数理論理学

渕野 昌 (Sakaé Fuchino)

2019 年 05 月 21 日

以下のテキストは，2011 年度および 2012 年度前期の神戸大学情報知能工学科 3 年のための「数理論理学」の講義の講義録（講義ノート）をなす第 I 部と，神戸大学大学院システム情報学研究科博士課程前期 2 年のための,「数理論理学特論」の講義の講義録（講義ノート）をなす第 II 部からなります．このテキストの最新版は

http://fuchino.ddo.jp/kobe/predicate-logic-ss11.pdf

としてダウンロードできます．

第 I 部は，2005 年前期に名古屋大学情報文化学部で開講された「数理情報学 6」の講義メモを下敷にしています．

第 I 部，第 II 部ともに，2012 年度前期の講義と平行して，さらに補足／拡張をしてゆく予定です．そのため，このテキストは，まだ何度も，かなり頻繁に update されることになる予定です．あなたの見ているこのテキストは:

2019 年 05 月 21 日 (02:14JST) 版

です．なお，このテキストを含め，私が神戸大学で行なっている講義に関連する資料は，

http://fuchino.ddo.jp/kobe/index.html

にリンクされています．

また，2005 年の講義の名古屋大学での講義メモを含む当時の関連の資料は

http://fuchino.ddo.jp/nagoya/logic05.html

から download できます．

ページの右はしにプリントされているのは，テキストのソースコードで使っているラベルです．テキストの変更でページ組や，定理や式の番号付けが変る可能性もあるので，間違えの指摘やコメントがあるときには，たとえば，”`fml-6` の行から3 行目の …” などとしてこれらのラベルを基準にして場所を指定して指摘していただけると助かります．

目次

第 I 部
述語論理の形式的体系とその完全性

partI

1 導入

introduction

本稿で扱かうことになる話題は,

記号論理学 (symbolic logic)
数理論理学 (mathematical logic)
数学基礎論 (foundation of mathematics)

といったキーワードで呼ばれる分野の基礎知識である[1)]. 数理論理学のもともとのモティヴェーションは, 次のようにまとめることができる:

A. 数学（あるいはもっと一般的に論理的な推論全般）を形式的に（記号の操作の体系として）展開できるような枠組が何かを調べる (論理的体系 (logical system))

この方向での研究はギリシャ時代の論理学にその発端を見ることができるが, 現代の数理論理学の確立に対するもっと直接的な寄与や関連を持つ先駆者としては

- Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646(寛永 23 年) - 1716(享保 1 年)) (Leibniz の "夢")
- Ernst Schröder (1841(天保 12 年) - 1902(明治 35 年))
- Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848(嘉永 1 年) - 1925(大正 14 年))

[1)] 「記号論理学」は, 論理を記号列の操作の体系として展開することに焦点をあてた名称であるのに対し,「数理論理学」は論理を数学的な手法で分析することを強調した名称となっている. また「数学基礎論」は, 論理学を, それによる数学体系の基礎付けに主眼に置いて研究する研究分野で, 本来は「数理論理学」の部分分野の名称であるが, 日本では, この名称が独り歩きしてしまっているきらいがある.
以下では, 講義名に合せて「数理論理学」という用語を専ら用いることにする.

などがあげられる[2)]．

数学のための枠組としての形式論理の体系に関しては，後出の Hilbert と Paul Bernays (1888(明治 21 年) - 1977(昭和 52 年)) などにより,「1 階の述語論理」が，そのような論理体系（の一つ）となるべきであることが明らかにされている（第 2 節を参照）．

B. そのような形式的推論の体系が矛盾を含まないことを調べる．

これについては既に Hilbert と Ackermann による 1928 年の教科書 [5] で肯定的な結果が述べられている ([4] も参照)．

C. そのような体系での形式的証明に，すべての数学的な証明が翻訳できるか？

Yes: Kurt Gödel (1906(明治 39 年) – 1978(昭和 53 年))
完全性定理 (Completeness Theorem, 1929) — この定理の証明は，第 I 部の一つのハイライトとなる（第 8 節を参照）．

D. すべての数学理論がそのような体系上で本当に展開できるのか？

少なくとも既存の数学理論については，この体系上に展開できる: 公理的集合論（例 3.6 を参照）をこの論理体系で展開すると，その中に (ほとんど) すべての現存の数学理論を展開することができることが知られている．

E. そのような体系上で展開された数学が矛盾を含まないことを調べる．

David Hilbert (1862- 1943, 文久 2 年 – 昭和 18 年)
(”Hilbert のプログラム”)

F. 1930 年代初め (昭和初期) に，E. は厳密な意味では，完全には実行不可能であることが判明した．

Kurt Gödel (1906 - 1978) 不完全性定理 (Incompleteness Theorems, 1931) — 第 15 節を参照．

---

2) Boole, de Morgan, Dodgeson (Luis Carrol), Russel などの，19 世紀から 20 世紀初頭にかけてのイギリスの論理学者の名前や，イタリアの Peano の名前もあげるべきなのだろうが，数学史の講義ではないので，ここではあまり歴史に関する議論に深入りをすることはさけることにしたい．

G. E. の部分解

... たとえば，古典的な解析学は，ある意味で矛盾を含まないことの保証ができる体系に含まれることが示せる（たとえば [9], [11] を参照）. — 本稿の第 II 部でもこれとも関連のある定理をいくつか扱かう.

参考文献

[1] 新井敏康: 数学基礎論，岩波出版 (2011).

[2] H.-.D. Ebbinghaus J. Flum, W. Thomas: Einfürung in die mathematische Logik, Wissenschaftsverlag (1992, 英訳あり).

[3] Herbert B. Enderton, A Mathematical Introduction to Logic, Second Edition, Academic Press (2001).

[4] G. Gentzen, Untersuchungen über das logische Schließen, Mathematische Zeitschrift. 39 (1934), 176–210, 405–431.

[5] D. Hilbert and W. Ackermann, Grundzüge der theoretischen Logik, Springer-Verlag (1928/1972).

[6] 倉田令二朗: 入門数学基礎論，河合文化教育研究所 (1996).

[7] 前原昭二: 数学基礎論入門，朝倉書店 (1977).

[8] Joseph R. Shoenfield, Mathematical Logic, A K Peters/CRC Press; 2Rev Ed. (1967/2001).

[9] G. Takeuti, Two applications of Logic, Iwanami Shoten & Princeton University Press (1978).

[10] 竹内外史，八杉満利子: 数学基礎論，共立出版 (1956/1974).

[11] 田中一之: 逆数学と 2 階算術，河合文化教育研究所 (1997).

[12] 坪井明人: 数理論理学の基礎・基本，牧野書店 (2012).

例 1.1 φ を

$$\forall x \forall y((\exists z(z \cdot z + x \cdot z + y > 0) \land \exists z(0 > z \cdot z + x \cdot z + y)) \ \rightarrow\ \exists z(z \cdot z + x \cdot z + y \equiv 0))$$

という "論理式 " (formula) とする．ここで現われる記号は

$$\begin{array}{rcl} \forall x \circ\circ\circ & : & \text{for all } x \circ\circ\circ \text{ holds} \\ \exists y \circ\circ\circ & : & \text{there exists } x \text{ such that } \circ\circ\circ \\ \circ\circ\circ \ \land\ \triangle\triangle\triangle & : & \circ\circ\circ \text{ and } \triangle\triangle\triangle \\ \circ\circ\circ \ \rightarrow\ \triangle\triangle\triangle & : & \circ\circ\circ \text{ implies } \triangle\triangle\triangle \end{array}$$

とうように解釈されるべきものとして導入されているとする．また，'$\equiv$' は等号である[3]．

このような解釈をするとき，φ は構造 $\langle \mathbb{R}, 0, +^{\mathbb{R}}, \cdot^{\mathbb{R}}, <^{\mathbb{R}} \rangle$ では成り立つ[4]（これを後では $\langle \mathbb{R}, 0, +^{\mathbb{R}}, \cdot^{\mathbb{R}}, <^{\mathbb{R}} \rangle \models \varphi$ とあらわす）が，構造 $\langle \mathbb{Q}, 0, +^{\mathbb{Q}}, \cdot^{\mathbb{Q}}, <^{\mathbb{Q}} \rangle$ では成り立たない（ つまり，$\langle \mathbb{Q}, 0, +^{\mathbb{Q}}, \cdot^{\mathbb{Q}}, <^{\mathbb{Q}} \rangle \not\models \varphi$ である）．なぜか？

2 1階の述語論理の論理式と論理式の構造での解釈

pred-logic

ここで導入したい "論理式" の体系は，たとえば前節の例であげた

$$\begin{aligned} &\forall x \forall y((\exists z(z \cdot z + x \cdot z + y < 0) \land \exists z(0 < z \cdot z + x \cdot z + y)) \\ &\rightarrow\ \exists z(z \cdot z + x \cdot z + y \equiv 0)) \end{aligned}$$

というような記号列を論理式として含むものにしたいのであった．ここで用いられている記号を分析してみると，これらの記号は，それぞれの意図された意味に則して次のようなカテゴリーに分けることができることがわかる：

定数記号：0

演算記号（または関数記号）：$+, \cdot$

[3] 記号としての等号を $\equiv$ で表わし，objects が等しいことを $=$ を使って表わして区別する．

[4] $+^{\mathbb{R}}$, $\cdot^{\mathbb{R}}$, $<^{\mathbb{R}}$ で，それぞれ，実数の全体 $\mathbb{R}$ での，通常の加法，通常の乗法，通常の大小関係を表わしている．また 以下の $+^{\mathbb{Q}}$, $\cdot^{\mathbb{Q}}$, $<^{\mathbb{Q}}$ も，有理数の全体 $\mathbb{Q}$ での，通常の意味でのこれらの演算や関係を表わしている．

関係記号：$<$

等号：$\equiv$

変数記号：x, y, z

論理記号：$\wedge$, $\rightarrow$

量化子：$\forall$, $\exists$

括弧：'(', ')',

上で導入された記号のカテゴリーのうち，等号，変数記号，論理記号，量化子，括弧は，どのような理論を考察する場合にも必要になりそうである．ただし，変数記号は，あらかじめいくつあれば十分か分らないので，無限個用意しておく必要がある．また，論理記号としては，上の例では用いられていなかったが，一般には，"... でない", "または" をあらわす，$\neg$, $\vee$ というような記号も必要になる (後で示すように，実は $\vee$ は $\neg$ があれば，これと他の論理記号の組合せで表現できる)．また括弧以外にもコンマ ',' が補助記号として必要になる．

以上をまとめると，記述したい理論に依存せずに常に必要となる記号として：

等号：$\equiv$

変数記号：x, y, z, x_0, $x_1, \ldots$, etc.

論理記号：$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$

量化子：$\forall$, $\exists$

括弧とコンマ：'(', ')', ','

を用意しておけばよいことがわかる．ただし変数記号については，実際にいくつ必要になるか事前に決められないため，無限個用意しておくものとする．これに対して，定数記号，関数記号，関係記号としてどのようなものを用意しておく必要があるかは，これらを用いて記述したい（数学）理論に依存して決まるであろう．たとえば，初等幾何の体系を記述したいときには,, "x, y, z が同一直線上にある"，という関係を表す記号が必要になるであろうが，これは，x, y, z の間の 3 項関係をあらわす関係記号でなくてはならないであろう．また $+$ や $\cdot$ のような二項演算をあらわす記号でなくて，3 項演算，4 項演算 etc. をあらわす関数記号が必要になる場合もあるであろう．このような状況を頭において，次の定義を行う：

記号の集合 L が言語 (language) であるとは，L に含まれる一つ一つの記号は，定数記号 (constant symbol) であるか，関数記号 (function symbol) であるか，関係

記号 (relation symbol) であるかのいずれかで，L に含まれる関数記号と関係記号のそれぞれには，その記号の変数の数 (arity) が決まっているようなものとする．

言語 L が与えられたとき，数学的考察の対象となる領域の要素を表す L の記号による表現（例えば上の例では，'$+$' や '$\cdot$' などの関数記号が L に含まれるときの $z \cdot z + x \cdot z + y$ など）を，L-項 (L-term) として次のように再帰的に定義する:

(2.1) 変数記号や，L の定数記号 (からなる長さ 1 の記号列) は L-項である; term-0

(2.2) f が L の n-変数の関数記号で，$t_1, \ldots, t_n$ が L-項なら，$f(t_1, ..., t_n)$ も L-項である． term-1

(2.3) L-項は (2.1) と (2.2) の（有限回の）繰り返し適用により得られるもののみとする． term-2

(2.3) に相当する規則は，このように書くと冗長なので，"以上のみ" などと書かれることも多い．f が数学でよく用いられる 2 変数の関数に対応する関数記号，'$+$' や '$\cdot$' の場合，通常の慣習に合わせて，たとえば $+(t_1, t_2)$ と書かずに，$(t_1 + t_2)$ あるいは括弧も省略して $t_1 + t_2$ などと書くこともある．ただし，これは読者が読みやすいように略記しているにすぎず，実際の形式としては上のような書き方が守られているものと考える．また上の例でのように括弧を省略して $z \cdot z + x \cdot z + y$ などと書いた場合には，$((z \cdot z) + (x \cdot z)) + y$, $z \cdot (((z + x) \cdot z) + y)$ など複数の解釈が可能になるが，これも，'$\cdot$' の方が '$+$' より結合力が強いという数学の通常の慣習での読みかた（ここでは $((z \cdot z) + (x \cdot z)) + y$ という解釈）を採ることにする．これについても，単に，可読性のための略記にすぎないと考える．L-項 t が変数記号を含まないとき，t は閉じた項 (closed term) である，あるいは，閉じた L-項 (closed L-term) であるという．たとえば，L が定数記号 1 と 2 変数関数記号 $+$ を含むとき，

$$((\cdots((\underbrace{1 + 1) + 1) + \ \cdots\ ) + 1}_{n \text{ 個の `1'}})$$

は L の閉項である．1 や $+$ が普通の算術でのように解釈されるときには，上の閉項は 数 n を表わすものと解釈できることに注意する（項の解釈については，以下を参照）．

L-項 t に含まれる変数記号がすべて $x_1, \ldots, x_n$ のうちに含まれるとき，このことを，

$$t = t(x_1, \ldots, x_n)$$

と表すことにする[5)]．ただし，$x_1,\ldots, x_n$ のうちには，実際には t に現われないものがあってもいいとする（ダミー変数）．

L-項や，以下で定義されることになる L-論理式は，それら自身は単に記号列にすぎないが，与えられた数学的対象で解釈することにより，これらに "数学的な意味" を付加したい．このために 言語 L に対応する数学的対象である L-構造 (L-structure) を次のように定義する: まず

$$L = \{c_i : i \in I\} \cup \{f_j : j \in J\} \cup \{r_k : k \in K\}$$

とする．ここに，c_i, f_j, r_k はそれぞれ，L の定数記号，関数記号，関係記号で，f_j は m_j-変数関数記号，r_k は n_k-変数関係記号であるとする．このとき，$\mathfrak{A}$ が L-構造であるとは，$\mathfrak{A}$ が

$$\mathfrak{A} = \langle A,\ c_i^{\mathfrak{A}},\ f_j^{\mathfrak{A}},\ r_k^{\mathfrak{A}}\rangle_{i\in I, j\in J, k\in K}$$

という形をしており，A は空でない集合で，各 $c_i^{\mathfrak{A}}$, $i \in I$ は A の要素， $j \in J$ に対し，$f_j^{\mathfrak{A}} : A^{m_j} \to A$ で， $k \in K$ に対し，$r_k^{\mathfrak{A}}$ は A 上の n_k-項関係 (つまり，$r_k^{\mathfrak{A}} \subseteq A^{m_k}$) となることとする．$c_i^{\mathfrak{A}}$, $f_j^{\mathfrak{A}}$, $r_k^{\mathfrak{A}}$ はそれぞれ，$\mathfrak{A}$ での c_i, f_j, r_k の "解釈" である，という．

$t = t(x_1, \ldots, x_n)$ を L-項とするとき，$t(x_1, \ldots, x_n)$ の $\mathfrak{A}$ での解釈 $t^{\mathfrak{A}}(x_1, \ldots, x_n) : A^n \to A$ を（L-項の構成に関する帰納法により）次のように再帰的に定義する[6)]．

(2.4a) t が定数記号 c_i のとき， term-3

$$t^{\mathfrak{A}}(x_1, \ldots, x_n) : A^n \to A\,;\ \langle a_1, \ldots, a_n\rangle \mapsto c_i^{\mathfrak{A}}$$

とする;

(2.4b) t が変数記号 x_i $(1 \le i \le n)$ のとき，

$$t^{\mathfrak{A}}(x_1, \ldots, x_n) : A^n \to A\,;\ \langle a_1, \ldots, a_n\rangle \mapsto a_i$$

とする;

(2.5) t が $f_j(t_1, \ldots, t_{m_j})$ という形をしているとき， term-5

5) ここで $x_1,\ldots, x_n$ は Var の要素をあらわしているが，これらの Var の要素が記号として $x_1,\ldots, x_n$ の形をしている，ということを仮定しているわけではない．

6) (2.4a) と (2.4b), および (2.5) は，それぞれ，L-項の再帰的定義の (2.1) および (2.2) に対応していることに注意する．したがって，(2.3) により，(2.4a) と (2.4b), および (2.5) で，すべての L-項 $t = t(x_1, \ldots, x_n)$ に対し，その解釈 $t^{\mathfrak{A}}(x_1, \ldots, x_n)$ が定まる．

$t^{\mathfrak{A}}(x_1, ..., x_n) : A^n \to A\,;$

$\langle a_1, ..., a_n\rangle \mapsto f_j^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}(x_1, ..., x_n)(a_1, ..., a_n), ..., t_{m_j}^{\mathfrak{A}}(x_1, ..., x_n)(a_1, ..., a_n))$

とする．

例 2.1 L を 2 変数関数記号 '$+$', '$\cdot$' と定数記号 1 を含む言語とする．$\mathcal{R} = \langle \mathbb{R}, +^{\mathbb{R}}, \cdot^{\mathbb{R}}, 1^{\mathbb{R}}, \ldots\rangle$ とする．ただし，$+^{\mathbb{R}}$ と $\cdot^{\mathbb{R}}$ は実数上の通常の可算と乗算で $1^{\mathbb{R}}$ は実数の 1 のこととする．. L-項 $t(x, y)$ を $x \cdot x + y + 1$ とすると，$t^{\mathcal{R}}(x, y)$ は 2 変数関数

$$t^{\mathcal{R}}(x) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,;\ \langle r, s\rangle \mapsto r^2 + s + 1$$

となる．

いささか煩雑に思えるかもしれないが，厳密には，$t^{\mathfrak{A}}(x_1, ..., x_n)$ の定義が変数のリスト $x_1, ..., x_n$ を余裕を持ってとったときにも本質的には同じものになることを示す次の補題を，L-項の構成 (2.1)〜(2.3) に関する帰納法により証明しておく必要がある:

term-a-i

補題 2.1 t を L-項として，$x_1, \ldots, x_n$ を変数記号とする．$\ell_1, \ldots, \ell_k$ $(k \le n)$ を 1, 2, $\ldots$, n の部分列として，$t = t(x_{\ell_1}, x_{\ell_2}, ..., x_{\ell_k})$ とする．このとき，$t = t(x_1, ..., x_n)$ でもあるが，任意の L-構造 $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots\rangle$ と $a_1, \ldots, a_n \in A$ に対し，等式

$$t^{\mathfrak{A}}(x_1, ..., x_n)(a_1, ..., a_n) = t^{\mathfrak{A}}(x_{\ell_1}, ..., x_{\ell_k})(a_{\ell_1}, ..., a_{\ell_k})$$

が成り立つ．

証明． この補題はほとんど自明と言えるが，証明は，L-項の構成に関する帰納法の証明の一例となるため書き出してみることにする．

t を L-項として，$a_1, \ldots, a_n \in A$ とする．

t が定数記号 c_i のときには (2.4a) により，

$$t^{\mathfrak{A}}(x_1, ..., x_n)(a_1, ..., a_n) = c_i^{\mathfrak{A}} = t^{\mathfrak{A}}(x_{\ell_1}, ..., x_{\ell_k})(a_{\ell_1}, ..., a_{\ell_k})$$

となるからよい．

t が変数記号 x_i のときには，$t = t(x_{\ell_1}, x_{\ell_2}, ..., x_{\ell_k})$ だから，i は $\ell_1, \ldots, \ell_k$ のどれかである．したがって，このときには，(2.4b) により，

$$t^{\mathfrak{A}}(x_1, ..., x_n)(a_1, ..., a_n) = a_i = t^{\mathfrak{A}}(x_{\ell_1}, ..., x_{\ell_k})(a_{\ell_1}, ..., a_{\ell_k})$$

となるからよい．

t が $f_j(t_1, ..., t_{m_j})$ の形をしていて，$t_1, \ldots, t_{m_j}$ に対しては補題が成り立つとき（帰納法の仮定）には，(2.5) により，

$$\begin{aligned} & t^{\mathfrak{A}}(x_1, ..., x_n)(a_1, ..., a_n) \\ & \quad = f_j{}^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}(x_1, ..., x_n)(a_1, ..., a_n), ..., t_{m_j}^{\mathfrak{A}}(x_1, ..., x_n)(a_1, ..., a_n)) \\ & \quad =^{7)} f_j{}^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}(x_{\ell_1}, ..., x_{\ell_k})(a_{\ell_1}, ..., a_{\ell_k}), ..., t_{m_j}^{\mathfrak{A}}(x_{\ell_1}, ..., x_{\ell_k})(a_{\ell_1}, ..., a_{\ell_i})) \\ & \quad = t^{\mathfrak{A}}(x_{\ell_1}, ..., x_{\ell_k})(a_{\ell_1}, ..., a_{\ell_k}) \end{aligned}$$

となるからよい． （証明終）

L-論理式 (L-formula) を次のように再帰的に定義する:

(2.6) t_1, t_2 を L-項とするとき，$t_1 \equiv t_2$ は L-論理式である; fml-0

(2.7) $t_1, \ldots, t_n$ が L-項で，r が L の n-変数関係記号のとき，$r(t_1, ..., t_n)$ は L-論理式である; fml-1

(2.8) φ, ψ が L-論理式のとき，$\neg\varphi$, $(\varphi \land \psi)$, $(\varphi \lor \psi)$, $(\varphi \to \psi)$ も L-論理式である; fml-2

(2.9) φ が L-論理式で，x が変数記号の 1 つのとき，$\forall x\varphi$, $\exists x\varphi$ は L-論理式である; fml-3

(2.10) 以上のみ． fml-4

(2.6) または (2.7) の形をした論理式のことを原子論理式 (atomic formula) とよぶ．計算機科学では，原子論理式，または原子論理式 φ に (2.8) を適用して $\neg\varphi$ の形の論理式として得られるような論理式のことをリテラル (literal) とよぶことがある．

$\forall x\varphi$ と $\exists x\varphi$ は，それぞれ，“すべての x に対し φ が成り立つ”, “ある x が存在して，この x に対し φ が成り立つ” という解釈を付与することになるものであるが，このような解釈を前提とすると，ここでの x はたとえば定積分をあらわす $\int_a^b f(x)dx$ での x と同じように，普通の変数としては機能しないと考えられる．そこで，このような $\forall$ や $\exists$ で “縛られた” 変数のことを束縛変数 (bounded variable) とよび，束縛変数でない変数を自由変数 (free variable) とよぶ．

もう少し厳密には[8]，$x \in Var$ として φ を論理式とする．記号列 φ の中の i 番目の記号が x とするとき，

---

[7] 帰納法の仮定による．

[8] 部分論理式の厳密な定義を含む，ここでの議論のより厳密な扱いについては第 4.3 節を参照．

φ の i 番目の記号 x は φ に束縛変数としてあらわれる :⇔

> φ の部分論理式で $\exists x\psi$ または $\forall x\psi$ の形のものがあり，φ の i 番目の記号 x はこの部分論理式の範囲内にある．

として，

変数 x は φ の自由変数 :⇔

> ある i に対し，x は φ の i 番目の記号としてあらわれ，x はこの場所には φ の束縛変数としてはあらわれていない．

とする．L-論理式 φ の自由変数のすべてが $x_1,...,x_n$ に含まれるとき，このことを $\varphi = \varphi(x_1,...,x_n)$ と書きあらわす．ここでも項に関する記法と同様にリスト $x_1,...,x_n$ の中には実際には φ に自由変数として現れない変数 (ダミー変数) もあらわれていい，とする．

Fml_L で L-論理式の全体からなる集合をあらわすことにする．

$$Fml_L = \{\varphi : \varphi \text{ は } L\text{-論理式}\}$$

である．

L-論理式で自由変数を含まないようなものを L-文 (L-sentence) とよぶ．$Sent_L$ で L-文の全体からなる集合をあらわすことにする．

$$Sent_L = \{\varphi : \varphi \text{ は } L\text{-文}\}$$

である．

ここで，L-論理式の真偽の L-構造での解釈を以下のように導入する．Var で変数記号の全体からなる集合をあらわすことにする．Var はここでの議論をはじめる前に（L を選ぶ前に）固定された無限集合だった．L-論理式 φ を L-構造 $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots\rangle$ で解釈するとき，φ の自由変数は $\mathfrak{A}$ での L-項の扱いでもそうだったように，A の上を動くものとして解釈できるが，そのように解釈すると，L-論理式の真偽が一意に決まらないかもしれない．このような困難を回避するために，変数記号の一つ一つをとりあえず A の元のどれかの要素で解釈してしまうことにする．そのために，Var から A への関数 I を固定して I を (Var の $\mathfrak{A}$ での) 解釈 (interprepation) と呼ぶことにする．

L-構造 $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots\rangle$ で論理式 φ が解釈 I のもとで成り立つことを表す

“$(\mathfrak{A}, I) \models \varphi$”

を以下のように再帰的に定義する: $I : Var \to A$ で，$x \in Var$ かつ $a \in A$ のとき，$I_{x,a} : Var \to A$ を，$v \in Var$ に対し，

$$I_{x,a}(v) = \begin{cases} I(v) & v \text{ は } x \text{ と異なるとき} \\ a & v \text{ が } x \text{ のとき} \end{cases}$$

とする[9)]．

(2.11) ある L-項 $t_1 = t_1(x_1, ..., x_n)$, $t_2 = t_2(x_1, ..., x_n)$ に対し φ が $t_1 \equiv t_2$ の形をしているとき，$(\mathfrak{A}, I) \models \varphi \;\Leftrightarrow\; t_1{}^{\mathfrak{A}}(I(x_1), ..., I(x_n)) = t_2{}^{\mathfrak{A}}(I(x_1), ..., I(x_n))$; fml-5

(2.12) ある k-変数関係記号 r と L-項 $t_1 = t_1(x_1, ..., x_n), \ldots, t_k = t_k(x_1, ..., x_n)$ に対し，φ が $r(t_1, ..., t_k)$ の形をしているとき，fml-6
$(\mathfrak{A}, I) \models \varphi \;\Leftrightarrow\; r^{\mathfrak{A}}(t_1{}^{\mathfrak{A}}(I(x_1), ..., I(x_n)), ..., t_k{}^{\mathfrak{A}}(I(x_1), ..., I(x_n)))$;

(2.13) ある L-論理式 θ, η に対し，fml-7

(a) φ が $\theta \wedge \eta$ の形をしているとき，
$(\mathfrak{A}, I) \models \varphi \;\Leftrightarrow\; (\mathfrak{A}, I) \models \theta$ かつ $(\mathfrak{A}, I) \models \eta$;

(b) φ が $\theta \vee \eta$ の形をしているとき，
$(\mathfrak{A}, I) \models \varphi \;\Leftrightarrow\; (\mathfrak{A}, I) \models \theta$ または $(\mathfrak{A}, I) \models \eta$;

(c) φ が $\neg\theta$ の形をしているとき，
$(\mathfrak{A}, I) \models \varphi \;\Leftrightarrow\; (\mathfrak{A}, I) \models \theta$ でない;

(d) φ が $\theta \to \eta$ の形をしているとき，
$(\mathfrak{A}, I) \models \varphi \;\Leftrightarrow\; (\mathfrak{A}, I) \models \theta$ ならば $(\mathfrak{A}, I) \models \eta$;

(2.14) ある L-論理式 θ に対し，fml-8

(a) φ が $\forall x\theta$ の形をしているとき，
$(\mathfrak{A}, I) \models \varphi \;\Leftrightarrow\;$ すべての $a \in A$ に対し，$(\mathfrak{A}, I_{x,a}) \models \theta$;

(b) φ が $\exists x\theta$ の形をしているとき，
$(\mathfrak{A}, I) \models \varphi \;\Leftrightarrow\;$ ある $a \in A$ に対し，$(\mathfrak{A}, I_{x,a}) \models \theta$.

次の補題は補題 2.1 と同様に証明できる:

formula-a-i

補題 2.2 $\varphi = \varphi(x_1, ..., x_n)$ を L-論理式として，$\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ を L-構造とする．今，$I : Var \to A$, $I' : Var \to A$ で $I(x_1) = I'(x_1), \ldots, I(x_n) = I'(x_n)$ なら，

$$(\mathfrak{A}, I) \models \varphi \quad\Leftrightarrow\quad (\mathfrak{A}, I') \models \varphi$$

---

9) つまり，$I_{x,a}$ は，解釈 I に “x の解釈は a とする” という変更を加えて得られる解釈である．

が成り立つ．

補題 2.2 により，$\varphi = \varphi(x_1, ..., x_n)$ に対し， $(\mathfrak{A}, I) \models \varphi$ が成り立つかどうかは，$I(x_1), \ldots, I(x_n)$ のみに依存する．そこで，$a_1, \ldots, a_n \in A$ として，$\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, ..., a_n)$ を

(2.15) $I(x_1) = a_1, ..., I(x_n) = a_n$ となるような，ある（すべての）$I : Var \rightarrow A$ に対し，$(\mathfrak{A}, I) \models \varphi$ となること fml-8-0

として定義できる．特に，φ が L-文のとき，つまり，自由変数が含まれないような L-論理式であるときには，$(\mathfrak{A}, I) \models \varphi$ は全く I に依存しない．そこで，これがある（すべての） I に対し成り立つことを $\mathfrak{A} \models \varphi$ とあらわすことにする．

$\mathfrak{A}$ を L-構造とするとき，$Th(\mathfrak{A}) = \{\varphi \in Sent_L : \mathfrak{A} \models \varphi\}$ として， $Th(\mathfrak{A})$ を $\mathfrak{A}$ の（1 階の）理論 ((first order) theory) ととよぶ．$Th(\mathfrak{A})$ は $\mathfrak{A}$ がどのような構造かを記述している，と考えることができるが，$\mathfrak{A} = \langle A, \cdots \rangle$ として A が無限のとき[10] には，$Th(\mathfrak{A})$ は，一般には，A のすべてを記述しつくせないことが知られている．たとえば，$\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ と $\langle \mathbb{R}, < \rangle$ は明らかに異る構造で，同型でもない[11] が，$Th(\langle \mathbb{Q}, < \rangle) = Th(\langle \mathbb{R}, < \rangle)$ となることが示せる．

一方，任意の有限構造 $\mathfrak{A}$ に対しては $Th(\mathfrak{A})$ は $\mathfrak{A}$ を（同型を除いて）一意に決定する（定理 3.3 を参照）．

例 2.2 $L = \{+, \cdot, 0, 1\}$ として，L-論理式 $\exists x(x \cdot x = 1 + 1)$ を考える．この論理式を φ とあらわすことにして，$\mathcal{R} = \langle \mathbb{R}, +^{\mathbb{R}}, \cdot^{\mathbb{R}}, 0, 1 \rangle$，$\mathcal{Q}\langle \mathbb{Q}, +^{\mathbb{Q}}, \cdot^{\mathbb{Q}}, 0, 1 \rangle$ とすると，$\mathcal{R} \models \varphi$ だが $\mathcal{Q} \not\models \varphi$ である．特に，このことから，$Th(\mathcal{R}) \neq Th(\mathcal{Q})$ となることがわかる．

3 理論とモデル

theorys-and-models

L-文からなる集合を L-理論とよぶ．T が L-理論で $\mathfrak{A}$ が L-構造のとき，$\mathfrak{A} \models T$ とは，T に属すすべての L-文 φ に対し，$\mathfrak{A} \models \varphi$ が成り立つこととする．$\mathfrak{A} \models T$ のとき，$\mathfrak{A}$ は T のモデルである，という．

---

[10] このようなときに $\mathfrak{A}$ は無限構造であるという．また，$\mathfrak{A} = \langle A, \cdots \rangle$ で A が有限のとき $\mathfrak{A}$ は有限構造であるという．

[11] 「同型」の概念については p.18 を参照．

$\varphi = \varphi(x_1, ..., x_n)$ が L-論理式のとき，$\forall x_1 \cdots \forall x_n \varphi(x_1, ..., x_n)$ は L-文となるが，このような L-文を φ の $\forall$-閉包とよぶ． 以下で，自由変数を含む論理式を並べて，「このような論理式からなる理論を T とする」というように言ったときには，常に，実際には，それらの論理式の $\forall$-閉包からなる 理論 T を考えることにする． forall-closure

$\varphi = \varphi(x_1, ..., x_n)$ を L-論理式とするとき，すべての L-構造 $\mathfrak{A}$ で $\mathfrak{A} \models T$ となるものに対し（つまり，すべての T のモデル $\mathfrak{A}$ に対し），$\mathfrak{A} \models \forall x_1 \cdots \forall x_n \varphi$ が成り立つことを，$T \models \varphi$ とあらわすことにし，“φ は T から（意味論的に）帰結される”，と読み下すことにする．

L-理論 T の（意味論的な）帰結 (consequences) の全体 $\mathit{Cn}_L(T)$ を，

$$\mathit{Cn}_L(T) = \{\varphi \in \mathit{Sent}_L : T \models \varphi\}$$

と定義する．

L-構造 $\mathfrak{A}$ に対し，$\mathit{Th}(\mathfrak{A}) = \{\varphi \in \mathit{Sent}_L : \mathfrak{A} \models \varphi\}$ は L-理論の例である．$T \subseteq \mathit{Th}(\mathfrak{A})$ で，$\mathit{Cn}_L(T) = \mathit{Th}(\mathfrak{A})$ のとき，T は $\mathit{Th}(\mathfrak{A})$ の公理化 (axiomatization) である，という．

3.1 有限構造，無限構造，構造の同型

finite-str-inf-str-isom

例 3.1 L を任意の言語として，$n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ に対し，L-文 $\varphi_{\geq n}$ を

$$\exists x_1 \cdots \exists x_n \left(\bigwedge\!\!\!\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \not\equiv x_j \right)$$

とする．ただし，$x_i \not\equiv x_j$ は $\neg x_i \equiv x_j$ の略記で， L-論理式 $\varphi_{i,j}$, $1 \leq i < j \leq n$ に対し，$\left(\bigwedge\!\!\!\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \varphi_{i,j}\right)$ は，すべての $1 \leq i < j \leq n$ に対する $\varphi_{i,j}$ を（適当な順序で）$\wedge$ で結合して得られる論理式とする．このとき，L-構造 $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ に対し，

$$\mathfrak{A} \models \varphi_{\geq n} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ は } n \text{ 個以上の元を持つ}$$

が成り立つ．したがって，L-理論 T_∞ を

$$T_\infty = \{\varphi_{\geq n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$$

とすると[12)]，すべての L-構造 $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ に対し，

$$\mathfrak{A} \models T \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ は無限集合}$$

である．

---

12) $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ で，$\mathbb{N} \setminus \{0\}$ はこの集合から，集合 $\{0\}$ を除いたものだから，$\mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, ...\}$ である．

A が無限集合であるような，構造 $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ を無限（な）構造とよび， A と L が有限集合であるような L-構造 $\mathfrak{A}$ を有限（な）構造とよぶ．上の例の T_∞ は無限構造の理論となっている．これに対し，任意の言語 L で有限な L-構造の L-理論は存在しないことが後で示される．しかし，各々の n に対し，“構造 $\mathfrak{A}$ の領域 A がちょうど n 個の要素を持つ” をあらわすような文は容易に作れる:

n-factorial

例 3.2 L を任意の言語として，$n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ に対し，L-文 $\varphi_{n!}$ を

$$\exists x_1 \cdots \exists x_n \left(\left(\bigwedge\!\!\bigwedge_{1 \le i < j \le n} x_i \not\equiv x_j \right) \wedge \forall x \left(\bigvee\!\!\bigvee_{1 \le i \le n} x \equiv x_i \right) \right)$$

とする．ただし，L-論理式 φ_i, $1 < i < n$ に対し，$\left(\bigvee\!\!\bigvee_{1 \le i \le n} \varphi_i \right)$ は $\bigwedge\!\!\bigwedge$ のときと同様に定義する．このとき，

$$\mathfrak{A} \models \varphi_{n!} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ はちょうど } n \text{ 個の元を持つ}$$

が成り立つ．

より一般的に， $\varphi = \varphi(x, y_1, \ldots, y_k)$ が論理式のとき，$x_1, \ldots, x_n$ を φ に表われない変数記号として，$\exists^{\ge n} x \varphi$ を，

$$\exists x_1 \cdots \exists x_n \left(\left(\bigwedge\!\!\bigwedge_{1 \le i < j \le n} x_i \not\equiv x_j \right) \wedge \left(\bigwedge\!\!\bigwedge_{1 \le i \le n} \varphi(x_i, y_1, \ldots, y_k) \right) \right)$$

のこと，とすると，L-構造 $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ と $a_1, \ldots, a_k \in A$ に対し，

$$\begin{aligned} &\mathfrak{A} \models \exists^{\ge n} x \varphi(a_1, \ldots, a_k) \\ &\Leftrightarrow \quad \mathfrak{A} \models \varphi(a, a_1, \ldots, a_k) \text{ を満たすような } a \in A \text{ は } n \text{ 個以上存在する} \end{aligned}$$

が成り立つ．“$\varphi(a, a_1, \ldots, a_k)$ を満たすような $a \in A$ はちょうど n 個存在する” をあらわすような $\exists^{n!} x \varphi$ も同様に定義することができる．

異なる $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ に対し $\varphi_{n!}, \varphi_{m!}$ を上の例でのようにとると，$T = \{\varphi_{n!}, \varphi_{m!}\}$ はモデルを 1 つも持たない理論となる．理論 T がモデルを持たないとき，T は（意味論的に）矛盾する，という．T がモデルを持つとき，T は（意味論的に）無矛盾である，という．

$L = \{c_i \,:\, i \in I\} \cup \{f_j \,:\, j \in J\} \cup \{r_k \,:\, k \in K\}$ を任意の言語として，$\mathfrak{A} = \langle A,\ c_i{}^{\mathfrak{A}},\ f_j{}^{\mathfrak{A}},\ r_k{}^{\mathfrak{A}} \rangle_{i \in I, j \in J, k \in K}$, $\mathfrak{B} = \langle B,\ c_i{}^{\mathfrak{B}},\ f_j{}^{\mathfrak{B}},\ r_k{}^{\mathfrak{B}} \rangle_{i \in I, j \in J, k \in K}$ を L-構造とするとき，$\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{B}$ が同型であるとは，$g : A \to B$ で，次の性質を満たすものが存在することである: isomorphic

(3.1) g は A からの B への 1 対 1 の上射である;

(3.2) すべての $i \in I$ に対し $g(c_i{}^{\mathfrak{A}}) = c_i{}^{\mathfrak{B}}$;

(3.3) すべての $j \in J$ と $a, a_1, \ldots, a_{m_j} \in A$ に対し,

$$f_j{}^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_{m_j}) = a \quad \Leftrightarrow \quad f_j{}^{\mathfrak{B}}(g(a_1), \ldots, g(a_{m_j})) = g(a);$$

(3.4) すべての $k \in K$ と $a_1, \ldots, a_{n_k}$ に対し,

$$r_k{}^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_{n_k}) \quad \Leftrightarrow \quad r_k{}^{\mathfrak{B}}(g(a_1), \ldots, g(a_{n_k})).$$

上のような g を $\mathfrak{A}$ から $\mathfrak{B}$ への同型写像という．同型写像の合成は同型写像で，同型写像の逆写像も同型写像だから，“$\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{B}$ は同型である” という関係は，L-構造間の同値関係になることがわかる．特に，恒等写像 $id_A : A \to A$ は $\mathfrak{A}$ から $\mathfrak{A}$ への同型写像となるから $\mathfrak{A}$ は $\mathfrak{A}$ 自身と同型である．$\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{B}$ が同値であるとき，これを $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ であらわす．同型な構造は，構造としては同一視できると考えられるが実際，そのような構造は論理式を用いて区別することができない:

isomorphic-str

補題 3.1 L を任意の言語として $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ と $\mathfrak{B} = \langle B, \ldots \rangle$ を 同型な L-構造で $g : A \to B$ は $\mathfrak{A}$ から $\mathfrak{B}$ への同型写像であるとする．このとき，任意の L-論理式 $\varphi = \varphi(x_0, \ldots, x_{n-1})$ と $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$ に対し,

$$\mathfrak{A} \models \varphi(a_0, \ldots, a_{n-1}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{B} \models \varphi(g(a_0), \ldots, g(a_{n-1}))$$

が成り立つ.

証明. φ の構成に関する帰納法で示せる（演習）．φ が原子論理式の場合の証明のためは，次の補題を用意しておくとよい． **（証明終）**

補題 3.2 $L, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, g : A \to B$ を補題 3.1 でのようなものとする．このとき，任意の L-項 $t = t(x_0, \ldots, x_{n-1})$ に対し,

$$g(t^{\mathfrak{A}}(a_0, \ldots, a_{n-1})) = t^{\mathfrak{B}}(g(a_0), \ldots, g(a_{n-1}))$$

が成り立つ.

証明. t の構成に関する帰納法で示す（演習）. **（証明終）**

finite-structures

定理 3.3 L を任意の（有限な）言語とする．有限な L-構造 $\mathfrak{A}$ に対し，L-文 $\varphi_{\mathfrak{A}}$ で，任意の L-構造 $\mathfrak{B}$ に対し,

$$\mathfrak{B} \cong \mathfrak{A} \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{B} \models \varphi_{\mathfrak{A}}$$

となるものが存在する．

上の定理で，$\mathfrak{A}$ が有限であることは本質的である: 無限の L-構造 $\mathfrak{A}$ に対しては，上のような性質を持つ $\varphi_{\mathfrak{A}}$ が存在しないことが後で示されることになる．

定理 3.3 の証明のスケッチ． 簡単のために L は 2 変数関係記号 r のみを含む場合を考える．$\mathfrak{A} = \langle A, r^{\mathfrak{A}} \rangle$ を有限な L-構造として，$A = \{a_0, ..., a_{n-1}\}$ とする．ただし，$a_0,..., a_{n-1}$ はそれぞれ異なるものとする．このとき，次のような L-文 φ を考える:

$$\begin{aligned}\exists x_1 \cdots \exists x_n \Big(\Big(\textstyle\bigwedge_{i<j<n} x_i \not\equiv x_j \Big) \land \forall x \Big(\textstyle\bigvee_{i<n} x \equiv x_i \Big) \\ \land \Big(\textstyle\bigwedge_{i,j<n, \langle i,j \rangle \in r^{\mathfrak{A}}} r(x_i, x_j) \Big) \land \Big(\textstyle\bigwedge_{i,j<n, \langle ij \rangle \notin r^{\mathfrak{A}}} \neg r(x_i, x_j) \Big) \Big)\end{aligned}$$

この φ の $\exists x_1 \cdots \exists x_n$ で縛られた部分を φ_0 とよぶことにする．したがって φ は $\exists x_1 \cdots \exists x_n \varphi_0$ とあらわされる．φ_0 の前半は，例 3.2 での $\varphi_{!n}$ でと同じ主張となっていることに注意する．今 $\mathfrak{B} = \langle B, \ldots \rangle$ が L-構造で $\mathfrak{B} \models \varphi$ とする．このとき，$b_1,..., b_n \in B$ で，$\mathfrak{B} \models \varphi_0(b_1, ..., b_n)$ となるものがとれるが，φ_0 の前半により $B = \{b_1, ..., b_n\}$ となる．今 $g : A \to B$ を，$g(a_i) = b_i$, $1 \le i \le n$ で定義すると，φ_0 の前半から，g 1 対 1 の上射となり，φ_0 の後半から，$\mathfrak{A}$ から $\mathfrak{B}$ への同型写像となることが分る． （証明終）

3.2 理論の例

ex-of-theories

理論の例をいくつか与える．17 ページでも注意したように，以下で α_1, α_2 などとして与えられる論理式は，実際には，すべて，その $\forall$-閉包をとったものを考えている．

例 3.3 （稠密な線型順序の理論）$L = \{<\}$ とする．ここに，$<$ は 2 変数関係記号とする，稠密な線型順序 (dense linear order without end-points) の理論 T_{DLO} は，以下の $\alpha_1,..., \alpha_6$ により，$T_{DLO} = \{\alpha_1, ..., \alpha_6\}$ として与えることができる．

α_1: $x < y \land y < z \to x < z$

α_2: $\neg(x < x)$

α_3: $x < y \lor y < x \lor x \equiv y$

α_4: $x < y \to \exists z\,(x < z \land z < y)$

α_5: $\exists y\,(y < x)$

α_6: $\exists y\,(x < y)$.

たとえば，$\langle \mathbb{R}, <^{\mathbb{R}} \rangle$ や $\langle \mathbb{Q}, <^{\mathbb{Q}} \rangle$ は T_{DLO} のモデルである．

実は，更に $Cn_L(T_{DLO}) = Th(\langle \mathbb{R}, <^{\mathbb{R}} \rangle) = Th(\langle \mathbb{Q}, <^{\mathbb{Q}} \rangle)$ となることが示せる（11.2 を参照）.

例 3.4 初等平面幾何の公理系 (Tarski の公理系) $L = \{\beta, \delta\}$ とする，ここに β は 3 変数の関係記号で，δ は 4 変数の関係記号である．$\beta(x, y, z)$ と $\delta(x, y, x', y')$ の意図された解釈は，それぞれ,「点 y は点 x と点 z を結ぶ線分の上にある」,「線分 xy と線分 $x'y'$ は等長である」である．この言語で表わせる初等幾何の理論は，次の $A1 \sim A13$ で完全に記述できていることが示せる:

$A1$: $\beta(x, y, x) \rightarrow x \equiv y$

$A2$: $(\beta(x, y, u) \land \beta(y, z, u)) \rightarrow \beta(x, y, z)$

$A3$: $(\beta(x, y, z) \land \beta(x, y, u) \land x \not\equiv y) \rightarrow (\beta(x, z, u) \lor \beta(x, u, z))$

$A4$: $\delta(x, y, y, x)$ $A5$: $\delta(x, y, z, z) \rightarrow x \equiv y$

$A6$: $(\delta(x, y, z, u) \land \delta(x, y, v, w)) \rightarrow (z, u, v, w)$

$A7$: **(Pasch の公理)**

$\exists v((\beta(x, t, u) \land \beta(y, u, z)) \rightarrow (\beta(x, v, y) \land \beta(z, t, v)))$

$A8$: **(Euclid の公理)**

$\exists v \exists w((\beta(x, u, t) \land \delta(y, u, z) \land x \not\equiv u) \rightarrow (\beta(x, z, v) \land \beta(x, y, w) \land \beta(v, t, w)))$

$A9$: $(\delta(x, y, x', y') \land \delta(y, z, y', z') \land \delta(x, u, x', u') \land \delta(y, u, y', u')$
$\land \beta(x, y, z) \land \beta(x', y', z) \land x \not\equiv y) \rightarrow \delta(z, u, z', u')$

$A10$: $\exists z(\beta(x, y, z) \land \delta(y, z, u, v))$

$A11$: $\exists x \exists y \exists(\neg\beta(x, y, z) \land \neg\beta(y, z, x) \land \neg\beta(z, x, y))$

$A12$: $(\delta(x, u, x, v) \land \delta(y, u, y, v) \land \delta(z, u, z, v) \land u \not\equiv u)$
$\rightarrow (\beta(x, y, z) \lor \beta(y, z, x) \lor \beta(z, x, y))$

$A13$: すべての L-論理式 $\varphi = \varphi(x, v, w, ...)$, $\psi = \psi(y, v, w, ...)$ に対して次の形の論理式すべて（ただし y, z, u は φ に自由変数として現れず， x, z, u は ψ に自由変数として現れないものとする):

$\exists z \forall x \forall y((\varphi \land \psi) \rightarrow \beta(z, x, y)) \rightarrow \exists u \forall x \forall y((\varphi \land \psi) \rightarrow \beta(x, u, y)))$

例 3.5 （Peano の公理系 – 初等数論の理論） $L_{\mathrm{PA}} = \{0, S, +, \cdot\}$ とする．ここに，0 は定数記号，S は 1 変数関数記号で，$+$ と $\cdot$ は 2 変数関数記号である．直観的に

は， $S(x)$ は数 x の次の数，つまり $x+1$ を与える関数である．以下に定義される $p_1, p_2, p_3,$, 等により，

$$T_{\mathrm{PA}} = \{p_1, p_2, p_3, a_1, a_2, m_1, m_2\} \cup \{p_\varphi : \varphi(x, \overline{x}) \in \mathit{Fml}_L\}$$

として，T_{PA} を Peano の算術 (Peano arithmetic) と呼ぶ．T_{PA} は初等的な算術を公理化するものとなっている．

p_1: $x \not\equiv y \rightarrow S(x) \not\equiv S(y)$

p_2: $0 \not\equiv S(x)$

p_3: $x \not\equiv 0 \rightarrow \exists y\,(S(y) \equiv x)$

a_1: $x + 0 \equiv x$

a_2: $x + S(y) \equiv S(x+y)$

m_1: $x \cdot 0 \equiv 0$

m_2: $x \cdot S(y) \equiv (x \cdot y) + x$

T_{PA} の定義の最後にある p_φ は φ の体現する性質に関する帰納法が成り立つことを主張する論理式で，

p_φ: $\varphi(0, \overline{x}) \wedge \forall x\,(\varphi(x, \overline{x}) \rightarrow \varphi(S(x), \overline{x}))\;.\!\!\rightarrow \forall x\,\varphi(x, \overline{x})$

と定義される．$\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, 0^{\mathbb{N}}, +1, +, \cdot \rangle$ は T_{PA} のモデルである．

0 に S を k-回施したものを $S^k(0)$ と書く．つまり $S^k(0) = \underbrace{S(\cdots(S(}_{k\text{ 回}}0\underbrace{))\cdots)}_{k\text{ 回}}$ である．

T_{PA} は一見あまり表現力のない理論のように見えるが，実は，この公理系で，初等的数論のほとんどすべてが展開できる．たとえば， $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ を初等的な関数（多項式関数，べき関数など）とするとき，L_{PA}-論理式 $\varphi_f = \varphi_f(x_0, \ldots, x_k)$ で，すべての $\langle a_0, \ldots, a_{k-1} \rangle \in \mathbb{N}^k$ に対し，

$$f(a_0, \ldots, a_{k-1}) = b \Leftrightarrow T \models \varphi_f(S^{a_0}(0), \ldots, S^{a_{k-1}}(0), b)$$

となるものが存在する．

一方 PA は $\mathit{Th}(\mathfrak{N})$ の公理化ではない，つまり $\mathit{Cn}_{L_{\mathrm{PA}}}(\mathrm{PA}) \subsetneqq \mathit{Th}(\mathfrak{N})$ である．もっと一般的に，T を任意の具体的に書きくだすことのできる理論で，$T \subseteq \mathit{Th}(\mathfrak{N})$ となっているものとするとき，$T \subsetneqq \mathit{Th}(\mathfrak{N})$ である (ゲーデルの不完全性定理による — 第 12 節, 第 15 節 を参照).

ZF

例 3.6 (Zermelo-Fraenkel の集合論) 以下のような集合の理論（この理論を，その初期の定式化を与えた E. Zermelo と A. Fraenkel の頭文字をとって ZF とよ

ぶ[13]）によって与えられる体系の中で，通常の数学すべてが展開できるようになる: $L=\{\varepsilon\}$ とする．ここに ε は 2 変数関係記号である．ZF は

$$\mathrm{ZF}=\{\,\textbf{外延性公理}, \textbf{空集合公理}, \textbf{対の公理}, \textbf{和集の合公理}, \textbf{巾集合公理},\\ \textbf{無限公理}, \textbf{基礎の公理}\,\}\cup\{\,\textbf{分出公理}_\varphi, \textbf{置換公理}_\varphi\ :\ \varphi\in Fml_L\}$$

として与えられる[14]．ここに **外延性公理** ～ **基礎の公理** は以下の (**外延性公理**) ～ (**基礎の公理**) で与えられた L-文である．

外延性公理: $\forall z\,(z\varepsilon x\leftrightarrow z\varepsilon y)\ \rightarrow\ x\equiv y$

空集合公理: $\exists z\forall t\,(t\not\varepsilon z)$

対の公理: $\exists z\forall t\,(t\varepsilon z\ \leftrightarrow\ t\equiv x\vee t\equiv y)$

和集の合公理: $\exists s\forall t\,[t\varepsilon s\ \leftrightarrow\ \exists y\,(y\varepsilon x\ \wedge\ t\varepsilon y)]$

上で，論理式 φ,ψ に対し，$\varphi\leftrightarrow\psi$ は $((\varphi\rightarrow\psi)\wedge(\psi\rightarrow\varphi))$ の略記である．また，$t\not\varepsilon z$ は，$\neg t\varepsilon z$ の略記である．

以下では “$z\subseteq x$” を “$\forall y\,(y\varepsilon z\ \rightarrow\ y\varepsilon x)$” の省略形とする． また，“$x\equiv\emptyset$” は “$\neg\exists u\,(u\varepsilon x)$” のこととする．$\{x\}$, $x\cup y$ 等についても同様に L-論理式で解釈できる（演習）．

巾集合公理: $\exists p\forall t\,[t\varepsilon p\ \leftrightarrow\ t\subseteq x]$

無限公理: $\exists x\,[\exists y\,(y\varepsilon x\wedge y\equiv\emptyset)\ \wedge\ \forall t\,(t\varepsilon x\rightarrow t\cup\{t\}\varepsilon x)]$

基礎の公理: $\forall x\,[x\not\equiv\emptyset\ \rightarrow\ \exists y\,(y\varepsilon x\ \wedge\ \forall z\,(z\varepsilon y\rightarrow z\not\varepsilon x))]$

以下の公理では $\varphi(y,x_1,...,x_n)=\varphi(y,\overline{x})$ を L-論理式とする．

分出公理$_\varphi$: $\exists s\forall t\,[t\varepsilon s\ \leftrightarrow\ t\varepsilon x\wedge\varphi(t,\overline{x})]$

$\varphi(x,y,\overline{x})\in Fml_L$ として，

---

[13] Zermelo や Fraenkel が最初に集合論の公理系を議論した 20 世紀初頭にはまだ述語論理は定式化されておらず，後出の分出公理や置換公理はそこではまだ正しい定式化がなされていなかった．ここでのような厳密な定式化が最初に導入されたのは 1930 年の Skolem の論文のようである．

[14] この公理系の (informal な) 解釈では，変数はすべての集合を走るものと考えている．特に，この理論の対象は集合のみである．また，“$x\varepsilon y$” は “(集合) x は (集合) y の要素である” と読み下されるべき関係として導入されている．この解釈によれば，たとえば，外延性公理は「要素の等しい二つの集合は等しい」という主張となっていることがわかる．ただし，このような記号の「解釈」は，なぜここでのような公理を導入したのかを説明するものであっても，この公理系自身には何等影響を与えるものではないことに注意する．

置換公理$_\varphi$: $\forall x\,[x\varepsilon a \;\rightarrow\; \exists y\,\varphi(x,y,\overline{x})] \;\wedge\; \forall x\forall y\forall y'\,[\varphi(x,y,\overline{x})\wedge\varphi(x,y',\overline{x}) \;\rightarrow\; y\equiv y']$
$$\rightarrow\; \exists b\forall y\,[y\varepsilon b \;\leftrightarrow\; \exists x\,(x\varepsilon a\wedge\varphi(x,y,\overline{x}))].$$

近代的な数学では，上で述べた公理の他に選択公理と呼ばれる集合論の公理が必要になることが多い．たとえば任意の線型空間に基底が存在することを証明するためには，この選択公理が必要である．

ZF 自身が集合の全体の理論となっているため，理論のモデルを考えているときには，実際には，集合論の中で議論していることになる．このことから，ZF のモデルが何になるかを考えることにすると，色々とやっかいな問題が起ることになるのだが，ここではそれについての議論には立ち入らないことにする．

参考文献

[1] A. Tarski, What is elementary geometry?, Proceedings of an International Symposium held at the Univ. of Calif., Berkeley, Dec. 26, 1957–Jan. 4, 1958, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Amsterdam, North-Holland (1959), 16–29.

[2] K. Kunen, Set-theory, North-Holland (1983).

4 述語論理に関する補足

addendum

4.1 論理式の構文の一意性

unambiguity

以下の補題の証明は省略するが，この証明は，きちんとやろうとすると，結構厄介なものになる．(2.8) で導入された $(\varphi\wedge\psi)$ などでの括弧がこの補題の成立に寄与していることに注意する．

unambiguous

補題 4.1 L をある言語として，φ を L-論理式とする．

(1) φ がある L-論理式 φ_0, φ_1, φ'_0, φ'_1 により $\varphi=(\varphi_0\wedge\varphi_1)$, また，$\varphi=(\varphi'_0\wedge\varphi'_1)$ と表わされるなら，$\varphi_0=\varphi'_0$, $\varphi_1=\varphi'_1$ である．

(2) φ がある L-論理式 φ_0, φ_1, φ'_0, φ'_1 により $\varphi=(\varphi_0\vee\varphi_1)$, また，$\varphi=(\varphi'_0\vee\varphi'_1)$ と表わされるなら，$\varphi_0=\varphi'_0$, $\varphi_1=\varphi'_1$ である．

(3) φ がある L-論理式 $\varphi_0, \varphi_1, \varphi'_0, \varphi'_1$ により $\varphi = (\varphi_0 \to \varphi_1)$, また，$\varphi = (\varphi'_0 \to \varphi'_1)$ と表わされるなら，$\varphi_0 = \varphi'_0$, $\varphi_1 = \varphi'_1$ である．

4.2　論理記号と量化子の節約，括弧の省略

minimal-setting

L をある言語として，φ と ψ を L-論理式とするとき，$\varphi \models\!\!\!\dashv \psi$ で，すべての L 構造 $\mathfrak{A}$ と Var の $\mathfrak{A}$ での解釈 I に対し，$(\mathfrak{A}, I) \models \varphi \Leftrightarrow (\mathfrak{A}, I) \models \psi$ が成り立つこととする．$\varphi \models\!\!\!\dashv \psi$ のとき，φ と ψ は意味論的同値であると言うことにする．φ と ψ が意味論的同値であることは，すべての L 構造 $\mathfrak{A}$ と Var の $\mathfrak{A}$ での解釈 I に対し，$(\mathfrak{A}, I) \models \varphi \leftrightarrow \psi$ となることと同値である（演習）．

$\varphi \models\!\!\!\dashv \psi$ なら，φ と ψ は (構造での解釈に関して) 同一視できるものになっている，と考えてよい．$\models\!\!\!\dashv$ は Fml_L 上の同値関係となっていることは容易に確かめられる:

演習問題 4.1 L を任意の言語として，φ, ψ, η を L-論理式とするとき，次が成り立つ．

(1) $\varphi \models\!\!\!\dashv \varphi$;

(2) $\varphi \models\!\!\!\dashv \psi$ なら $\psi \models\!\!\!\dashv \varphi$ が成り立つ;

(3) $\varphi \models\!\!\!\dashv \psi$ かつ $\psi \models\!\!\!\dashv \eta$ なら，$\varphi \models\!\!\!\dashv \eta$ が成り立つ．

以下は L 構造での論理式の解釈 (2.11) 〜 (2.14) から直ちに導ける:

abbrev-0

定理 4.2 L を任意の言語として，φ と ψ を L-論理式とする．このとき，

(1) $(\varphi \wedge \psi) \models\!\!\!\dashv \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$;

(2) $(\varphi \to \psi) \models\!\!\!\dashv \neg(\varphi \wedge \neg\psi)$;

(3) $\exists x \varphi \models\!\!\!\dashv \neg\forall x \neg\varphi$.

L を任意の言語とするとき，$\Phi : Fml_L \to Fml_L$ を論理式の構成に関する帰納法により，以下のように定義することにする:

(4.1)　φ が原始論理式なら，$\Phi(\varphi) = \varphi$;　fml-9

(4.2a)　φ が $\neg\psi$ の形をしているとき，$\Phi(\varphi) = \neg\Phi(\psi)$;　fml-10

(4.2b)　φ が $\varphi_0 \wedge \varphi_1$ の形をしているとき，$\Phi(\varphi) = \neg(\neg\Phi(\varphi_0) \vee \neg\Phi(\varphi_1))$;

(4.2c)　φ が $\varphi_0 \vee \varphi_1$ の形をしているとき，$\Phi(\varphi) = (\Phi(\varphi_0) \vee \Phi(\varphi_1))$;

(4.3a) φ が $\forall x\psi$ の形をしているとき，$\Phi(\varphi) = \forall x\Phi(\psi)$; fml-11

(4.3b) φ が $\exists x\psi$ の形をしているとき，$\Phi(\varphi) = \neg\forall x\neg\Phi(\psi)$.

上の定義から，すべての論理式 φ に対し，$\Phi(\varphi)$ に現れる論理記号と量化子は $\neg$, $\vee$, $\forall$ のみとなっていることに注意する．

abbrev-1

系 4.3 言語 L に対して，$\Phi : \mathit{Fml}_L \to \mathit{Fml}_L$ を上のように定義するとき，すべての L-論理式 φ に対し，$\varphi \models\!\!\!\!\dashv \Phi(\varphi)$ が成り立つ．

上の系から，論理記号と量化子として $\neg$, $\vee$, $\forall$ を用意しておけば，任意の $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\to$, $\forall$, $\exists$ を用いて表現できる論理式 φ に対し，それと意味論的同値な論理式で $\neg$, $\vee$, $\forall$ のみを用いたもの $\Psi(\varphi)$ が得られることがわかる．同様のことは，たとえば，記号のセット $\neg$, $\to$, $\forall$ や $\neg$, $\wedge$, $\exists$ に対しても言える．しかし，たとえば，$\wedge$, $\vee$, $\forall$ や $\wedge$, $\vee$, $\exists$ ではすべての論理式を表現できないことが証明できる．

and-and

定理 4.4 L を任意の言語として，φ, ψ, η を L-論理式とするとき，次が成り立つ:

(1) $((\varphi \wedge \psi) \wedge \eta) \models\!\!\!\!\dashv (\varphi \wedge (\psi \wedge \eta))$;

(2) $((\varphi \vee \psi) \vee \eta) \models\!\!\!\!\dashv (\varphi \vee (\psi \vee \eta))$.

証明． 演習． （証明終）

定理 4.4 により，論理式 $((\varphi\wedge\psi)\wedge\eta)$ と $(\varphi\wedge(\psi\wedge\eta))$ は同一視してよいから，曖昧さが生じないときには，可読性のため，これら（のどちらか）を，括弧を省略して $(\varphi \wedge \psi \wedge \eta)$ とも書くことにする．より一般的には，任意の個数の論理式 $\varphi_0,\ldots,$ φ_{n-1} に対して，それらを $\wedge$ で繋いだものを $\varphi_0 \wedge \cdots \wedge \varphi_{n-1}$ と書いたり，$\bigwedge_{i<n}\varphi_i$, $\bigwedge\{\varphi_i : i < n\}$ などと書いたりする（この書き方は既に 第 3 節 で用いた）．

$\vee$ や $\bigvee$ についても同様とする．

定理 4.4 と同様の主張は $\to$ に対しては成り立たない:

補題 4.5 φ, ψ, η を論理式とするとき，$((\varphi \to \psi) \to \eta) \models\!\!\!\!\dashv (\varphi \to (\psi \to \eta))$ は一般には成り立たない．

証明． 演習． （証明終）

4.3 部分論理式と自由変数

subformula

「部分論理式」,「束縛変数」,「自由変数」など，直観的な定義しか与えていなかった概念に対し，再帰的定義による厳密な導入の仕方を見ておくことにする．こ

れらの定義が前に与えた直観的な定義に対応するものになっていることの確認／証明は読者の演習とする．

L を言語として，L-論理式 φ の部分論理式の全体 $SubFml(\varphi)$ を，次のように定義する．ただし，ここでは φ は φ 自身の部分論理式の一つと考えている．

(4.4) ある L-項 t_1, t_2 に対し，φ が $t_1 \equiv t_2$ の形をしているとき，$SubFml(\varphi) = \{\varphi\}$ とする; subfml-1

(4.5) ある L-項 $t_1,..., t_n$ と L の n-変数関係記号 r に対して φ が $r(t_1, ..., t_n)$ の形をしているとき，$SubFml(\varphi) = \{\varphi\}$ とする; subfml-2

(4.6) ある L-論理式 φ_1, φ_2 に対し，$SubFml(\varphi_1), SubFml(\varphi_2)$ がすでに定まっていて， subfml-3

(a) φ が $\neg\varphi_1$ のとき， $SubFml(\varphi) = SubFml(\varphi_1) \cup \{\varphi\}$ とする;

(b) φ が $\varphi_1 \land \varphi_2, \varphi_1 \lor \varphi_2, \varphi \to \varphi_2$ のいずれかのとき，$SubFml(\varphi) = SubFml(\varphi_1) \cup SubFml(\varphi_2) \cup \{\varphi\}$ とする;

(4.7) ある L-論理式 ψ に対し，$SubFml(\psi)$, がすでに定まっていて，φ が $\forall x\psi$ または $\exists x\psi$ のとき，$SubFml(\varphi) = SubFml(\psi) \cup \{\varphi\}$ とする． subfml-4

ここで，L-論理式 φ, ψ に対し，ψ が φ の部分論理式 (subformula) であるとは，$\psi \in SubFml(\varphi)$ となること，と定義する．

L-項 t や L-論理式 φ に対し，それらの自由変数の全体 $freeVar(t), freeVar(\varphi)$ を次のように定義する．

まず，L-項 t に対する，$freeVar(t)$ を次のように再帰的に定義する:

(4.8a) t が定数記号なら，$freeVar(t) = \emptyset$ とする; freevar-0

(4.8b) t が変数記号 $x \in Var$ なら，$freeVar(t) = \{x\}$ とする;

(4.9) L-項 $t_1,...,t_n$ と L の n-変数関数記号 f に対し，$t = f(t_1, ..., t_n)$ で，$freeVar(t_1),..., freeVar(t_n)$ はすでに定まっているとき，$freeVar(t) = freeVar(t_1) \cup \cdots \cup freeVar(t_n)$ とする． freevar-1

ここで，L-項 t に対し，$freeVar(t) \subseteq \{x_1, ..., x_n\}$ となることを，$t = t(x_1, ..., x_n)$ と表す．

次に，L-論理式 φ に対して，$freeVar(\varphi)$ を次のように再帰的に定義する:

(4.10) ある L-項 t_1, t_2 に対し，φ が $t_1 \equiv t_2$ の形をしているとき，$freeVar(\varphi) = freeVar(t_1) \cup freeVar(t_2)$ とする; freeVar-1

(4.11) ある L-項 $t_1, ..., t_n$ と L の n-変数関係記号 r に対して φ が $r(t_1, ..., t_n)$ の形をしているとき，$freeVar(\varphi) = freeVar(t_1) \cup \cdots \cup freeVar(t_n)$ とする; freeVar-2

(4.12) ある L-論理式 φ_1, φ_2 に対し，$freeVar(\varphi_1)$, $freeVar(\varphi_2)$ がすでに定まっていて， freeVar-3

(a) φ が $\neg\varphi_1$ のとき， $freeVar(\varphi) = freeVar(\varphi_1)$ とする;

(b) φ が $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$, $(\varphi \to \varphi_2)$ のいずれかのとき，$freeVar(\varphi) = freeVar(\varphi_1) \cup freeVar(\varphi_2)$ とする;

(4.13) ある L-論理式 ψ に対し，$freeVar(\psi)$, がすでに定まっていて，φ が $\forall x\psi$ または $\exists x\psi$ のとき，$freeVar(\varphi) = freeVar(\psi) \setminus \{x\}$ とする． freeVar-4

L-論理式 φ に対し，$freeVar(\varphi) \subseteq \{x_1, ..., x_n\}$ となることを，$\varphi = \varphi(x_1, ..., x_n)$ とあらわすことにする．L-論理式 φ が L-文であるとは，$freeVar(\varphi) = \emptyset$ となることである．

4.4 冠頭標準形

normal-form

5 命題論理

sentential-logic

命題論理 (propositional logic) とは，以下のようにして導入される記号列の体系である．

まず使われる記号として，次のものを用意しておく:

(5.1) 命題変数: ‘A_1’, ‘A_2’, . . . , ‘B_1, ‘B_2’, . . . , etc.

(5.2) 論理記号: ‘$\wedge$’, ‘$\vee$’, ‘$\neg$’, ‘$\to$’

(5.3) 補助記号: ‘(’, ‘)’

以上のような記号の有限列の全体の部分集合として，命題論理の論理式の全体を，次のように再帰的に定義する．

(5.4) 命題変数は命題論理の論理式である;

(5.5)　φ, ψ が命題論理の論理式なら，$(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $\neg\varphi$, $(\varphi \to \psi)$ も命題論理の論理式である;

(5.6)　以上のみ．

命題論理の論理式 φ に現われる命題変数がすべて命題変数のリスト $A_1,\ldots,A_n$ に含まれるとき，$\varphi = \varphi(A_1, \ldots, A_n)$ と書くことにする．ただし，ここでは，$A_1,\ldots,A_n$ は互いに異る命題変数になっていて重複はないものと常に仮定することにする．

$\mathbb{2} = \{0, 1\}$ とする．ここでの 1 と 0 はそれぞれ "真"(true) と " 偽"(false) あるいは（電気回路などの） "on" と "off" などと解釈できる．f がブール関数とは，ある n に対して，$f : \mathbb{2}^n \to \mathbb{2}$ となること，つまり f は $\mathbb{2}$ から $\mathbb{2}$ への n 変数関数となっていること，とする．ただし，$\mathbb{2}^n = \{\langle i_1, \ldots, i_n\rangle : i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{2}\}$ である．

命題論理の論理式 $\varphi = \varphi(A_1, \ldots, A_n)$ に対し，この解釈 $f_{\varphi(A_1,\ldots,A_n)} : \mathbb{2}^n \to \mathbb{2}$ を再帰的に定義する:

(5.7)　φ が A_i $(1 \leq i \leq n)$ なら，$p_1,\ldots,p_n \in \mathbb{2}$ に対し，$f_{\varphi(A_1,\ldots,A_n)}(p_1, \ldots, p_n) = p_i$ とする;

(5.8) a-0

(a)　φ が $(\psi_0 \wedge \psi_1)$ なら，$p_1,\ldots,p_n \in \mathbb{2}$ に対し，

$$f_{\varphi(A_1,\ldots,A_n)}(p_i, \ldots, p_n) = \begin{cases} 1, & f_{\psi_0(A_1,\ldots,A_n)}(p_1, \ldots, p_n) = 1 \text{ かつ} \\ & f_{\psi_1(A_1,\ldots,A_n)}(p_1, \ldots, p_n) = 1 \text{ のとき;} \\ 0, & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

とする;

(b)　φ が $(\psi_0 \vee \psi_1)$ なら，$p_1,\ldots,p_n \in \mathbb{2}$ に対し，

$$f_{\varphi(A_1,\ldots,A_n)}(p_1, \ldots, p_n) = \begin{cases} 1, & f_{\psi_0(A_1,\ldots,A_n)}(p_1, \ldots, p_n) = 1 \text{ または} \\ & f_{\psi_1(A_1,\ldots,A_n)}(p_1, \ldots, p_n) = 1 \text{ のとき;} \\ 0, & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

とする;

(c)　φ が $\neg\psi_0$ なら，$p_1,\ldots,p_n \in \mathbb{2}$ に対し，

$$f_{\varphi(A_1,\ldots,A_n)}(p_1, \ldots, p_n) = \begin{cases} 1, & f_{\psi_0(A_1,\ldots,A_n)}(p_1, \ldots, p_n) = 0 \text{ のとき} \\ 0, & \text{そうでないとき;} \end{cases}$$

とする;

(d) φ が $(\psi_0 \rightarrow \psi_1)$ なら，$p_1,\ldots,p_n \in \mathbb{2}$ に対し，

$$f_{\varphi(A_1,\ldots,A_n)}(p_1,\ldots,p_n) = \begin{cases} 1, & f_{\psi_0(A_1,\ldots,A_n)}(p_1,\ldots,p_n) = 0 \text{ または} \\ & f_{\psi_1(A_1,\ldots,A_n)}(p_1,\ldots,p_n) = 1 \text{ のとき;} \\ & \\ 0, & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

とする．

上の定義は，$A_1,\ldots,A_n$ の選択に関して整合性のとれたものになっている．たとえば，$\varphi = \varphi(A_3, A_1)$ なら，φ は $\varphi = \varphi(A_1, A_2, A_3)$ と見ることもできるが，このとき，任意の $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{2}$ に対し，

$$f_{\varphi(A_1,A_2,A_3)}(p_1,p_2,p_3) = f_{\varphi(A_3,A_1)}(p_3,p_1)$$

が成り立つ．より一般的には，

補題 5.1 $k \leq n$ として， $1 \leq i_1,\ldots,i_k \leq n$ を互いに異るものとする．このとき， prop-l-0
命題論理の論理式 $\varphi = \varphi(A_{i_1},\ldots,A_{i_k})$ に対し，φ は，$\varphi = \varphi(A_1,\ldots,A_n)$ と見ることもできるが，任意の $p_1,\ldots,p_n \in \mathbb{2}$ に対し，

$$f_{\varphi(A_1,\ldots,A_n)}(p_1,\ldots,p_n) = f_{\varphi(A_{i_1},\ldots,A_{i_k})}(p_{i_1},\ldots,p_{i_k})$$

が成り立つ．

証明． φ の構成に関する帰納法による． （証明終）

上で，命題論理の論理式をブール関数に解釈する仕方を与えたが，実はすべてのブール関数は，命題論理の，ある論理式の解釈として表現できる．命題論理の $\neg$, $\wedge$, $\vee$ の組合せによる論理式の全体はこの意味で完全なものになっている (6.1 を参照)．

I が（命題変数の）解釈であるとは，PropVar を命題変数の全体からなる集合として，$I : \mathsf{PropVar} \rightarrow \mathbb{2}$ となることとする．命題変数の解釈 I は 各命題変数 A に真偽値 $I(A)$ を付値するものとなっている．

命題変数の解釈 I と命題論理の論理式 $\varphi = \varphi(A_1,\ldots,A_n)$ に対し，

$$I \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad f_{\varphi(A_1,\ldots,A_n)}(I(A_1),\ldots,I(A_n)) = 1$$

とする．“$I \models \varphi$” は，I は φ のモデルである，あるいは I は φ を実現する，などと読み下される．補題 5.1 により，この定義は，$A_1,\ldots,A_n$ の選び方の冗長性から影響を受けない．

$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \text{すべての命題変数の解釈 } I \text{ に対し，} \quad I \models \varphi$$

とする．$\models \varphi$ のとき φ は恒真 (universally valid) である，あるいは，φ はトートロジー (tautology) であるという．

prop-l-1

補題 5.2 $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ を命題論理の論理式とする．また，L を任意の言語として $\varphi_1 = \varphi_1(x_1 \ldots x_m),\ldots,\varphi_n = \varphi_n(x_1, \ldots, x_m)$ を L-論理式とする．$\mathfrak{A} = \langle A, \ldots\rangle$ を L-構造として，$a_1,\ldots,a_m \in A$ とする．このとき，$0 < k < n$ に対し，

$$i_k = \begin{cases} 1, & \mathfrak{A} \models \varphi_k(a_1, \ldots, a_m) \text{ のとき} \\ 0, & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

とすると，

$$\mathfrak{A} \models \varphi(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(a_1, \ldots, a_m) \quad \Leftrightarrow \quad f_{\varphi(x_1,\ldots,x_n)}(i_1, \ldots, i_n) = 1$$

prop-l-2

系 5.3 $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ を命題論理の論理式でトートロジーであるとする．L を任意の言語として， $\varphi_1 = \varphi_1(x_1 \ldots x_m),\ldots,\varphi_n = \varphi_n(x_1, \ldots, x_m)$ を L-論理式とするとき，任意の L-構造 $\mathfrak{A}$ に対し，

$$\mathfrak{A} \models \forall x_1 \cdots \forall x_m \varphi(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$$

が成り立つ．

$\varphi = \varphi(A_1, \ldots, A_n)$ と $\psi = \psi(A_1, \ldots, A_n)$ を命題論理の論理式とするとき，$\varphi \models\!\!\!\!\dashv \psi$ (φ と φ は functionally equivalent) を，$f_{\varphi(A_1,\ldots,A_n)} = f_{\psi(A_1,\ldots,A_n)}$ となることとする．命題論理の L-論理式 φ, ψ に対しては，$\varphi \models\!\!\!\!\dashv \psi$ がすべての L-構造 $\mathfrak{A}$ に対し $\mathfrak{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \psi$ となることとして定義されていた (4.2 を参照).

系 5.4 $\varphi = \varphi(A_1, \ldots, A_n)$ と $\psi = \psi(A_1, \ldots, A_n)$ を命題論理の論理式とする．このとき，$\varphi \models\!\!\!\!\dashv \psi$ なら，任意の言語 L と $\eta_1,\ldots,\eta_n \in Fml_L$ に対し，$\varphi(\eta_1, \ldots, \eta_n) \models\!\!\!\!\dashv \psi(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ である．

補題 5.2 の証明． φ の構成に関する帰納法による． **(証明終)**

系 5.3 のような $\varphi(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ を，Fml_L の命題論理によるトートロジーと呼ぶ．

命題論理の論理式 φ が与えられたとき，φ がトートロジーであるかどうかは決定可能である．$\varphi = \varphi(A_1, \ldots, A_n)$ のとき，2^n 個ある $p \in \mathbb{2}^n$ すべてに対して $f_{\varphi(A_1,\ldots,A_n)}(p) = 1$ となるかどうかを計算して確かめればよいからである．

$\psi \in Fml_L$ が与えられたとき，これが命題論理によるトートロジーであるかどうかも決定可能である．命題論理の論理式 φ と $\varphi_1,\ldots,\varphi_n \in Fml_L$ で，$\psi = \varphi(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ となるような組合せは高々有限個だから，それらのどれかで φ がトートロジーとなるかどうかを判定すればよいからである．

6 命題論理に関する補足

sentential-logic-a

6.1 真偽表と関数的完全性

functional-completeness

すべてのブール関数はその真偽表によって表現できる．たとえば φ を $((A_1 \wedge A_2) \vee A_3)$ として，ブール関数 $f_{\varphi(A_1,A_2,A_3)} : \mathbb{2}^3 \to \mathbb{2}$ は，

A_1	A_2	A_3	$(A_1 \wedge A_2)$	$((A_1 \wedge A_2) \vee A_3)$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

として表わせる．上の例では，まず，$((A_1 \wedge A_2) \vee A_3)$ の部分論理式 $(A_1 \wedge A_2)$ に対応するブール関数の真偽表を作成して，それをもとに $((A_1 \wedge A_2) \vee A_3)$ の真偽表を求めている．

任意の命題論理の論理式 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ に対し，$(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \mathrel{|\!\!=\!\!|} (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ で，$((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3) \mathrel{|\!\!=\!\!|} (\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \wedge \varphi_3))$ である．同様の functionally equivalence は $\vee$ に対しても成り立つ (演習)． 特に，

(6.1) $((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3)$ を $(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3)$ あるいは，$\bigwedge_{i\in\{1,2,3\}}\varphi_i$，$\bigwedge\{\varphi_i : i \in \{1, 2, 3\}\}$ などと略記 b-a

しても，同じブール関数を持つ論理式を本質的に同じものと看做す観点からは，問題が生じない．同様の略記は $\vee$ についても用いることにする．

$\bar{t} \in \mathbb{2}^n$ に対し，$\varphi_{\bar{t}}(A_1, ..., A_n)$ で，論理式 $\bigwedge_{0<i\leq n} \varphi_{\bar{t},i}$ をあらわすことにする．ただし，

$$\varphi_{\bar{t},i} = \begin{cases} A_i & \bar{t} \text{ の } i \text{ 番目の entry が } 1 \text{ のとき} \\ \neg A_i & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

とする．$f_{\varphi_{\bar{t}}(A_1,...,A_n)}$ は，$f_{\varphi_{\bar{t}}(A_1,...,A_n)}(\bar{s}) = 1 \Leftrightarrow \bar{s} = \bar{t}$ となる関数である．

$f : \mathbb{2}^n \to \mathbb{2}$ を任意の関数とするとき，$\varphi_f = \varphi_f(A_1, ..., A_n)$ を

$$\bigvee\{\varphi_{\bar{t}} : \bar{t} \in \mathbb{2}^n,\ f(\bar{t}) = 1\}$$

とする．ただし，f が値 0 のみをとる定数関数のときには，φ_f は $A_1 \wedge \neg A_1$ とする．このとき，$f = f_{\varphi_f(A_1,...,A_n)}$ が成り立つ (演習)．

以上から次が成り立つことが示せたことになる:

func-comp-1

定理 6.1 すべてのブール関数 $f : \mathbb{2}^n \to \mathbb{2}$ に対し，$\neg, \wedge, \vee$ のみを論理記号として含む論理式 $\varphi = \varphi(A_1, ..., A_n)$ で， $f = f_{\varphi(A_1,...,A_n)}$ となるものが存在する．

上の定理の状況を，$\{\neg, \wedge, \vee\}$ は関数的完全 (functionally complete) である，とも表現する．任意の論理式 φ, ψ に対し，$(\varphi \wedge \psi) \models\!\!\!\dashv \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$ と， $(\varphi \vee \psi) \models\!\!\!\dashv \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ が成り立つ (演習)．したがって，$\wedge$ は $\neg$ と $\vee$ の組合せで置き換えることができ，$\vee$ も $\neg$ と $\vee$ の組合せで置き換えることができる．このことと定理 6.1 から，

系 6.2 $\{\neg, \vee\}$ は関数的完全である． $\{\neg, \wedge\}$ も関数的完全である．

が分る．一方 $(\varphi \vee \psi) \models\!\!\!\dashv (\neg\varphi \to \phi)$ だから (演習)，

系 6.3 $\{\neg, \to\}$ は関数的完全である．

一方，$\{\wedge, \vee, \to\}$ は関数的完全でない．論理式の構成に関する帰納法により，$\wedge, \vee, \to$ の組合せのみで得られる任意の論理式 $\varphi = \varphi(A_1, ..., A_n)$ に対し，

$$f_{\varphi(A_1,...,A_n)}(1, 1, ..., 1) = 1$$

が成り立つことが証明できる (ここに “$1, 1, ..., 1$” は 1 だけを n 個並べたものである)．つまりこの性質を持たないブール関数は，$\wedge$, $\vee$, $\to$ だけの組合せでは表現できない．

6.2 命題論理のコンパクト性定理

sentential-compactness

T を命題論理の論理式の集合とするとき，T が充足可能 (satisfiable) とは，解釈 $I : \mathsf{PropVar} \to \mathbb{2}$ で，すべての $\varphi \in T$ に対し， $I \models \varphi$ となることとする．T が有限充足可能 (finitely satisfiable) とは，T のすべての有限な部分集合 $T' \subseteq T$ が充足可能となることとする．T が充足可能なら有限充足可能である．実は，この逆も成り立つ (命題論理のコンパクト性) ことを以下で示す．

comp-1

補題 6.4 T を命題論理の論理式の集合として，φ を命題論理の論理式とする．T が有限充足可能なら，$T \cup \{\varphi\}$ か $T \cup \{\neg\varphi\}$ の少なくともどちらかは有限充足可能である．

証明． 背理法で証明する．今 T が有限充足可能だが，$T \cup \{\varphi\}$ も $T \cup \{\neg\varphi\}$ も有限充足可能でないとすると，T の有限部分集合 $T', T'' \subseteq T$ で，$T' \cup \{\varphi\}$ も $T'' \cup \{\neg\varphi\}$ も充足可能でないようなものが存在する．このとき，$T' \cup T''$ は T の有限部分集合となるから，解釈 $I : \mathsf{PropVar} \to \mathbb{2}$ で $I \models T' \cup T''$ となるものが存在する．もし $I \models \varphi$ なら，I は $T' \cup \{\varphi\}$ のモデルになるから，$T' \cup \{\varphi\}$ が充足可能でないことに矛盾である．もし $I \models \varphi$ でないなら，(5.8), (c) により $I \models \neg\varphi$ だが，このときは $I \models T'' \cup \{\neg\varphi\}$ となるから $T'' \cup \{\neg\varphi\}$ が充足可能でないことに矛盾である．

（証明終）

comp-2

定理 6.5 (命題論理のコンパクト性定理) 任意の命題論理の論理式の集合 T に対し，T が有限充足可能なら，T は充足可能である．

証明． PropVar が可算な場合のみ証明する，それ以外の場合は，選択公理を用いて以下の証明と同様の証明を超限帰納法を用いて行なえばよい[15)]．PropVar の要素を $A_1, A_2, A_3, \ldots$ と枚挙しておく (PropVar の可算性の仮定からこれは可能である)．ここで，有限充足可能な論理式の集合の $\subseteq$ に関する上昇列 T_n, $n \in \mathbb{N}$ を，

(6.2) $\quad T_0 = T;$ a-1

15) 実際には，この定理の証明にはフルパワーの選択公理は必要とならず，素イデアル定理 (Prime Ideal Theorem) と呼ばれる主張を仮定すればいいことが判っている．実は，選択公理を除いた集合論の公理系 (ZF) の上で，命題論理のコンパクト性定理の一般形は素イデアル定理と同値になる．以下の証明でも分るように，T が可算の場合 (これは PropVar が可算と言っても同じである) には — あるいはもう少し一般的には PropVar が整列可能な場合には，(ZF 上では) コンパクト性の証明には，選択公理やその弱い形のものは全くいらない．ただし，逆数学で考察される一番弱い 2 階算術の体系上では，(可算な PropVar に対する) この定理は (定式化はできるが) 証明はできず，証

(6.3) $T_n \cup \{A_{n+1}\}$ が有限充足可能なら，$T_{n+1} = T_n \cup \{A_{n+1}\}$ とし，そうでない なら，$T_{n+1} = T_n \cup \{\neg A_{n+1}\}$ とする． a-2

このとき，補題 6.4 により，各 T_n は有限充足可能である．ここで，

$$T^* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n$$

とする．

Claim 6.5.1 T^* は有限充足可能である．

$\vdash$ $T' \subseteq T^*$ を有限とすると，十分に大きな $n \in \mathbb{N}$ に対し，$T' \subseteq T_n$ とできる．T_n は有限充足可能だから，特に T' は充足可能である． $\dashv$

Claim 6.5.2 すべての $n \in \mathbb{N}$ に対し，$A_{n+1} \in T^*$ か $\neg A_{n+1} \in T^*$ のどちらか片方が成り立つ．

$\vdash$ $A_{n+1} \notin T$ なら，$A_{n+1} \notin T_{n+1}$ だから，(6.3) により，$\neg A_{n+1} \in T_{n+1} \subseteq T^*$ である．もし，$A_{n+1}, \neg A_{n+1} \in T^*$ とすると，十分に大きな m に対し，$A_{n+1}, \neg A_{n+1} \in T_m$ となるが，$\{A_{n+1}, \neg A_{n+1}\}$ は充足可能でないから，T_m が有限充足可能であることに矛盾である． $\dashv$

$I^* : \mathsf{PropVar} \to \mathbb{2}$ を，

$$I^*(A_{n+1}) = \begin{cases} 1, & A_{n+1} \in T^* \text{ のとき} \\ 0, & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

とする．このとき以下により I^* は T のモデルとなっていることが分り証明が完了する．

Claim 6.5.3 すべての $\varphi \in T$ に対し，$I^* \models \varphi$ である．

$\vdash$ n を十分に大きくとって，φ に現れる命題変数はすべて $A_1, A_2, ..., A_n$ のどれかとなっているようにする．φ_i, $i = 1, 2, ..., n$ を，

$$\varphi_i = \begin{cases} A_i, & A_i \in T^* \text{ のとき} \\ \neg A_i, & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

明には，Weak König's Lemma と呼ばれる公理の付加が必要になることが知られている．

とすると，$\{\varphi, \varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ は T^* の有限部分集合だから，$I \models \{\varphi, \varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ となる解釈 I が存在する．$\varphi_1, ..., \varphi_n$ のとり方から，すべての $i = 1, ..., n$ に対し，$I(A_i) = 1 \Leftrightarrow A_i \in T^* \Leftrightarrow I^*(A_i) = 1$ となり，$I \restriction \{A_1, ..., A_n\} = I^* \restriction \{A_1, ..., A_n\}$ がわかるが，$I \models \varphi$ だから，補題 5.1 により，$I^* \models \varphi$ である． $\dashv$

（証明終）

6.3 コンパクト性定理の応用

appl-comp-thm

$\langle G, E\rangle$ がグラフであるとは，G は空でない集合で，E は G 上の二項関係で，対称的かつ非反射的なものであることとする．つまり，E は

(対称性) すべての $x, y \in G$ に対して $x\ E\ y \Leftrightarrow y\ E\ x$ が成りたち，

(非反射性) すべての $x \in G$ に対して $x\ E\ x$ でない，

を満たすものとする．G の要素はグラフの頂点の集合と考え，$x\ E\ y$ の関係のある頂点 x, y が辺でつながっている，と考える．E の対称性は，このグラフが無向グラフであることに対応し，非反射性は，1 つの頂点に繋がったループが存在しないことの主張になっていると考えられる．

グラフ $\langle G, E\rangle$ が平面グラフであるとは，このグラフの頂点 (つまり G の要素) が平面上の点で表現でき， これらの点に対応するグラフの頂点が， E で繋がっているという関係が，互いに交差しない平面上の曲線でむすばれている，という関係で表現できることをいう．

グラフ $\langle G, E\rangle$ が有限であるとは G が有限集合であるこという．

グラフ $\langle G, E\rangle$ に対し，写像 $\chi : G \to \{1, 2, ..., n\}$ が G の n 色の色分けである，とは，任意の $x, y \in G$ に対し，$x\ E\ y$ なら，$\chi(x) \not\chi(y)$ となることとする．つまり，このグラフの頂点 n 色での塗り分けで，辺で繋がっているどの 2 頂点も同じ色で塗られていないようなものとする．$\langle G, E\rangle$ が n 色で色分けできる，とは上のような写像 χ が存在することとする．

次の Appel と Haken による定理は，その証明に本質的にコンピュータが用いられた最初の定理として有名である．

定理 6.6 (四色定理) (K. Appel and W. Haken, 1976)

任意の有限な平面グラフは 4 色で色分けできる．

平面上の地図で複数の国が国境で接していたり接していなかったりするという関係は，平面グラフに相互翻訳することができる (平面上の地図に対し，それぞれの国をその国の領土の一点となっている頂点で代表させて,「国境で接している」という関係をグラフの辺が繋がっているという関係で表現するグラフを考える) ので，上の定理は,「すべての地図を[16]，必ず，国境を接する国が違う色になるように 4 色で色分けすることができる」 と言い換えることもできる．

次の定理は四色定理の拡張になっている．グラフ $\langle G', E'\rangle$ がグラフ $\langle G, E\rangle$ の部分グラフであるとは，$G' \subseteq G$ ですべての $x, y \in G'$ について，$x\ E'\ y \Leftrightarrow x\ E\ y$ となることとする．

定理 6.7 任意の (有限でない) グラフ $\langle G, E\rangle$ について，そのすべての有限な部分グラフが平面グラフなら，$\langle G, E\rangle$ は 4 色で色分け可能である．

証明． $\mathsf{PropVar} = \{c_{x,i} : x \in G, i \in \{1, 2, 3, 4\}\}$ とする．ただし，$c_{x,i}$, $x \in G, i \in \{1, 2, 3, 4\}$ は互いに異る記号とする．$c_{x,i}$ は頂点 x が色 i で塗られていることの主張に対応するようなものとしたい．このために，論理式の集合 T を次のように定義する．

$$
\begin{aligned}
(6.4)\qquad T = &\{(c_{x,1} \lor c_{x,2} \lor c_{x,3} \lor c_{x,4}) : x \in G\} \\
&\cup\{c_{x,i} \rightarrow \neg c_{x,j} : x \in G,\ i, j \in \{1, 2, 3, 4\},\ i \neq j\} \\
&\cup\{c_{x,i} \rightarrow \neg c_{y,i} : x, y \in G,\ x\ E\ y,\ i \in \{1, 2, 3, 4\}\}.
\end{aligned}
$$
a-3

上の T の定義で 1 番目の論理式の集合は各頂点が 1, 2, 3, 4 のどれかの色に塗られていることを表現している．2 番目の論理式の集合は，どの頂点も複数の色で塗られていないことをあらわしており，3 番目の論理式の集合は辺でつながった頂点は同じ色で塗られていないことを表現している．

したがって，四色定理から，T は有限充足可能である．コンパクト性定理により，T のモデル I が存在するが，$f : G \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ を，$f(x) = i \Leftrightarrow I(c_{x,i}) = 1$ として定義することができて，このとき f はグラフ $\langle G, E\rangle$ の 4 色の色分けになっている． **(証明終)**

---

[16] ただし，平面グラフと相互翻訳ができる地図は，どの国も飛び地を持っていない (あるいは飛び地は本土と同じ色にぬらなくてもいい) という条件が必要になる．また，2 つの国が一点で接している場合は「国境で接している」とはみなさないことにしないと，平面グラフとの対応ができなくなり，4 色で塗り分けられない反例ができてしまう．

7　形式的証明体系

formal-system-of-proof

既に第3節で定義したように，L を言語として，T を L-理論とし，$\varphi = \varphi(x_1, ..., x_n)$ を L-論理式とするとき，すべての L-構造 $\mathfrak{A}$ で $\mathfrak{A} \models T$ となるものに対し（つまり，すべての T のモデル $\mathfrak{A}$ に対し），$\mathfrak{A} \models \forall x_1 \cdots \forall x_n \varphi$ が成り立ことを，$T \models \varphi$ とあらわすことにし，“φ は T から（意味論的に）帰結される”，と読むことにする．

以下で，論理式 φ がある理論 T から帰結されるかどうかを，L-論理式の組合せ操作だけで判定できるような体系 K を導入することを試みる[17]．より正確には，理論 T が与えられたとき，論理式 φ が T から（体系 K で）導出可能である（これを $T \vdash_K \varphi$ と書くことにする）という関係で次を満たすようなものがあることを示したい:

(7.1)　K は整合的 (correct) である[18]．つまり，$T \vdash_K \varphi$ なら $T \models \varphi$ である．　K-0

(7.2)　K は完全 (complete) である．つまり $T \models \varphi$ なら $T \vdash_K \varphi$ である．　K-1

(7.3)　$T \vdash_K \varphi$ は “φ の T からの証明 P が存在する” という性質により導入されており（このような P に対し，$T \vdash_K^P \varphi$ と書くことにする），T からの証明 P は，論理式の有限列で，ある論理式の有限列 P が T からの φ の証明であるかどうか（つまり $T \vdash_K^P \varphi$ であるかどうか）は（あるアルゴリズムにより）決定可能である．　K-2

このような体系 K が得られれば，$T \models \varphi$ のときには，$T \vdash_K^P \varphi$ となるような証明 P が存在し，しかも P が φ の T からの証明になっていることは（少なくとも原理的には）機械的に検証可能となる．

ここでは体系 K として次のような枠組を考える: K が述語計算の体系であるとは，すべての言語 L に対し，K の L での実現 $\langle \mathbf{A}, \mathbf{R} \rangle = \langle \mathbf{A}_L, \mathbf{R}_L \rangle$ が，(L を固定するごとに L に関して一様に) 定義される．$\mathbf{A}$ は L-論理式の集合（論理的公理の集合）で，$\mathbf{R}$ は，$\langle p, \varphi \rangle$ の形の元からなる集合となるものとする．ただし，p は L-論理式の有限集合で φ は L-論理式である．$\varphi \in \mathbf{A}$ のとき，φ は K の公理であるという．また $p \in \mathbf{R}$ のとき，p は K の推論規則であるという．$\rho = \langle p, \varphi \rangle$ で，$p = \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ のとき，これを

---

[17] K という記号の選び方は，ドイツ語の Kalkül（算術）に由来する．ドイツ語では，このような体系のことを logisches Kalkül（論理算術または論理計算）と呼ぶことにちなむ．

[18] “K は健全 (sound) である，と言うこともある．

$$(\rho) \quad \frac{\varphi_1, \ldots, \varphi_n}{\varphi}$$

とも書く．

K が述語計算の体系で，$\langle \mathbf{A}, \mathbf{R} \rangle$ が言語 L に対する K の実現とするとき，L-論理式の集合 Γ, L-論理式の有限列 P と L-論理式 φ に対し，“$\Gamma \vdash_K^P \varphi$”（$P$ は φ の Γ からの K での証明である）と “$\Gamma \vdash_K \varphi$”（φ は K で Γ から証明可能である）を次のようにして導入する:

L-論理式の列 $P = \langle \varphi_1, \ldots, \varphi_n \rangle$ が φ の Γ からの K での証明である，とは次の (7.4) と (7.5) が成り立つこととする:

(7.4) $\varphi_n = \varphi$; K-3

(7.5) すべての $1 \leq i \leq n$ に対し，次のいずれかが成り立つ: K-4

(a) $\varphi_i \in \mathbf{A} \cup \Gamma$ または，

(b) $(p, \psi) \in \mathbf{R}$ が存在して，$p \subseteq \{\varphi_1, \ldots, \varphi_{i-1}\}$ かつ $\varphi_i = \psi$.

P が φ の Γ からの K での証明である，ということを $\Gamma \vdash_K^P \varphi$ と書くことにする．また $\Gamma \vdash_K \varphi$ とは．φ の Γ からの K での証明が存在すること，つまり $\Gamma \vdash_K^P \varphi$ となる証明 P が存在すること，とする．また，$\Gamma \vdash_K^P \varphi$ となるような，長さが n の証明 P が存在することを，$\Gamma \vdash_K^n \varphi$ と書くことにする．具体的に K が与えられたときに，$\vdash_K^n$ に対しての，n に関する帰納法，つまり証明 P の長さに関する帰納法は，$\vdash_K$ の性質を示すときの強力な（というより，むしろ，ほとんど唯一の）手段となる．

$\Gamma \vdash_K^P \varphi, \Gamma \vdash_K \varphi, \ldots$ で Γ が空集合のときには，$\vdash_K^P \varphi, \vdash_K \varphi, \ldots$ と書くことにする．また，$\Gamma \vdash_K^P \varphi, \Gamma \vdash_K \varphi, \ldots$ が，言語 L を固定してそこで考えているものであることを強調する必要があるときには，$\Gamma \vdash_K^{P,L} \varphi, \Gamma \vdash_K^L \varphi, \ldots$ などと書くことにする．

(7.3) は，言語 L に対し，L-論理式や L の論理式の有限集合と L-論理式の組が，$\mathbf{A}$ や $\mathbf{R}$ の要素となるかどうかを決定するアルゴリズムが存在すれば成り立つことは明らかである．

K と K' が共に (7.1), (7.2), を満たすような体系だとすると，すべての言語 L と L-理論 Γ と L-論理式 φ に対し，$\Gamma \vdash_K \varphi \Leftrightarrow \Gamma \models \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vdash_{K'} \varphi$ となるから，証明可能性に関して K と K' は同値になる．現在では，(7.1), (7.2), (7.3) を満たすような体系 K はいくつも知られているが，それらはすべて，この意味で同値な体系となっている．

以下で，体系 K^* を導入して，この体系が (7.1), (7.2), (7.3) を満たすことを示す．

論理式 $\varphi_1,\ldots,\varphi_k,\ \varphi$ に対し，

$$\varphi_1 \to \cdots \to \varphi_k \to \varphi$$

は，$(\varphi_1 \to (\varphi_2 \to (\cdots(\varphi_{k-1} \to (\varphi_k \to \varphi))\cdots)))$ の略記のことと考える．また，この記法の延長で，$(\varphi \to \psi)$ の形の論理式では，混乱が生じないときには，一番外側の括弧を省略して $\varphi \to \psi$ と書くことにする．

また，論理式の定義 (2.9) では $\forall$ と $\exists$ を 2 つの独立した量化子として扱っていたが，$\mathfrak{A} \models \forall x\varphi$ は $\mathfrak{A} \models \neg\exists x\neg\varphi$ と同値になるような解釈がされていた（定理 4.2, 系 4.3 を参照）．そこで，以下では，思考経済のため，論理式の定義の際に (2.9) では φ に対して $\exists x\varphi$ のみが論理式として導入されていて，$\forall x\varphi$ は $\neg\exists x\neg\varphi$ の単なる略記であると考えることにする．

言語 L を 1 つ固定する．このとき，K^* の論理的公理は 3 つのグループに分かれる:

1. **（トートロジー）** すべての Fml_L での命題論理によるトートロジー は K^* の公理である．

2. **（等号の公理）** $x,\ y,\ z,\ x_1,\ x_2,\ldots,\ y_1,\ y_2,\ldots$ を任意の変数記号とするとき，次の形の論理式は K^* の公理である:

   (7.6) $x \equiv x\,;$ eq-a

   (7.7) $x \equiv y \to y \equiv x\,;$ eq-b

   (7.8) $x \equiv y \to y \equiv z \to x \equiv z\,;$ eq-b-0

   (7.9) $x_1 \equiv y_1 \to \cdots x_n \equiv y_n \to f(x_1,\ldots,x_n) \equiv f(y_1,\ldots,y_n),$ eq-c
   ただし f は L の n 変数関数記号 ;

   (7.10) $x_1 \equiv y_1 \to \cdots x_n \equiv y_n \to r(x_1,\ldots,x_n) \to r(y_1,\ldots,y_n),$ eq-d
   ただし r は L の n 変数関係記号 .

3. **(代入公理)** $\varphi \in Fml_L,\ x \in Var,\ t$ を L-項とする．φ に変数記号 x が自由変数として現われるすべての個所について，t に現われる，ある変数 y に対して $\exists y\psi$ という形の φ の部分論理式に含まれないとき — このことを t は φ で x に対し自由であると言う，$\varphi(t/x) \to \exists x\varphi$ は K^* の公理である[19]．

[19] $\varphi(t/x)$ で論理式 φ に自由変数として現われる x をすべて L-項 t で置き換えて得られる論理式

K^* の推論規則は次のものである:

1. **(三段論法)** すべての $\varphi, \psi \in Fml_L$ に対し，$\dfrac{\varphi, \varphi \to \psi}{\psi}$ は K^* の推論規則である;
2. **(存在推論)** すべての $\varphi, \psi \in Fml_L$ と $x \in Var$ に対し，$\dfrac{\varphi \to \psi}{\exists x\varphi \to \psi}$ は K^* の推論規則である．ただし，x は ψ には自由変数として現われないものとする．

K^* が (7.1), (7.2), (7.3) を満たすことを示したいわけであるが，いちいち $\vdash_{K^*}$ と書くのは煩雑なので，以下では，これを単に $\vdash$ と略すことにする．同様に，$\vdash^P, \vdash^n$ なども，それぞれ$\vdash^P_{K^*}, \vdash^n_{K^*}$ などの略である．

以下では言語 L を 1 つ固定して考える．L は有限または可算とする．したがって，L-論理式は高々可算個しか存在しない．何も指定のない場合には，T は L-理論，$\varphi, \varphi_0, \varphi_1, \ldots, \psi, \psi_0, \ldots$ などはすべて L-論理式とする．

定理 7.1 (健全性定理) $T \vdash \varphi \Rightarrow T \models \varphi$. soundness

証明. n に関する帰納法で，すべての $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ に対し，

(7.11) $T \vdash^n \varphi$ なら $T \models \varphi$ soundness-0

となることが示せればよい．$n = 1$ のときは，φ は T に属すか，論理的公理のうちのどれかである．

φ が T に属すときには，$T \models \varphi$ は明らかである．φ がトートロジーのときには，系 5.3 により $T \models \varphi$ である．φ が等号の公理のどれかのときにも，$T \models \varphi$ となることは明らかである．

φ が代入公理のときについて，$\models \varphi$ となることを確かめておく:
φ が $\alpha(t/x) \to \exists\alpha$ として，x は t に自由変数として現われないとする．このとき，

$$\mathfrak{A} \models \varphi \;\Leftrightarrow\; \text{すべての } I : Var \to A \text{ に対し}, (\mathfrak{A}, I) \models \alpha(t/x) \text{ なら } (\mathfrak{A}, I) \models \exists x\alpha$$

である．

$I : Var \to A$ で，$(\mathfrak{A}, I) \models \alpha(t/x)$ だったとする．$t = t(x_1, \ldots, x_k)$ とする．x は $\alpha(t/x)$ に自由変数として現われるすべての変数記号と異なるとしてよいが，

をあらわす．ただし，この書き方をしたときには $\varphi = \varphi(x)$ は仮定せず，φ は x 以外の自由変数を含んでいてもよいとする．

$a = t^{\mathfrak{A}}(I(x_1), ..., I(x_k))$ とすると，$(\mathfrak{A}, I_{x,a}) \models \alpha$ となるから，$(\mathfrak{A}, I) \models \exists x\alpha$ である．したがって， $\mathfrak{A} \models \varphi$ が示せた．

次に，$n > 1$ で，すべての $1 \leq m < n$ に対しては (7.11) （で n を m で置き換えたもの）が成り立つことが既に示せていると仮定する．このときにも φ が T に属すか，論理的公理のうちのどれかである場合は，$n = 1$ の場合と同様に $\mathfrak{A} \models \varphi$ となる．そうでない場合には，$\langle\varphi_1, ..., \varphi_n\rangle$ を φ の証明として，$\varphi = \varphi_n$ は三段論法か存在推論によって $\varphi_1,..., \varphi_{n-1}$ から導き出されている．

φ が三段論法によって導き出されている場合を考えてみる．このときには，i, $j < n$ で，$\varphi_j = \varphi_i \to \varphi$ となるものがあり，

$$\frac{\varphi_i,\ \varphi_i \to \varphi}{\varphi}$$

という推論がなされている．$\langle\varphi_1, ..., \varphi_i\rangle$ と $\langle\varphi_1, ..., \varphi_j\rangle$ がそれぞれ φ_i と φ_j の証明であることから，$T \vdash^i \varphi_i$, $T \vdash^j \varphi_j$ である．したがって，$\mathfrak{A} \models T$ とすると，帰納法の仮定から，

(7.12) $\mathfrak{A} \models \varphi_i$ かつ s-0

(7.13) $\mathfrak{A} \models \varphi_i \to \varphi$ s-1

である．$I : Var \to A$ なら，(7.13) により， $(\mathfrak{A}, I) \models \varphi_i$ なら $(\mathfrak{A}, I) \models \varphi$ だが，(7.12) により，$(\mathfrak{A}, I) \models \varphi_i$ だから，$(\mathfrak{A}, I) \models \varphi$ となることがわかる．$I : Var \to A$ は任意だったから，$\mathfrak{A} \models \varphi$ である．

φ が存在推論により導き出されている場合の証明は，ある $i < n$ で，

$$\frac{\varphi_i}{\varphi}$$

が存在推論となっているものがある．このとき，φ_i は $\eta \to \nu$ の形をしていて，ある変数記号 x に対し，x は ν で自由変数としてはあらわれず，φ は，$\exists x\eta \to \nu$ という形をしている．$\mathfrak{A}$ を任意の T のモデルとする (つまり，$\mathfrak{A}$ は L-構造で $\mathfrak{A} \models T$ とする)．このとき帰納法の仮定から，任意の $I' : A \to Var$ に対し，$(\mathfrak{A}, I') \models \eta \to \nu$ である．

もし $(\mathfrak{A}, I_{x,a}) \models \eta$ がある $a \in A$ に対し成りたてば，$(\mathfrak{A}, I_{x,a}) \models \nu$ だが，x は ν に自由変数として現れないから， $(\mathfrak{A}, I) \models \nu$ となる．したがって，$(\mathfrak{A}, I) \models \exists x\, \eta \to \nu$ である．

もし，すべての $a \in A$ に対し $(\mathfrak{A}, I_{x,a}) \not\models \eta$ だとすると，$(\mathfrak{A}, I) \not\models \exists\eta$ だから，ふたたび $(\mathfrak{A}, I) \models \exists x\, \eta \to \nu$ となる．

ここで，I は任意だったから，$\mathfrak{A} \models \exists x\,\eta \to \nu$ つまり $\mathfrak{A} \models \varphi$ がわかる．**（証明終）**

簡単な数学的証明を K^* での証明に書きなおしてみようとすると，これを直截的に行なうことは非常に困難なことに気付く．そこで，以下では，得られたいくつかの証明を編集して別の証明を作る手法をいくつか用意しておき，これらを活用することで K^* での証明を求める，という方法がとられる．このような手法を述べた定理は，普通の数学的定理とは異なり，普通には数学の外側にある "証明" を数学的対象として「上からながめる」視点から扱かう定理となっている．そこで，このような定理は，普通の数学的定理と区別してメタ定理 (meta-theorem) と呼ばれる．次の 補題 7.2 や，演繹(えんえき)定理 (補題 7.3)，補題 8.4, 代入定理 (補題 8.5) はそのようなメタ定理である．

implication

補題 7.2 $T \vdash \varphi_1 \to \cdots \to \varphi_k \to \varphi$ で，$T \vdash \varphi_1, \ldots, T \vdash \varphi_k$ なら，$T \vdash \varphi$ である．さらに，$\varphi_1 \to \cdots \to \varphi_k \to \varphi$ と，$\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ の T からの証明が与えられたとき，これらの証明から，φ の T からの証明を作るアルゴリズムが存在する．

証明. P_1 を $\varphi_1 \to \cdots \varphi_k \to \varphi$ の T からの証明として，P_2 を $T \vdash \varphi_1$ の T からの証明とする．$\varphi_1 \to \cdots \to \varphi_k \to \varphi$ は $\varphi_1 \to (\varphi_2 \to \cdots \to \varphi_k \to \varphi)$ とも書けることに注意すると，$\varphi_2 \to \cdots \to \varphi_k \to \varphi$ は，φ_1 と $\varphi_1 \to \cdots \to \varphi_k \to \varphi$ から三段論法で得られることがわかる．したがって，

$$P_1{}^\frown P_2{}^\frown\langle \varphi_2 \to \cdots \to \varphi_k \to \varphi \rangle$$

は T からの $\varphi_2 \to \cdots \to \varphi_k \to \varphi$ の証明になっている[20]．同様の議論を繰り返し証明をつなげてゆくことにより，最終的には $T \vdash \varphi$ の証明が得られる．

上の証明は，P_1, P_2,..., を編集して T からの φ の証明を得るためのルゴリズムとして書きあらわせるので，補題の最後の主張も正しいことがわかる．**（証明終）**

$T \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\} \vdash \varphi$ を $T, \varphi_1, \ldots, \varphi_k \vdash \varphi$ とも書くことにする．

補題 7.3 (演繹定理 – Deduction Theorem) (1) 任意の L-理論 T と L-論理式 φ, ψ に対し，$T \vdash \varphi \to \psi$ なら $T, \varphi \vdash \psi$ である． Deduction-Thm

(2) 上で，更に φ が L-文なら，$T, \varphi \vdash \psi \ \Leftrightarrow\ T \vdash \varphi \to \psi$ である．

[20] 2 つの（有限）列 $S = \langle s_1, \ldots, s_n \rangle$, $T = \langle t_1, \ldots, t_m \rangle$ に対し $S{}^\frown T$ で，これらの列の連接 $\langle s_1, \ldots, s_n, t_1, \ldots, t_m \rangle$ をあらわす．

注意. 補題 7.2 でと同様に，(1) は，実際には，$\varphi \to \psi$ の T からの証明を変形して ψ の $T \cup \{\varphi\}$ からの証明を作るアルゴリズムが存在する，という主張になっている (このことは以下の証明から分る)．同様に，(2) は φ が L-文のときには，ψ の $T \cup \{\varphi\}$ からの証明を変形して $\varphi \to \psi$ の T からの証明を作るアルゴリズムが存在する，という主張である．

証明. (1): $\langle \varphi_1, ..., \varphi_n \rangle$ を $\varphi \to \psi$ の T からの証明とする．特に $\varphi_n = \varphi \to \psi$ である．このとき，$\langle \varphi_1, ..., \varphi_n \rangle$ は $\varphi \to \psi$ の $T \cup \{\varphi\}$ からの証明でもある．したがって，$\langle \varphi, \varphi_1, ..., \varphi_n, \varphi, \psi \rangle$ は三段論法

$$\frac{\varphi,\ \varphi \to \psi}{\psi}$$

を最後の推論とする ψ の $T \cup \{\varphi\}$ からの証明になっている．

(2): "$\Rightarrow$" は (1) によりよいから，すべての $n \in \mathbb{N} \setminus \{n\}$ に対し，

(7.14) φ が L-文で $T, \varphi \vdash^n \psi$ なら $T \vdash \varphi \to \psi$ となる　reduction-0

ことを，n に関する帰納法で示せばよい．

$n = 1$ なら，$\psi = \varphi$ か，ψ は T に属すか，ψ は論理的公理の 1 つか，のいずれかである．$\varphi = \psi$ なら $\varphi \to \psi$ はトートロジーとなるから，$T \vdash \varphi \to \psi$ は明らかである．ψ が T に属すか，論理的公理である場合には，$\vdash$ の定義から，$T \vdash \psi$ である．$\psi \to (\varphi \to \psi)$ はトートロジーだから[21]，$T \vdash \psi \to (\varphi \to \psi)$ である．したがって，補題 7.2 により，$T \vdash \varphi \to \psi$ がわかる[22]．

$n > 1$ ですべての $1 \leq m < n$ に対して (7.14) が成り立つことがすでに示されているとする．$P = \langle \varphi_1, ..., \varphi_n \rangle$ を ψ の $T \cup \{\varphi\}$ からの証明とする．もし，P で $\varphi_n = \psi$ の導出に三段論法も存在推論も用いられていなければ，長さが 1 の ψ の証明が得られることになり，$n = 1$ の場合の証明が適用できる．

もし，φ_n の導出に三段論法が適用されていれば，$1 \leq i, j < n$ で，$\varphi_j = \varphi_i \to \varphi_n$ となるものがある．証明 $\langle \varphi_1, ..., \varphi_i \rangle$ により $T, \varphi \vdash \varphi_i$ だから，帰納法の仮定から，$T \vdash \varphi \to \varphi_i$ である．同様に，$T \vdash \varphi \to \varphi_i \to \varphi_n$ である．したがって，

[21] これを見るには，$\psi \to (\varphi \to \psi)$ は命題論理の論理式 $(A \to (B \to A))$ の命題変数 A, B にそれぞれ ψ と φ を代入したものだから，$(A \to (B \to A))$ が命題論理のトートロジーになっていることを示せばよい．このことは，$(A \to (B \to A))$ の真偽表を作成することで確かめられる．

[22] 補題 7.2 の $k = 1$ の場合を適用している．以下では，補題 7.2 は多用されることになるが，煩雑になるので「補題 7.2 により」という指摘はそれが明らかな個所ではいちいち行わないことにする．

$(\varphi \to \varphi_i) \to (\varphi \to \varphi_i \to \varphi_n) \to (\varphi \to \varphi_n)$ がトートロジーであることを用いると，補題 7.2 から， $\varphi \to \varphi_n$ $(= \varphi \to \psi)$ の T からの証明が得られる．

$\psi = \varphi_n$ の導出に存在推論が用いられている場合には，$1 \leq i < n$ で，φ_i が $\eta \to \nu$ の形をしているものがあって，φ_n は $\exists x\eta \to \nu$ という形をしていて，

$$\frac{\varphi_i}{\varphi_n}$$

は存在推論になっている．特に，変数 x は ν の中に自由変数としてはあらわれていない．

帰納法の仮定から，$T \vdash \varphi \to \eta \to \nu$ である．$(\varphi \to \eta \to \nu) \to (\eta \to \varphi \to \nu)$ がトートロジーであることをここで使うと，$T \vdash \eta \to \varphi \to \nu$ がわかる．これに存在推論を適用すると[23)]，$T \vdash \exists x\eta \to \varphi \to \nu$ が得られる．したがって，上と同様のトートロジー $(\exists x\eta \to \varphi \to \nu) \to (\varphi \to \exists x\eta \to \nu)$ を適用すると， $T \vdash \varphi \to (\exists x\eta \to \nu)$, つまり $T \vdash \varphi \to \psi$ が得られる． （証明終）

K^* が (7.3) を満たすことは明らかだが，このことから，次が言える:

endlichkeitssatz

補題 7.4 T を L-理論，φ を L-論理式とするとき，$T \vdash \varphi$ なら，有限な $T' \subseteq T$ で，$T' \vdash \varphi$ となるものが存在する．

証明． $T \vdash^P \varphi$ とする．このとき，P は有限列だから，P に現われる T の要素の全体を T' とすると，T' は有限である．T' のとり方から，$T' \vdash^P \varphi$ である．

（証明終）

8 完全性定理

vollst-satz

K^* は (7.2) も満たす:

定理 8.1 (完全性定理) T を L-理論として，φ を L-論理式とする．このとき，$T \models \varphi$ なら $T \vdash \varphi$ である． completeness

以下で 定理 8.1 を証明する．L-理論 T が矛盾する，とは，すべての L-論理式 φ に対し， $T \vdash \varphi$ が成り立つこととする．T が矛盾しないとき，T は **無矛盾** であるという．

model-consis

23) ここで存在推論が適用できることのために φ が L-文であることが使われていることに注意する．

補題 8.2 T が矛盾するなら，T はモデルを持たない．あるいは，この主張の対偶をとって: T がモデルを持つなら，T は無矛盾である．

証明． T を矛盾する L-理論とする．特に $T \vdash \exists x(x \not\equiv x)$ だから，定理 7.1 により，$T \models \exists x(x \not\equiv x)$ である．したがって，もし T がモデル $\mathfrak{A}$ を持つとすると，$\mathfrak{A} \models \exists x(x \not\equiv x)$ となるが，これは $\models$ の定義から矛盾である． **（証明終）**

inconsistent

補題 8.3 任意の L-理論 T について以下は同値である:

(a) T は矛盾する．

(b) ある L-論理式 φ について $T \vdash (\varphi \wedge \neg\varphi)$ が成り立つ．

(c) $T \vdash x \not\equiv x$.

証明． (a) $\Rightarrow$ (b) は T が矛盾することの定義から明らか．

(b) $\Rightarrow$ (c): ある L-論理式 φ について $T \vdash (\varphi \wedge \neg\varphi)$ が成り立つとする．このとき，$(\varphi \wedge \neg\varphi) \rightarrow x \not\equiv x$ はトートロジーだから，補題 7.2 により $T \vdash x \not\equiv x$ となる．

(c) $\Rightarrow$ (a): $T \vdash x \not\equiv x$ とする．$x \equiv x$ は等号の公理 (7.6) で，$x \equiv x \rightarrow x \not\equiv x \rightarrow (x \equiv x \wedge x \not\equiv x)$ はトートロジーだから，$T \vdash (x \equiv x \wedge x \not\equiv x)$ である．したがって，“(b) $\Rightarrow$ (c)” の証明と同様に，任意の φ に対し，$T \vdash \varphi$ となることが示せる．

（証明終）

vdash-forall

補題 8.4 $T \vdash \varphi \Leftrightarrow T \vdash \forall x_1 \cdots \forall x_n \varphi$.

証明． $n = 1$ のときについて示せば十分である．$\forall x\varphi$ は $\neg\exists x\neg\varphi$ の略記として扱かうことにしていたこと思い出しておく．

($\Rightarrow$): $T \vdash \varphi$ として，y を φ にあらわれない変数記号とする．このとき，$T, \forall y\, y \equiv y \vdash \varphi$ だから，演繹定理により，$T \vdash \forall y\, y \equiv y \rightarrow \varphi$ である．$(\forall y\, y \equiv y \rightarrow \varphi) \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg\forall y\, y \equiv y)$ はトートロジーだから，三段論法により，$T \vdash \neg\varphi \rightarrow \neg\forall y\, y \equiv y$ となることがわかる．したがって，存在推論から．

$$T \vdash \exists x\neg\varphi \rightarrow \neg\forall y\, y \equiv y \tag{8.1}$$ all-0

となる．ここで，$(\exists x\neg\varphi \rightarrow \neg\forall y\, y \equiv y) \rightarrow (\forall y\, y \equiv y \rightarrow \neg\exists x\neg\varphi)$ はトートロジーだから，(8.1) の証明と，このトートロジーからの三段論法により，

$$T \vdash \forall y\, y \equiv y \rightarrow \neg\exists x\neg\varphi \tag{8.2}$$ all-1

がわかる．$\forall y\, y \equiv y$ は等号の公理 (7.6) を使って導ける，(8.2) の証明にこの論理式の証明と $\exists x \neg\varphi$ を繋げたものは，最後の推論を三段論法とするような証明となっている．したがって $T \vdash \neg\exists x \neg\varphi$, つまり，$T \vdash \forall x \varphi$ である．

($\Leftarrow$): $T \vdash \forall x \varphi$ とする．このとき，y を任意の変数記号として，$T, \forall y\, y \equiv y \vdash \neg\exists x \neg\varphi$ だから，演繹定理により，$T \vdash \forall y\, y \equiv y \to \neg\exists x \neg\varphi$ である．$(\forall y\, y \equiv y \to \neg\exists x \neg\varphi) \to (\exists x \neg\varphi \to \neg\forall y\, y \equiv y)$ はトートロジーだから，$T \vdash \exists x \neg\varphi \to \neg\forall y\, y \equiv y$ となる．したがって，代入公理 $\neg\varphi \to \exists x \neg\varphi$ とトートロジー $(\neg\varphi \to \exists x \neg\varphi) \to (\exists x \neg\varphi \to \neg\forall y\, y \equiv y) \to (\neg\varphi \to \neg\forall y\, y \equiv y)$ から，$T \vdash \neg\varphi \to \neg\forall y\, y \equiv y$. よって，トートロジー $(\neg\varphi \to \neg\forall y\, y \equiv y) \to (\forall y\, y \equiv y \to \varphi)$ から，$T \vdash \forall y\, y \equiv y \to \varphi$ となり，($\Rightarrow$) の証明の最後と同様に，$T \vdash \varphi$ が導ける． **（証明終）**

補題 8.5 (代入定理 — Substitution Theorem) $T \vdash \varphi$ で L-項 t は φ で x に対し自由なら， $T \vdash \varphi(t/x)$ である． subst-thm

証明. t に対する仮定から，$\neg\varphi$ に関する代入公理により，$\vdash \neg\varphi(t/x) \to \exists x \neg\varphi$ である．

$$(\neg\varphi(t/x) \to \exists\neg\varphi) \to (\neg\exists x \neg\varphi \to \varphi(t/x))$$

はトートロジーだから，補題 7.2 により，

$$(8.3) \quad \vdash \neg\exists x \neg\varphi \to \varphi(t/x)$$ subst-0

である．$T \vdash \varphi$ だから，補題 8.4 により，

$$(8.4) \quad T \vdash \neg\exists x \neg\varphi$$ subst-1

したがって，ふたたび 補題 7.2 により，(8.3) と (8.4) から，$T \vdash \varphi(t/x)$ である．
（証明終）

次の 命題 8.6 も完全性定理と呼ばれることがあるが，実際，完全性定理 (定理 8.1) は，命題 8.6 の直接の帰結として導くことができる．

completeness'

命題 8.6 任意の L-理論 T について，T が無矛盾なら，T はモデルを持つ．

定理 8.1 の 命題 8.6 からの証明: $\varphi = \varphi(x_1, ..., x_n)$ とする．$\models$ の定義から，

$$T \models \varphi \;\Leftrightarrow\; T \models \forall x_1 \cdots \forall x_n \varphi$$

である．また補題 8.4 から，

$$T \vdash \varphi \;\Leftrightarrow\; T \vdash \forall x_1 \cdots \forall x_n \varphi$$

である．したがって，一般性を失なうことなく φ は L-文としてよい．

$T \nvdash \varphi$ とすると，$T \cup \{\neg\varphi\}$ は無矛盾である ［もし $T \cup \{\neg\varphi\}$ が矛盾するとすると，$T, \neg\varphi \vdash \varphi$ である．したがって，演繹定理から， $T \vdash \neg\varphi \rightarrow \varphi$ となるが，$(\neg\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$ はトートロジーだから， 補題 7.2 により，$T \vdash \varphi$ となってしまい矛盾である］．よって，命題 8.6 により，$T \cup \{\neg\varphi\}$ はモデルを持つから，$T \not\models \varphi$ である．

以上で $T \nvdash \varphi$ なら $T \not\models \varphi$ が示せたが，これは完全性定理の対偶命題となっている． （証明終）

以下では T を無矛盾な L-理論とする．命題 8.6 の証明には，T のモデルを構成すればよいが，これは，以下の 補題 8.9 と 補題 8.13 により実行される．

まず，次の準備をしておく: C を L に含まれない新しい定数記号の（可算）無限集合とする．L に C の記号を加えて得られる言語を L' とよぶことにする．

L-L’

補題 8.7 φ を L-論理式とするとき，

$$
\begin{aligned}
& T \vdash \varphi \text{ が } L \text{ 上で成り立つ (つまり } T \vdash^{L} \varphi \text{ である)} \\
& \Leftrightarrow \quad T \vdash \varphi \text{ が } L' \text{ 上で成り立つ (つまり， } T \vdash^{L'} \varphi \text{ である).}
\end{aligned}
$$

証明. “$\Rightarrow$” は明らかである．“$\Leftarrow$”: $P = \langle \varphi_1, \dots, \varphi_n \rangle$ を φ の T からの L' での証明とする．特に $\varphi_n = \varphi$ である．$c_1, \dots, c_m$ をこの証明 P に現われる C の要素のすべてとして，$x_1, \dots, x_m$ を P に現われない m 個の変数記号とする．$\varphi_1, \dots, \varphi_n$ に現われる $c_1, \dots, c_m$ をそれぞれすべて $x_1, \dots, x_m$ で置き換えて得られる論理式を $\varphi_1^*, \dots, \varphi_n^*$ とする． $\varphi_n = \varphi$ は L-論理式だから $\varphi_n^* = \varphi$ となっている．同様に φ_i が T の要素である場合にも $\varphi_i^* = \varphi_i$ である．このことに注意すると，$P^* = \langle \varphi_1^*, \dots, \varphi_n^* \rangle$ は L での φ の T からの証明となっていることがわかる． （証明終）

$$
\mathbb{V}_L = \{\Gamma : \Gamma \text{ は } L\text{-理論で } \Gamma \text{ は無矛盾 }\}
$$

とする．$\mathbb{V}_{L'}$ も同様に定義する．補題 8.7 により， $\mathbb{V}_L \subseteq \mathbb{V}_{L'}$ である．

V-L’

補題 8.8 $\Gamma, \Gamma_i, i \in I$ を L'-理論とする．このとき，

(a) $\Gamma \in \mathbb{V}_{L'}$ として， L'-文 φ に対し，$\Gamma \vdash \varphi$ なら，$\Gamma \cup \{\varphi\} \in \mathbb{V}_{L'}$ である．

(b) $\Gamma \in \mathbb{V}_{L'}$ で $\Gamma' \subseteq \Gamma$ なら，$\Gamma' \in \mathbb{V}_{L'}$.

(c) $\Gamma \in \mathbb{V}_{L'} \Leftrightarrow$ すべての有限な $\Gamma' \subseteq \Gamma$ に対し，$\Gamma' \in \mathbb{V}_{L'}$.

(d)　$\Gamma_i \in \mathbb{V}_{L'}$, $i \in I$ で，すべての $i, j \in I$ に対し，$\Gamma_i \subseteq \Gamma_j$ または $\Gamma_j \subseteq \Gamma_i$ なら，$\bigcup_{i\in I}\Gamma_i \in \mathbb{V}_{L'}$.

(e)　$\Gamma \cup \{(\varphi \vee \psi)\} \in \mathbb{V}_{L'}$ なら $\Gamma \cup \{\varphi\} \in \mathbb{V}_{L'}$ または $\Gamma \cup \{\psi\} \in \mathbb{V}_{L'}$.

(f)　$\Gamma \in \mathbb{V}_{L'}$ なら，任意の L'-文 φ に対し，$\Gamma \cup \{\varphi\} \in \mathbb{V}_{L'}$ または $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \in \mathbb{V}_{L'}$ である．

(g)　$\Gamma \in \mathbb{V}_{L'}$ で $\Gamma \cup \{\exists x\varphi(x)\} \in \mathbb{V}_{L'}$ なら，$\Gamma \cup \{\varphi(c/x)\} \in \mathbb{V}_{L'}$ である．ただし c は $\Gamma \cup \{\varphi(x)\}$ に 現われない定数記号 ($\in C$) とする．さらに，このときには，$\Gamma \cup \{\exists x\varphi(x), \varphi(c/x)\} \in \mathbb{V}_{L'}$ である．

証明．　(a): $\Gamma \in \mathbb{V}_{L'}$ で $\Gamma \vdash \varphi$ とする．もし $\Gamma \cup \{\varphi\} \notin \mathbb{V}_{L'}$ なら，$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash x \not\equiv x$ である．$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash^P x \not\equiv x$, $\Gamma \vdash^Q \varphi$ とすれば，$Q ^\frown P$ は $x \not\equiv x$ の Γ からの証明となるが，補題 8.3 により，これは $\Gamma \in \mathbb{V}_{L'}$ に矛盾である．

(b): 対偶を示す．もし $\Gamma' \notin \mathbb{V}_{L'}$ なら，$\Gamma' \vdash x \not\equiv x$ だが，$\Gamma' \subseteq \Gamma$ により，$\Gamma \vdash x \not\equiv x$ となる．したがって，補題 8.3 により，$\Gamma \notin \mathbb{V}_{L'}$ である．

(c): “$\Rightarrow$” は (b) によりよいから，“$\Leftarrow$” を示す．すべての有限な $\Gamma' \subseteq \Gamma$ に対し，$\Gamma' \in \mathbb{V}_{L'}$ であるとする．もし $\Gamma \notin \mathbb{V}_{L'}$ とすると，$\Gamma \vdash x \not\equiv x$ だが，補題 7.4 により，有限な $\Gamma' \subseteq \Gamma$ で $\Gamma' \vdash x \not\equiv x$ となるものがとれる．しかし，補題 8.3 により，これは $\Gamma' \in \mathbb{V}_{L'}$ の仮定に矛盾する．

(d): もし $\bigcup_{i\in I}\Gamma_i \notin \mathbb{V}_{L'}$ だったとすると，$x \not\equiv x$ の $\bigcup_{i\in I}\Gamma_i$ からの証明 P が存在する．P は有限列だから，$i_0 \in I$ で P に現われる $\bigcup_{i\in I}\Gamma_i$ の公理がすべて Γ_{i_0} に含まれるようなものが存在する．このとき，$\Gamma_{i_0} \vdash^P x \not\equiv x$ となるが，これは，$\Gamma_{i_0} \in \mathbb{V}_{L'}$ に矛盾である．

(e): 対偶を示す．$\Gamma \cup \{\varphi\} \notin \mathbb{V}_{L'}$ かつ $\Gamma \cup \{\psi\} \notin \mathbb{V}_{L'}$ とすれば，$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash x \not\equiv x$ かつ $\Gamma \cup \{\psi\} \vdash x \not\equiv x$ である．したがって，演繹定理により，

$$\Gamma \vdash \varphi \rightarrow x \not\equiv x \quad \text{かつ} \quad \Gamma \vdash \psi \rightarrow x \not\equiv x \tag{8.5}$$ bbdV-0

である．一方

$$(\varphi \rightarrow x \not\equiv x) \rightarrow (\psi \rightarrow x \not\equiv x) \rightarrow (\varphi \vee \psi \rightarrow x \not\equiv x) \tag{8.6}$$ bbdV-1

はトートロジーだから，(8.5), (8.6) と補題 7.2 により，$\Gamma \vdash \varphi \vee \psi \rightarrow x \not\equiv x$ である．したがって，演繹定理により，$\Gamma \cup \{\varphi \vee \psi\} \vdash x \not\equiv x$ となるから，$\Gamma \cup \{\varphi \vee \pi\} \notin \mathbb{V}_{L'}$ である．

(f): 対偶を示す．$\Gamma \cup \{\varphi\} \notin \mathbb{V}_{L'}$ かつ $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \notin \mathbb{V}_{L'}$ とすると，$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash x \not\equiv x$ かつ $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash x \not\equiv x$ となるから，演繹定理により，

$$(8.7) \quad \Gamma \vdash \varphi \to x \not\equiv x \ \text{ かつ } \ \Gamma \vdash \neg\varphi \to x \not\equiv x$$ bbdV-2

である．一方

$$(8.8) \quad (\varphi \to x \not\equiv x) \to (\neg\varphi \to x \not\equiv x) \to x \not\equiv x$$ bbdV-3

はトートロジーだから，(8.7), (8.8) と補題 7.2 により，$\Gamma \vdash x \not\equiv x$ である．したがって，$\Gamma \notin \mathbb{V}_{L'}$ である．

(g): 対偶を示す．$\Gamma \cup \{\varphi(c/x)\} \notin \mathbb{V}_{L'}$ とすると，$\Gamma \cup \{\varphi(c/x)\} \vdash x \not\equiv x$ となる．したがって，演繹定理により，$\Gamma \vdash \varphi(c/x) \to x \not\equiv x$ である．P を $\varphi(c/x) \to x \not\equiv x$ の Γ からの証明として，z を P に現われない変数記号とするとき，P に含まれる論理式のすべてに現われる c を z で置き換えて得られる論理式の列を P' とすると，P' は $\varphi(z/x) \to x \not\equiv x$ の Γ からの証明になる．したがって，$P' {}^\frown \langle \exists x\varphi(x) \to x \not\equiv x \rangle$ は存在推論を最後の推論とするような Γ からの証明となっている．このことと演繹定理から，

$$\Gamma \cup \{\exists x\varphi(x) \to x \not\equiv x\} \vdash x \not\equiv x$$

となり，したがって，補題 8.3 により

$$\Gamma \cup \{\exists x\varphi(x) \to x \not\equiv x\} \notin \mathbb{V}_{L'}$$

である．主張の後半は，次のようにして見ることができる: 代入公理により，$\Gamma \vdash \varphi(c/x) \to \exists x\varphi(x)$ だから，演繹定理により，$\Gamma \cup \{\varphi(c/x)\} \vdash \exists x\varphi(x)$ である．したがって，$\Gamma \cup \{\varphi(c/x)\} \in \mathbb{V}_{L'}$ なら，(a) により，$\Gamma \cup \{\exists x\varphi(x), \varphi(c/x)\} \in \mathbb{V}_{L'}$ である． **(証明終)**

Henkin-extension

補題 8.9 無矛盾な $\tilde{T} \in \mathbb{V}_{L'}$, $T \subseteq \tilde{T}$ で，次の (8.9) ~ (8.11) を満たすものが構成できる:

(8.9) すべての L'-文 φ に対し，$\varphi \in \tilde{T}$ または $\neg\varphi \in \tilde{T}$; Henkin-0

(8.10) すべての L'-文 φ に対し，$\tilde{T} \vdash \varphi$ なら，$\varphi \in \tilde{T}$ となる; Henkin-1

(8.11) $\exists x\varphi \in \tilde{T}$ なら，ある $c \in C$ に対し $\varphi(c/x) \in \tilde{T}$ となる． Henkin-2

上の (8.9) ∼ (8.11) を満たすような $\tilde{T}$ を **Henkin 理論** (Henkin theory) とよぶ．$T \subseteq \tilde{T}$ で $\tilde{T}$ が Henkin 理論のとき，$\tilde{T}$ を T の **Henkin 拡大** (Henkin extension) という．

補題 8.9 の証明． L'-文の全体は可算なので，L'-文を $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ と枚挙しておく．ただし，

(8.12) すべての L'-文 φ はこのリストの中に無限回あわれる Henkin-2-0

ようにしておく．

$\mathbb{V}_{L'}$ の要素の ($\subseteq$ に関する) 上昇列 $T_0 \subseteq T_1 \subseteq T_2 \subseteq T_3 \subseteq \cdots$ で次の (8.13) ∼ (8.16) を満たすようなものを帰納的にとる:

(8.13) $T_0 = T$; Henkin-3

(8.14) すべての $i \in \mathbb{N}$ に対し，T_i にあらわれる新しい定数記号 ($\in C$) は高々有限個である; Henkin-4

(8.15) $T_i \cup \{\varphi_i\} \in \mathbb{V}_{L'}$ なら， Henkin-5

  (a) もし φ_i が $\exists x\psi(x)$ という形をしているなら，c を $T_i \cup \{\varphi_i\}$ にあらわれない最初の C の元として，$T_{i+1} = T_i \cup \{\varphi_i, \psi(c)\}$;

  (b) φ_i が $\exists x\psi(x)$ という形をしていないときには，$T_{i+1} = T_i \cup \{\varphi_i\}$

(8.16) $T_i \cup \{\varphi_i\} \notin \mathbb{V}_{L'}$ なら，$T_{i+1} = T_i \cup \{\neg\varphi_i\}$. Henkin-6

まず，上のような帰納的構成が可能であることを見る．このためには上のようにして構成された T_i, $i \in \mathbb{N}$ が，実際に (8.14) を満たし，$\mathbb{V}_{L'}$ の要素になることを確かめればよい:

補題 8.7 により，$T \in \mathbb{V}_{L'}$ だから，(8.13) はよい．(8.14) は，T_0 に対して成り立つことは (8.13) により明らかだが，(8.15) と (8.16) での T_{i+1} の T_i からの構成でも，T_{i+1} に新しく現われる C の元は高々有限個だから，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対し (8.14) が成り立つことがわかる．(8.15), (a) で構成された T_{i+1} が $\mathbb{V}_{L'}$ に属することは 補題 8.8, (g) から，(8.16) で構成された T_{i+1} が $\mathbb{V}_{L'}$ に属することは 補題 8.8, (f) からわかる．

$\tilde{T} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} T_i$ とすると，補題 8.8, (d) により，$\tilde{T} \in \mathbb{V}_{L'}$ である．したがって $\tilde{T}$ が (8.9) ∼ (8.11) を満たすことが示せれば，証明が完了する．

(8.9): φ を L'-文として，$\varphi \notin \tilde{T}$ だったとする．$\varphi = \varphi_{i_0}$ となる $i_0 \in \mathbb{N}$ をとると，$\varphi_{i_0} \notin T_{i_0+1}$ だから，T_{i_0+1} の構成では (8.16) が適用されていなくてはならない．したがって $\neg\varphi = \neg\varphi_{i_0} \in T_{i_0+1} \subseteq \tilde{T}$ である．

(8.10): φ を L'-文として，$\tilde{T} \vdash \varphi$ とする．このときには，補題 7.4 により，$i_0 \in \mathbb{N}$ で $T_{i_0} \vdash \varphi$ となるものがとれる．(8.12) により，$i_1 \geq i_0$ で，$\varphi = \varphi_{i_1}$ となるようなものがとれるが，$T_{i_1} \vdash \varphi_{i_1}$ だから，$T_{i_1} \cup \{\varphi_{i_1}\} \in \mathbb{V}_{L'}$ となり，T_{i_1+1} の構成では，(8.15) が適用されていることがわかる．したがって，$\varphi = \varphi_{i_1} \in T_{i_1+1} \subseteq \tilde{T}$ である．

(8.11): $\exists x\varphi(x) \in \tilde{T}$ なら，$i_0 \in \mathbb{N}$ で $\exists x\varphi(x) \in T_{i_0}$ となるものがあるが，$i_1 \geq i_0$ を $\exists x\varphi(x) = \varphi_{i_1}$ となるようにとると，(8.15), (a) により，$\varphi(c) \in T_{i_1+1} \subseteq \tilde{T}$ となるような $c \in C$ が存在する． **(証明終)**

補題 8.13 で Henkin 理論 $\tilde{T}$ のモデルが存在することを示すが，補題 8.11 はそこで用いるモデルの構成のための準備である．まず 補題 8.11 のための準備として，次の K^* に関する一般的な補題を示しておく:

terms

補題 8.10 L を任意の言語として，$t, t', t'', t_1,\ldots, t_n, t'_1,\ldots, t'_n$ を L-項とする．このとき，

(a) $\vdash t \equiv t$;

(b) $\vdash \exists x(x \equiv t)$ ただし，x は t に現われない変数記号とする;

(c) $\vdash t \equiv t' \to t' \equiv t$;

(d) $\vdash t \equiv t' \to t' \equiv t'' \to t \equiv t''$.

(e) L の n-変数関数記号 f に対し，

$$\vdash t_1 \equiv t'_1 \to \cdots t_n \equiv t'_n \to f(t_1,\ldots,t_n) \equiv f(t'_1,\ldots,t'_n)\,;$$

(f) L の n-変数関係記号 r に対し，

$$\vdash t_1 \equiv t'_1 \to \cdots t_n \equiv t'_n \to r(t_1,\ldots,t_n) \to r(t'_1,\ldots,t'_n).$$

証明. (a): 等号の公理 (7.6) と代入定理 (定理 8.5) によりよい.

(b): $\varphi =$ “$x \equiv t$” に対する代入公理から，$\vdash t \equiv t \to \exists x(x \equiv t)$ だが，(a) により $\vdash t \equiv t$ なので，補題 7.2 により，$\vdash \exists x(x \equiv t)$ である．

(c),(d), (e), (f): それぞれ，等号の公理 (7.7), (7.8), (7.9), (7.10), および，代入定理 (定理 8.5) によりよい． **(証明終)**

Henkin-theory

補題 8.11 $\tilde{T}$ を Henkin 理論とする．このとき，

(a)　$c \in C$ なら，“$c \equiv c$” $\in \tilde{T}$ である．

(b)　t, t', t'' を閉じた L'-項とするとき，“$t \equiv t'$”, “$t' \equiv t''$” $\in \tilde{T}$ なら，“$t \equiv t''$” $\in \tilde{T}$ である．

(c)　t を閉じた L'-項とするとき，$c \in C$ で “$c \equiv t$” $\in \tilde{T}$ となるものが存在する．また $c, c' \in C$ に対し，“$c \equiv t$”, “$c' \equiv t$” $\in \tilde{T}$ なら，“$c \equiv c'$” $\in \tilde{T}$ である．

(d)　$c, c' \in C$ で t, t' を閉じた L'-項とする．“$c \equiv t$”, “$c' \equiv t'$” $\in \tilde{T}$ なら，

$$\text{“}c \equiv c'\text{”} \in \tilde{T} \;\Leftrightarrow\; \text{“}t \equiv t'\text{”} \in \tilde{T} \text{ である．}$$

(e)　$t_1,\dots,\ t_n,\ t'_1,\dots,\ t'_n$ を閉じた L-項として，f を n-変数関数記号とするとき，

$$\text{“}t_1 \equiv t'_1\text{”} \in \tilde{T},\dots,\ \text{“}t_n \equiv t'_n\text{”} \in \tilde{T} \;\Rightarrow\; \text{“}f(t_1, \dots, t_n) \equiv f(t'_1, \dots, t'_n)\text{”} \in \tilde{T}.$$

(f)　$t_1,\dots,\ t_n,\ t'_1,\dots,\ t'_n$ を閉じた L-項として，r を n-変数関係記号とするとき，

$$\text{“}t_1 \equiv t'_1\text{”} \in \tilde{T},,\dots,\ \text{“}t_n \equiv t'_n\text{”} \in \tilde{T} \;\Rightarrow\; \text{“}r(t_1, \dots, t_n) \to r(t'_1, \dots, t'_n)\text{”} \in \tilde{T}.$$

(g)　φ を L'-文とするとき，$\varphi \in \tilde{T} \Leftrightarrow$ “$\neg\varphi$”$\notin \tilde{T}$ である．

(h)　φ, ψ を L'-文とするとき，“$\varphi \vee \psi$” $\in \tilde{T}$ $\Leftrightarrow$ ($\varphi \in \tilde{T}$ または $\psi \in \tilde{T}$) である．

(i)　φ, ψ を L'-文とするとき，“$\varphi \wedge \psi$” $\in \tilde{T}$ $\Leftrightarrow$ ($\varphi \in \tilde{T}$ かつ $\psi \in \tilde{T}$) である．

(j)　φ, ψ を L'-文とするとき，“$\varphi \to \psi$” $\in \tilde{T}$ $\Leftrightarrow$ ($\varphi \notin \tilde{T}$ または $\psi \in \tilde{T}$) である．

証明．　(a): 補題 8.10,(a) により，$\vdash c \equiv c$ である．したがって，(8.10) により，“$c \equiv c$” $\in \tilde{T}$ である．

(b): 等号の公理 (7.8) と代入定理により，$\vdash t \equiv t' \to t' \equiv t'' \to t \equiv t''$ だから，“$t \equiv t'$”, “$t' \equiv t''$” $\in \tilde{T}$, なら，$T \vdash t \equiv t'$, $T \vdash t' \equiv t''$ により，補題 7.2 から，$T \vdash t \equiv t''$ となる．したがって，(8.10) により，“$t \equiv t''$” $\in \tilde{T}$ である．

(c): 補題 8.10,(b) と (8.10) により，“$\exists x(x \equiv t)$” $\in \tilde{T}$ である．したがって，(8.11) により，$c \in C$ で “$c \equiv t$” $\in \tilde{T}$ となるものが存在する．補題 8.10,(c),(d) により，$\vdash c \equiv t \to c' \equiv t \to c \equiv c'$ だから，“$c \equiv t$”, “$c' \equiv t$” $\in \tilde{T}$ なら，補題 7.2 により，$T \vdash c \equiv c'$ となり，(8.10) により，“$c \equiv c'$” $\in \tilde{T}$ である．

(d): (c) の後半と同様に示せる．

(e): 補題 8.10,(e), 補題 7.2 および (8.10) によりよい．

(f): 補題 8.10,(f), 補題 7.2 および (8.10) によりよい．

(g) $\varphi \notin \tilde{T}$ なら (8.9) により $\neg\varphi \in \tilde{T}$ である．$\varphi \in \tilde{T}$ として，$\neg\varphi \in \tilde{T}$ なら，$\tilde{T} \vdash (\varphi \wedge \neg\varphi)$ となるが，これは 補題 8.3 により $\tilde{T} \in \mathbb{V}_{L'}$ に矛盾である．

(h): $\varphi \in \tilde{T}$ または $\psi \in \tilde{T}$ だとする．たとえば，$\varphi \in \tilde{T}$ とすると， $\varphi \to \varphi \vee \psi$ はトートロジーだから，補題 7.2 により $\tilde{T} \vdash \varphi \vee \psi$ となり，(8.10) により “$\varphi \vee \psi$” $\in \tilde{T}$ である．

もし,「$\varphi \in \tilde{T}$ または $\psi \in \tilde{T}$」 でないとすると，$\varphi \notin \tilde{T}$ かつ $\psi \notin \tilde{T}$ だから，(8.9) により，“$\neg\varphi$” $\in \tilde{T}$ かつ “$\neg\psi$” $\in \tilde{T}$ である．ここで，$\neg\varphi \to \neg\psi \to \neg(\varphi \vee \psi)$ がトートロジーであることから，補題 7.2 により， $\tilde{T} \vdash \neg(\varphi \vee \psi)$ である．したがって，(g) により，“$\varphi \vee \psi$”$\notin \tilde{T}$ である．

(i), (j): (h) と同様に示せる． **（証明終）**

$c,\ c' \in C$ に対し，

$$c \sim c' \quad \Leftrightarrow \quad \text{“}c \equiv c'\text{”} \in \tilde{T}$$

とする．補題 8.11,(a),(b) により，$\sim$ は C 上の同値関係となる．$c \in C$ の $\sim$ に関する同値類を $[c]$ と書くことにする．

$$A = \{[c] \,:\, c \in C\}$$

として，A 上に自然に導入される L'-構造 $\mathfrak{A}$ を次のようにして定義する．

L の定数記号の全体，関数記号の全体，および，関係記号の全体を，それぞれ D F, R とする．各 $c \in C$ に対し，$c^{\mathfrak{A}} = [c]$ とする．$d \in D$ に対しては，補題 8.11,(c),(d) により，“$c \equiv d$” $\in \tilde{T}$ となるような $c \in C$ が $\sim$ に関する同値を除いて一意に決まるから，そのような c をとり，$d^{\mathfrak{A}} = [c]$ とする．

$f \in F$ を n-変数関数記号とするとき，各 $\langle c_1, \dots, c_n \rangle \in C^n$ に対し，補題 8.11,(c) により，“$c \equiv f(c_1, \dots, c_n)$” $\in \tilde{T}$ となるものがある．補題 8.11,(d), (e) から，このような c をとり，

$$f^{\mathfrak{A}}([c_1], \dots, [c_n]) = [c]$$

とすることで，$f^{\mathfrak{A}} : A^n \to A$ が定義できる．

$r \in R$ を n-変数関係記号とするとき，

$$r^{\mathfrak{A}} = \{\langle [c_1], \dots, [c_n] \rangle \,:\, \text{“}r(c_1, \dots, c_n)\text{”} \in \tilde{T}\}$$

とする．ここで，

$$\text{(8.17)} \quad \mathfrak{A} = \langle A,\ c^{\mathfrak{A}},\ f^{\mathfrak{A}},\ r^{\mathfrak{A}} \rangle_{c \in D \cup C,\, f \in F,\, r \in R}$$

とすると，$\mathfrak{A}$ は L'-構造となる．$\mathfrak{A}$ は（$\tilde{T}$ に対する）**Henkin モデル** (Henkin model) と呼ばれる．

Henkin-terms

補題 8.12 $\tilde{T}$ を T の Henkin 拡大として，$\mathfrak{A}$ を上のようにして構成された Henkin モデルとする．

(a) $t = t(x_1, ..., x_n)$ を L-項として $c, c_1, ..., c_n \in C$ とするとき，

$$\text{(8.18)}\quad \text{“}c \equiv t(c_1, ..., c_n)\text{”} \in \tilde{T} \;\Leftrightarrow\; [c] = t^{\mathfrak{A}}([c_1], ..., [c_n]) \qquad \text{Henkin-7}$$

である．

(b) $t_1 = t_1(x_1, ..., x_m), ..., t_n = t_n(x_1, ..., x_m)$ を L-項，$c_1, ..., c_m \in C$, $r \in R$ を n-変数関係記号とするとき，

$$\begin{aligned}\text{(8.19)}\quad & \text{“}r(t_1(c_1, ..., c_m), ..., t_n(c_1, ..., c_m))\text{”} \in \tilde{T} \qquad \text{Henkin-8}\\ & \Leftrightarrow \langle t_1^{\mathfrak{A}}([c_1], ..., [c_m]), ..., t_n^{\mathfrak{A}}([c_1], ..., [c_m])\rangle \in r^{\mathfrak{A}}\end{aligned}$$

となる．

証明． (a): t の構成に関する帰納法で示す．t が定数記号 $\in D$ か変数記号のときには，(8.18) は $\sim$ と $\mathfrak{A}$ の定義から明らかである．

ある m-変数の $f \in F$ に対し，t が $t = f(t_1(x_1, ..., x_n), ..., t_m(x_1, ..., x_n))$ という形をしていて，$t_1(x_1, ..., x_n), ..., t_m(x_1, ..., x_n)$ は (8.18) を満たすとする．このとき，補題 8.11, (c) により，$c_1^*, ..., c_m^* \in C$ で，

$$\text{(8.20)}\quad \text{“}c_i^* \equiv t_i(c_1, ..., c_n)\text{”} \in \tilde{T},\; i = 1, ..., m \qquad \text{Henkin-9}$$

となるものがとれる．(8.20) と 補題 8.10,(e), 補題 7.2, (8.10) により，

$$\text{(8.21)}\quad \text{“}t(c_1, ..., c_n) \equiv f(c_1^*, ..., c_m^*)\text{”} \in \tilde{T} \qquad \text{Henkin-10}$$

である．(8.20) と帰納法の仮定から，

$$\text{(8.22)}\quad t_i^{\mathfrak{A}}([c_1], ..., [c_n]) = [c_i^*],\; i = 1, ..., m \qquad \text{Henkin-11}$$

となるから，

$$\text{(8.23)}\quad t^{\mathfrak{A}}([c_1], ..., [c_n]) = f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}([c_1], ..., [c_n]), ..., t_m^{\mathfrak{A}}([c_1], ..., [c_n])) = f^{\mathfrak{A}}([c_1^*], ..., [c_m^*]) \qquad \text{Henkin-12}$$

である．ここで，

$$\begin{aligned} & \text{“}c \equiv t(c_1, ..., c_n)\text{”} \in \tilde{T} \\ \Leftrightarrow\; & \text{“}c \equiv f(c_1^*, ..., c_m^*)\text{”} \in \tilde{T} && \text{; (8.21) と 補題 8.11,(b) による} \\ \Leftrightarrow\; & [c] = f^{\mathfrak{A}}([c_1^*], ..., [c_m^*]) && \text{; } f^{\mathfrak{A}} \text{ の定義} \\ \Leftrightarrow\; & [c] = t^{\mathfrak{A}}([c_1], ..., [c_n]) && \text{; (8.23) による} \end{aligned}$$

となる．

(b): 補題 8.11, (c) により，$c_i^* \in C$, $i = 1, ..., n$ を

(8.24) “$c_i^* \equiv t_i(c_1, ..., c_m)$” $\in \tilde{T}$, $i = 1, ..., n$ Henkin-13

となるようにとれる．このとき，(a) により，

(8.25) $[c_i^*] = t_i^{\mathfrak{A}}([c_1], ..., [c_m])$, $i = 1, ..., n$ Henkin-14

となる．したがって，

$$
\begin{array}{lll}
& \text{“}r(t_1(c_1, ..., c_m), ..., t_n(c_1, ..., c_m))\text{”} \in \tilde{T} & \\
\Leftrightarrow & \text{“}r(c_1^*, ..., c_n^*)\text{”} \in \tilde{T} & ;\ (8.24)\ \text{と補題}\ 8.11, (f) \\
\Leftrightarrow & \langle [c_1^*], ..., [c_n^*] \rangle \in r^{\mathfrak{A}} & ;\ r^{\mathfrak{A}}\ \text{の定義による} \\
\Leftrightarrow & \langle t_1^{\mathfrak{A}}([c_1], ..., [c_m]), ..., t_n^{\mathfrak{A}}([c_1], ..., [c_m]) \rangle \in r^{\mathfrak{A}} & ;\ (8.25)\ \text{による}
\end{array}
$$

である． （証明終）

次の補題により 命題 8.6 の証明が完了する:

Henkin-model

補題 8.13 $\tilde{T}$ を T の Henkin 拡大として，$\mathfrak{A}$ を上のようにして構成された Henkin モデルとする．このとき，任意の L'-文 φ に対し，$\mathfrak{A} \models \varphi \Leftrightarrow \varphi \in \tilde{T}$ である．特に $\mathfrak{A}$ から C の元の解釈を取り去ることで得られる L-構造 $\mathfrak{A} \restriction L$ は T のモデルである．

証明． L-論理式 $\varphi = \varphi(x_1, ..., x_n)$ の構成に関する帰納法で，

(8.26) すべての $c_1, \ldots, c_n \in C$ に対し， Henkin-15

$$\mathfrak{A} \models \varphi([c_1], ..., [c_n]) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(c_1, ..., c_n) \in \tilde{T}$$

となることを示せばよい．

φ が $t(x_1, ..., x_n) \equiv t'(x_1, ..., x_n)$ という形をしているときには，$c, c' \in C$ を

(8.27) “$c \equiv t(c_1, ..., c_n)$”, ‘$c' \equiv t'(c_1, ..., c_n)$ ” $\in \tilde{T}$ Henkin-16

となるようにとると，

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{A} \models \varphi([c_1], \dots, [c_n]) \\
\Leftrightarrow \quad & t^{\mathfrak{A}}(c_1, \dots, c_n) = t'^{\mathfrak{A}}(c_1, \dots, c_n) && ;\models \text{ の定義} \\
\Leftrightarrow \quad & [c] \equiv [c'] && ;(8.27) \text{ と補題 } 8.12, \text{(a) による} \\
\Leftrightarrow \quad & \text{“}c \equiv c'\text{”} \in \tilde{T} && ;\sim \text{ の定義} \\
\Leftrightarrow \quad & \text{“}t(c_1, \dots, c_n) \equiv t'(c_1, \dots, c_n)\text{”} \in \tilde{T} && ;\text{補題 } 8.11, \text{(d) による} \\
\Leftrightarrow \quad & \text{“}\varphi(c_1, \dots, c_n)\text{”} \in \tilde{T}
\end{aligned}
$$

となるからよい．

φ が，ある m-変数の $r \in R$ に対し，$r(t_1(x_1, \dots, x_n), \dots,)t_m(x_1, \dots, x_n)$ という形をしているときには，

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{A} \models \varphi([c_1], \dots, [c_n]) \\
\Leftrightarrow \quad & \langle t_1^{\mathfrak{A}}([c_1], \dots, [c_n]), \dots, t_m^{\mathfrak{A}}([c_1], \dots, [c_n]) \rangle \in r^{\mathfrak{A}} && ;\models \text{ の定義} \\
\Leftrightarrow \quad & \text{“}r(t_1(c_1, \dots, c_n), \dots, t_m(c_1, \dots, c_n))\text{”} \in \tilde{T} && ;\text{補題 } 8.12, \text{(b) による} \\
\Leftrightarrow \quad & \text{“}\varphi(c_1, \dots, c_n) \in \tilde{T}
\end{aligned}
$$

によりよい．

$\varphi = \neg\psi$ で ψ に対しては (8.26) が成立するとき．このときには，

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{A} \models \varphi([c_1], \dots, [c_n]) \\
\Leftrightarrow \quad & \mathfrak{A} \not\models \psi([c_1], \dots, [c_n]) && ;\models \text{ の定義} \\
\Leftrightarrow \quad & \psi(c_1, \dots, c_n) \notin \tilde{T} && ;\text{帰納法の仮定による} \\
\Leftrightarrow \quad & \neg\psi(c_1, \dots, c_n) \in \tilde{T} && ;\text{補題 } 8.11, \text{(g) による} \\
\Leftrightarrow \quad & \varphi(c_1, \dots, c_n) \in \tilde{T}
\end{aligned}
$$

となるからよい．

φ が $(\psi \vee \eta)$, $(\psi \wedge \eta)$, $(\psi \to \eta)$ の形をしていて，ψ, η に対しては (8.26) が成立している場合の証明も，それぞれ 補題 8.11, (h), (i), (j) を用いて上と同様に行なえる．

φ が $\exists x \psi(x, x_1, \dots, x_n)$ の形をしていて，ψ に対しては (8.26) が成立しているときには，

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{A} \models \varphi([c_1], \dots, [c_n]) \\
\Leftrightarrow \quad & \text{ある } c \in C \text{ に対し，} \mathfrak{A} \models \psi([c], [c_1], \dots, [c_n]) && ;\models \text{ の定義による} \\
\Leftrightarrow \quad & \text{ある } c \in C \text{ に対し，} \psi(c, c_1, \dots, c_n) \in \tilde{T} && ;\text{帰納法の仮定による} \\
\Leftrightarrow \quad & \text{“}\exists x \psi(x, c_1, \dots, c_n)\text{”} \in \tilde{T}
\end{aligned}
$$

となるからよい．最後の “⇔” については，“⇒” は，代入公理と補題 7.2 により，“⇐” は (8.11) によりよい． （証明終）

9 完全性定理の応用と完全性定理の拡張

anwendunegen-des-vollst satzes

前の節では，可算な言語に対して完全性定理を証明したが，選択公理，あるいはそれと同値であることが知られている整列公理と呼ばれる集合論の公理を用いると，必ずしも可算でない言語に対しても完全性定理が証明できる．ただし，命題論理のコンパクト性でと同様に，ここでも実際に必要なのは，素イデアル定理とよばれる選択公理より弱い原理の仮定だけで十分である (このことは超巾を用いる証明で見ることができる)．

命題論理のコンパクト性と同様の定理は述語論理に対しても成り立つ．

定理 9.1 (述語論理のコンパクト性定理) T を任意の言語 L 上の理論とするとき，T のすべての有限部分集合がモデルを持てば，T 自身もモデルを持つ．

証明． T をすべての有限部分集合がモデルを持つような L-理論とするとき，補題 8.2 により，T のすべての有限部分集合は無矛盾である．したがって，(無矛盾性の定義から) T 自身も無矛盾となるから，命題 8.6 により，T はモデルを持つことがわかる． （証明終）

上のように理論 T のすべての有限部分集合がモデルを持つとき，T は**有限充足可能** (*finitely satisfiable*) である，と言うことにする．

コンパクト性定理は非常に広範囲な応用を持つ定理である．以下にこの定理の応用のいくつかの例を挙げておく:

定理 9.2 L を任意の言語とする，このとき，任意の L-構造 $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ に対し，

$$\mathfrak{A} \models \varphi \;\Leftrightarrow\; A \text{ は有限} \tag{9.1}$$

compact-0

となるような L-文 φ は存在しない．

証明． もしそのような文 φ が存在したとすると，(9.1) により，

$$T = \{\varphi\} \cup \{c_i \not\equiv c_j \,:\, i, j \in \mathbb{N}, i \neq j\}$$

は有限充足可能である．ただし c_i, $i \in \mathbb{N}$ は L に現れない新しい定数記号とする．このとき T のモデル $\tilde{\mathfrak{A}}$ が存在するが，$\tilde{\mathfrak{A}}$ から c_i, $i \in \mathbb{N}$ の解釈を取り除いて得られる構造 $\mathfrak{A}$ は，φ を満たす L-構造になっている．$\mathfrak{A}$ で，c_i, $i \in \mathbb{N}$ はそれぞれ A の異る元に解釈されているで，A は無限であるが，これは (9.1) での φ の仮定に矛盾である．　　（証明終）

第 II 部

決定可能な理論と不完全性定理

partII

10　理論の決定可能性

decidability

S を可算な記号の集合とするとき S^* で S の要素からなる記号の有限列の全体をあらわすことにする．$A \subseteq S^*$ が決定可能とは，すべての $t \in S^*$ に対し，$t \in A$ が成り立つかどうかを判定する一つのアルゴリズムが存在することとする．

たとえば，L を可算な言語として[24]，$S = S(L) := \{`\neg', `\wedge', `\vee', ...\} \cup Var \cup L$ とする．このとき, $Sent_L \subseteq Fml_L \subseteq S^*$ である．

補題 10.1 Fml_L も $Sent_L$ も決定可能である．

たとえば，Fml_L に関しては，論理の定義に対応するような $\varphi \in Fml_L$ を判定する再帰的プログラムを書くことができることから，これが決定可能であることがわかる．

$\mathfrak{A}$ を数学で頻繁に用いられる canonical な構造の一つとする．L を $\mathfrak{A}$ の言語とするとき，$Th(\mathfrak{A}) = \{\varphi \in Sent_L : \mathfrak{A} \models \varphi\}$ だった．ここで，

(10.1)　$Th(\mathfrak{A})$ は決定可能か？ decidable-0

という問いは数学的に重要なものに思える．以下の章で，いくつかの canonical な数学的構造 $\mathfrak{A}$ に対する，この問いの答えについて論じる．

ここでは，以下の章で論ずることになる数学的構造を含むいくつかの構造 $\mathfrak{A}$ での (10.1) の答えのリストを与えておくことにする．

S で $\mathbb{N}$ 上の successor function を表わすことにする．つまり，

$$S : \mathbb{N} \to \mathbb{N};\ n \mapsto n + 1$$

とする．

(10.2)　$Th(\langle \mathbb{Q}, < \rangle)$ は決定可能である — 第 11.2 節 を参照． dec-0

(10.3)　$Th(\langle \mathbb{N}, 0, +, S, < \rangle)$ は決定可能である — 第 11.4 節 を参照． dec-1

(10.4)　$Th(\langle \mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot \rangle)$ は決定可能である — 第 11.5 節 を参照． dec-2

(10.5) $\mathit{Th}(\langle \mathbb{N}, 0, +, \cdot, S, < \rangle)$ は決定不可能である — これはゲーデルの不完全性定理の帰結の 1 つである: 第 12 節 と，第 15 節 を参照. dec-3

(10.6) $\mathit{Th}(\langle \mathbb{Q}, 0, +, \cdot, S, < \rangle)$ は決定不可能である — $\mathbb{N}$ が $\langle \mathbb{Q}, 0, +, \cdot, S, < \rangle$ で定義可能であること (Julia Robinson の定理) を用いるとゲーデルの不完全性定理から導かれる. dec-4

上の事実の応用の 1 つとして，(10.4), (10.5), (10.6) により，$\mathbb{N}$ や $\mathbb{Q}$ は $\langle \mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot \rangle$ で定義可能でないことがわかる．もし $\mathbb{N}$ や $\mathbb{Q}$ が $\langle \mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot \rangle$ で定義可能だとすると，$\mathit{Th}(\langle \mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot \rangle)$ が決定可能であることから，$\mathit{Th}(\langle \mathbb{N}, 0, +, \cdot, S, < \rangle)$ や $\mathit{Th}(\langle \mathbb{Q}, 0, +, \cdot, S, < \rangle)$ も決定可能となってしまうからである．

11 決定可能な理論

decidable-theories

11.1 構造 $\mathfrak{A}$ の公理系

axioms

L を言語として $S = S(L)$ とする．$\mathfrak{A}$ を L-構造とするとき，$T \subseteq \mathit{Th}(\mathfrak{A})$ が $\mathfrak{A}$ の（1 階の述語の論理での）公理系であるとは，

$$\mathit{Cn}(T) = \mathit{Th}(\mathfrak{A})$$

となることとする．ただし $\mathit{Cn}(T) = \mathit{Cn}_L(T) = \{\varphi \in \mathit{Sent}_L : T \models \varphi\}$ である．完全性定理により，$\mathit{Cn}(T) = \{\varphi \in \mathit{Sent}_L : T \vdash \varphi\}$ でもあることに注意しておく．明らかに $\mathit{Th}(\mathfrak{A})$ 自身は $\mathfrak{A}$ の公理系である．

補題 11.1 $\mathfrak{A}$ が決定可能な公理系を持てば，$\mathit{Th}(\mathfrak{A})$ は決定可能である．

証明. T を決定可能な $\mathfrak{A}$ の公理系とする．T の決定可能性と証明の概念の定義から S^* の要素の有限列が，与えられた L-論理式 φ の T からの証明になっているかどうかを判定するアルゴリズムが存在することがわかる．S^* の要素の有限列の全体を B_0, B_1, B_2,... と枚挙しておき，

> B_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$ を順に調べていって，ある n に対して，B_n が φ または $\neg\varphi$ の T からの証明になっているときに停止して，B_n が φ の T からの証明なら，$\varphi \in \mathit{Th}(\mathfrak{A})$ と判定し，そうでなければ，$\varphi \notin \mathit{Th}(\mathfrak{A})$ と判定する，

[24] これ以降，特に断らない限り，考察する言語はすべて可算とする．

というアルゴリズムを考えると，これは，$\varphi \in \mathit{Th}(\mathfrak{A})$ の判定アルゴリズムとなっていることがわかる．特に，$\mathit{Cn}(T) = \mathit{Th}(\mathfrak{A})$ だから，このアルゴリズムに従う判定手続きはどの論理式 φ に対しても必ず有限回の後に停止する[25)]．　（証明終）

11.2 $\mathit{Th}(\langle \mathbb{Q}, < \rangle)$ と $\mathit{Th}(\langle \mathbb{N}, 0, S \rangle)$ の決定可能性

rationals

11.3 量化子の除去

quantifier-elimination

11.4 Presburger 算術

presburger

11.5 $\mathit{Th}(\langle \mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot \rangle)$ の決定可能性

reals

12 不完全性定理の概要

overview

$\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, 0, +, \cdot, E, S, < \rangle$ とする．ただし，$+, \cdot$ はそれぞれ自然数の加算，乗算で，E は自然数上の冪乗 ($E(x, y) = x^y$) をあらわし，S は successor function ($n \mapsto n+1$) をあらわすものとする．また $<$ は通常の数の大小関係である．この構造に対応する，定数記号; 2 変数関数記号; 1 変数関数記号; 2 変数関係記号を，簡単のため，同じ，0; $+$, $\cdot$, E; S; $<$ であらわすことにして，これらの記号からなる言語を L_A とよぶことにする[26)]．

すぐに分るように，$x < y$ は，たとえば，$\exists z (z \not\equiv 0 \wedge y \equiv x + z)$ で代用することができる．つまり，この論理式を $\varphi(x, y)$ と書くことにすると，

$$\mathfrak{N} \models \forall x \forall y \, (x < y \leftrightarrow \varphi(x, y))$$

が成り立つ．したがって，$<$ は $\mathfrak{N}$ で余分なものになっているとも言えるのだが，$x < y$ が量化子を用いないで表現できるようになっていることで，論理式で表現できる $\mathfrak{N}$ 上の関係の表現論理式の複雑さに関する議論がスムーズに行なえるようになるため，$\mathfrak{N}$ の構造や，言語 L_A に加えられている．

実は，$\mathfrak{N}$ の演算 E も，$\mathfrak{N}$ の reduction である $\mathfrak{N}_M = \langle \mathbb{N}, 0, +, \cdot, S, < \rangle$ で定義可能なので[27)]，以下の議論では実はこれを用いずに直接 $\mathfrak{N}_M$ に関する議論として記

25) ただし，このアルゴリズムは一般には全く実用的なものではない．特に，ここでの「有限回」は上限の評価の与えようのなさそうなものとなっていることに注意する．つまり，ここでは，アルゴリズムの存在が問題とされていて，それが feasible であるかどうかの議論は全くしていない．

26) “A” は “arithmetic” の頭文字である．

27) $\mathfrak{N}_M$ の M は multiplicative の頭文字のつもりである．

述することも可能である．E をわざわざ加えたのは，$\mathfrak{N}_M$ での E の定義がかなり複雑なものになるため[28)]，議論の展開を E なしで行なおうとすると，議論の最初の部分での細部がより技術的になってしまうため，本質的な点にたどりつくまでに時間がかかってしまいすぎる恐れがあるからである[29)]．

successor 関数も，$+$ を使って定義できるが，この関数記号があることによって，数 n をあらわす数表記 (numeral) としての，L_A-項

$$\underbrace{S(S(\cdots(S}_{n\text{ 個}}(0\underbrace{)\cdots))}_{n\text{ 個}}$$

を使うことができる，ということが，1 変数関数記号 S を言語に加えている理由である．以下では，この L_A-項のことを $S^n(0)$ と略記することにする．

$\mathfrak{N}$ で (述語論理の論理式として) 表わせる数学的命題の範囲は，一見したときの印象よりずっと広いものになる．実際，第 14 節 で導入されるテクニックを用いると，初等数論の概念や命題は (ほとんど?) すべて $\mathfrak{N}$ 上で (したがって $\mathfrak{N}_M$ 上でも)，述語論理の論理式として表現できる．

例 12.1 (a) L_A の論理式 $\varphi = \varphi(z)$ を

$$(z \not\equiv 0 \land \forall x \forall y (x \cdot y \equiv z \to (x \equiv S(0) \lor y \equiv S(0))))$$

と定義すると,「$\mathfrak{N} \models \varphi(n) \Leftrightarrow n$ は素数」である．

(b) L_A の論理式 $\psi = \psi(z)$ を，

$$\forall u \forall v \forall w\, ((u \not\equiv 0 \land v \not\equiv 0) \to E(u,z) + E(v,z) \not\equiv E(w,z))$$

とすれば，$n \geq 3$ に対して,「$\mathfrak{N} \models \psi(n) \Leftrightarrow n$-次方程式に対する Fermat の定理が成り立つ」 となる．したがって，

$$\forall z\, (z > S(S(0)) \to \psi(z))$$

は Fermat の定理が成立することを主張する L_A-文になっている (つまり，この論理式が $\mathfrak{N}$ で成り立つことと Fermat の定理が成り立つことは同値である)[30)]．

---

28) 一番自然なやり方は第 14 節の後半で述べることになるような数列や記号列を数でコーディングするテクニックの $\mathfrak{N}_M$ 版を用いる方法である．

29) ついでに言うと，$\mathfrak{N}$ では，$+$ は $\cdot$ と E から定義することもできる (演習)．

30) "$z > S(S(0))$" は "$\exists u(u \not\equiv 0 \land z \equiv S(S(0)) + u)$" により表現することができる．

第 14 節 で述べることになるように，$L_A \cup \mathsf{Var} \cup \{\neg, \wedge, \vee, ...\}$ 上の 有限の長さの記号列，またはそのような記号列の有限列 $\bar{s}$ に対して，数 $\#\bar{s}$ を effective に対応させる方法が導入できる (このような $\#\bar{s}$ を $\bar{s}$ の *Gödel number* とよぶことにする)．さらに，第 14 節 で導入されるこの対応は，逆に数 n が与えられると，それがある有限長の記号列 (あるいは有限長の記号列の有限列) の Gödel number になっているかどうかが判定でき，そうである場合には，$\#\bar{s} = n$ となるような記号列 (あるいは記号列の有限列) $\bar{s}$ を一意に逆構成できるようなものになっている．このことと，第 14 節 で見ることになるいくつかの性質を仮定すると，不完全性定理の弱い形のものとなっている，次の定理 12.1 の証明を与えることができる．

16 ページで導入した記法により，$\mathit{Th}(\mathfrak{N}) = \{\varphi : \varphi$ は L_A-文で， $\mathfrak{N} \models \varphi\}$ である．$A \subseteq \mathbb{N}$ が $\mathfrak{N}$ で **定義可能** (*definable*) とは， L_A-論理式 $\varphi = \varphi(x)$ で，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対し，

$$(12.1)\quad n \in A \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \varphi(S^n(0))$$ b-0

となるようなものが存在することである．

Goedel-1

定理 12.1 $A \subseteq \mathit{Th}(\mathfrak{N})$ で，$\{\#\alpha : \alpha \in A\}$ が $\mathfrak{N}$ で定義可能とする．このとき L_A-文 σ で $\mathfrak{N} \models \sigma$ だが， $A \not\vdash \sigma$ となるものが必ず存在する．

証明． 次の ternary relation R を考える．

$$(12.2)\quad R = \{\langle a, b, c\rangle \in \mathbb{N}^3 : a \text{ はある } L_A\text{論理式 } \alpha = \alpha(x) \text{ の Gödel number で，} c \text{ は } \alpha(S^b(0)) \text{ の } A \text{ からの導出の Gödel number である}\}.$$ goedel-0

A が定義可能で，coding が第 14 節で見るようなやりかたで導入されていることから (ここでは第 14 節で述べることになる内容を先取りして仮定している)，R は定義可能である．つまり，L_A-論理式 $\rho = \rho(v_1, v_2, v_3)$ で，任意の数 $a, b, c \in \mathbb{N}$ に対し，$R(a, b, c) \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \rho(S^a(0), S^b(0), S^c(0))$ となるようなものがとれる．

ここで

$$(12.3)\quad \forall v_3 \neg\rho(x, x, v_3)$$ goedel-1

を考える．q をこの論理式の Gödel number として， σ を

$$(12.4)\quad \forall v_3 \neg\rho(S^q(0), S^q(0), v_3)$$ goedel-2

とする．この σ が定理で求めているような性質を持つことを示す．

まず，$A \not\vdash \sigma$ を背理法で示す．もし $A \vdash \sigma$ とすると，σ の A からの証明 P が存在する．$k = \#P$ とすると，(12.4) により，σ は q のコードしている (12.3) の論理式の自由変数 x に $S^q(0)$ を代入して得られる論理式だから，R と ρ のとり方から，

$$(12.5)\quad \mathfrak{N} \models \rho(S^q(0), S^q(0), S^k(0))$$ goedel-3

である．一方 $A \vdash \sigma$ から，$A \vdash \neg\rho(S^q(0), S^q(0), S^k(0))$ だが，$A \subseteq \mathit{Th}(\mathfrak{N})$ だったから，$\mathfrak{N} \models \neg\rho(S^q(0), S^q(0), S^k(0))$ となるが，これは，(12.5) に矛盾である．したがって $A \not\vdash \sigma$ でなくてはならないことがわかる．

一方 $A \not\vdash \sigma$ から，すべての $k \in \mathbb{N}$ に対し，k は σ の証明をコードする Gödel number になっていないから，$\mathfrak{N} \models \neg\rho(S^q(0), S^q(0), S^k(0))$ が成り立つことがわかる．したがって，

$$\mathfrak{N} \models \forall v_3 \neg\rho(s^q(0), s^q(0), v_3)$$

である．つまり $\mathfrak{N} \models \sigma$ となっている．　**(証明終)**

この定理から,「真理の定義不可能性」として知られる Tarski の定理が導かれる．

Goedel-2

系 12.2 (真理の定義不可能性定理) $\#\mathit{Th}(\mathfrak{N}) = \{\#\tau : \tau$ は L_A-文で $\mathfrak{N} \models \tau\}$ は $\mathfrak{N}$ で定義できない．

証明． $\mathit{Th}(\mathfrak{N})$ は完全だから (つまり，任意の L_A-文 φ に対し $\varphi \in \mathit{Th}(\mathfrak{N})$ または $\neg\varphi \in \mathit{Th}(\mathfrak{N})$ のどちらかが成り立つから)，定理 12.1 でのような σ を持ちえない．したがって，もし $\#\mathit{Th}(\mathfrak{N})$ が $\mathfrak{N}$ で定義可能だとすると，定理 12.1 に矛盾する．　**(証明終)**

系 12.2 には，次のような対角線論法による直接証明を与えることもできる:

定理 12.1 の証明での R の定義 (12.2) を変形して，

$$(12.6)\quad P = \{\langle a, b\rangle \in \mathbb{N}^2 : a \text{ はある } L_A\text{論理式 } \alpha = \alpha(x) \text{ の Gödel number で，} \mathfrak{N} \models \alpha(S^b(0)) \text{ である }\}.$$ goedel-4

とする．P が定義可能でないことを示せばよい．

$a \in \mathbb{N}$ に対し，

$$(12.7)\quad P_a = \{b \in \mathbb{N} : \langle a, b\rangle \in P\}$$ goedel-5

とする．a がある L_A-論理式 $\varphi_a = \varphi_a(x)$ の Gödel number になっているときには，

$$P_a = \{b \in \mathbb{N} : \mathfrak{N} \models \varphi_a(S^b(0))\} \tag{12.8}$$ goedel-6

である．つまり P_a は論理式 φ_a で定義される $\mathfrak{N}$ の部分集合となっている．ここで，

$$H = \{b \in \mathbb{N} : \langle b, b\rangle \notin P\} \tag{12.9}$$ goedel-7

とすると[31)]，H はどの P_a とも異るから，$\mathfrak{N}$ で定義可能でない．ここで，もしも P が定義可能だったとすると，H も定義可能となってしまうから，矛盾である．したがって，P は定義可能でないことがわかる． **（証明終）**

13　弱い算術の体系

weak-arith

以下，第 15 節までの節では，第 12 節で述べた証明の細部を埋め，第 12 節での完全性定理をさらに拡張したものの証明を行なう．第 12 節での議論は $Th(\mathfrak{N})$, あるいはこれが定義できるために当然前提となる構造 $\mathfrak{N}$ の存在という，“数学的フィクション” の上に立つものとなっていたが，以下では，この議論から $Th(\mathfrak{N})$ への言及を段階的に取り除いてゆく．最終的には $Th(\mathfrak{N})$ への言及の役割は，モティヴェーションの説明や直観的理解のための助けとしてのみ残ることになる．ただし，この代償として，不完全性定理の有名な言いまわし「正しいが証明できない命題が存在する」は,「公理系から独立な命題が存在する」と言い換えなくてはならなくなるのだが.

14　論理のコーディング

coding

15　不完全性定理

incompleteness

31) ここでの H に関する議論は，カントルの対角線論法での，実数の加算列に含まれない新しい実数の構成法と同じアイデアによるものになっていること注意する．