のような「逆理」をとりあげて、このことから『無限の大きさを比較する議論は無意味だ』と結論している。



デデキント (Richard Dedekind, 1831 – 1916 (天保2年 – 大正5年))

- ▶ デデキントは、19世紀後半に、当時の初期の集合論にもとずく、数学の基礎付けに関する先駆的な仕事を行なった。
- ▶ この仕事で、彼は「**自分自身の真部分集合と濃度が等しくなること**」を無限集合の定義として採用している。

▶ 有理数の全体 \mathbb{Q} は可算である:



1. (無限) 平面に座標を入れて x 軸より上にある, 各格子点 (n, m) 上に分数 $\frac{n}{m}$ を置く. 2. 格子点を蛇行しながらたどって, 格子点に乗った分数を 0 番目, 1 番目, 2 番目, ... と数え上げてゆく. 3. ただし, 前にすでに出てきた数とはばす.

定理 1 (カントル, 1873 年 (明治 6 年) 12 月 7 日)

実数の全体を自然数を添字にして $r_0, r_1, r_2, r_3, \dots$ と並べつくすことはできない。

証明. 背理法で証明する. 実数の全体が自然数を添字にして $r_0, r_1, r_2, r_3, \dots$ と並べつくすことができたとする.

$r_0, r_1, r_2, r_3, \dots$ のそれぞれを (十進法の) 無限小数展開で表現したものを各行に書いた (縦横無限の) 表を考える. たとえば,

$$\begin{array}{rcl} r_0 : & 2.4161073825503356\dots \\ r_1 : & -562.4328358208955225\dots \\ r_2 : & 1.9462686567164178\dots \\ r_3 : & 0.00117822429 \\ r_4 : & -1.5490001 \\ & \vdots \end{array}$$

r_0 : 2.4161073825503356...

r_1 : -562.4328358208955225...

r_2 : 1.9462686567164178...

r_3 : 0.00117822429

r_4 : -1.5490001

\vdots \vdots

$$\begin{aligned} r_0 &: 2.4161073825503356\dots \\ r_1 &: -562.4328358208955225\dots \\ r_2 &: 1.9462686567164178\dots \\ r_3 &: 0.00117822429\dots \\ r_4 &: -1.5490001\dots \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \end{aligned}$$

ここで，上で赤くぬった対角線上にある数字をひろい，それらの数字の一つ一つに対しそれと違う 0 と 9 以外の数字を適当に選んで 0. の下にならべる．たとえば： 0.54721...

このとき，こうやって作った実数は上の（無限）リストに含まれないものとなってしまいが，これは矛盾である． \square (定理 1)

▶ 集合 X と集合 Y の濃度が等しいとき (つまり X から Y の上への 1 対 1 写像が存在するとき), このことを $|X| = |Y|$ という記号であらわすことにする. たとえば, スライド「 \mathbb{Q} は可算である」での議論から $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$ である.

▶ 一方, X から Y への 1 対 1 写像は存在するが, X から Y への上への写像は存在しないことを, $|X| < |Y|$ と書くことにすると, スライド「 \mathbb{R} は可算でない」で示したことから, $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$ である.

▶ $|X| \leq |Y|$ を, 上の意味で “ $|X| = |Y|$ または, $|X| < |Y|$ ” のこと, と定義すると, これは, (必ずしも上への写像ではない) X から Y への 1 対 1 写像が存在するという意味になる.

▶ ここでの “ \leq ” は, 第 7 回の講義 でのような意味での半順序になっている. 特に, $|X| \leq |Y|$ かつ $|Y| \leq |X|$ なら, $|X| = |Y|$ である (カントル=ベルンシュタインの定理).

▶ $|X| \leq |Y|$ を，上の意味で “ $|X| = |Y|$ または， $|X| < |Y|$ ” のこと，と定義すると，これは，(必ずしも上への写像ではない) X から Y への 1 対 1 写像が存在するという意味になる．

▶ ここでの “ \leq ” は，第 7 回の講義 でのような意味での半順序になっている．特に， $|X| \leq |Y|$ かつ $|Y| \leq |X|$ なら， $|X| = |Y|$ である (カントル=ベルンシュタインの定理)．

▶ 上で，“... での ような 意味での ...” とぼかして書いたのは，ここでは， X に対する $|X|$ の実体が定義されていない ($|X| = |Y|$ はここでは集合 X と Y に関する，ある性質の略記として導入されている) からである．また，この実体は集合としてうまく定義することもできるが，そのときには $|X|$ の形のものの全体は，大きすぎて集合にならない．

▶ ここでの \leq は 第 7 回の講義 でのような意味での線形順序でもある．つまり，任意の X, Y に対し， $|X| \leq |Y|$ か $|Y| \leq |X|$ の少なくともどちらかは成り立つ．ただし，これを言うには，第 9 回の講義 で述べた **選択公理** を仮定する必要がある．

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

構造の数理論 XII (14/14)

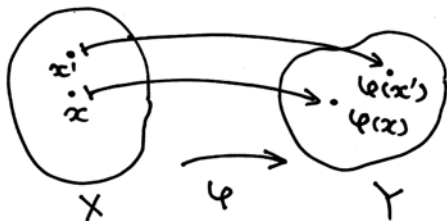
This file and the version for the presentation as well as some of the related files are downloadable from:

<http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/kobe/>



集合論は現在も盛んに研究されています。この写真は、京都大学数理解析研究所で2010年に開催された集合論の国際集会での、神戸大大学院出身で静岡大学准教授の依岡輝幸氏の講演です。

▶ 集合 X から集合 Y への写像 φ が Y の上への1対1写像であるとは, φ が X の (すべての) 要素と Y の (すべての) の間の1対1対応を与えるものとなっていることである.



つまり,

▷ φ は, すべての互いに異なる $x, x' \in X$ に対し, $\varphi(x) \neq \varphi(x')$ を常に満たし (φ は1対1),

▷ すべての $y \in Y$ に対し, $\varphi(x) = y$ となるような $x \in X$ が存在する (φ は Y の上への写像).