数理論理学　6月20日の講義での演習問題

担当:　渕野 昌 **2012年06月20日**

以下の問題をできるだけ自力で解いてください

この演習の問題用紙は,

`http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/kobe/suurironrigaku-ss12-exercise.pdf`

としてダウンロードできます.

---

1. $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle$ とするとき，次を満たすような $\varphi_0, ..., \varphi_4$ を求めよ:

(a) すべての $r \in \mathbb{R}$ に対し， $\mathfrak{A} \models \varphi_0(r) \Leftrightarrow r = 0$.

(b) すべての $r \in \mathbb{R}$ に対し， $\mathfrak{A} \models \varphi_1(r) \Leftrightarrow r = 1$.

(c) すべての $r \in \mathbb{R}$ に対し， $\mathfrak{A} \models \varphi_2(r) \Leftrightarrow r > 0$.

(d) すべての $r, s \in \mathbb{R}$ に対し， $\mathfrak{A} \models \varphi_3(r, s) \Leftrightarrow r \leqq s$.

(e) すべての $r, s \in \mathbb{R}$ に対し， $\mathfrak{A} \models \varphi_4(r, s) \Leftrightarrow 0 < r$ かつ $\sqrt[3]{r} < s$.

(f) すべての $r, s, t \in \mathbb{R}$ に対し， $\mathfrak{A} \models \varphi_5(r, s, t) \Leftrightarrow$ 方程式 $rx^2 + sx + t = 0$ は2つの異る実解を持ち，2つの実解の差は $\sqrt{3}$ より大きい.

2. L を任意の言語として $\mathfrak{A} = \langle A, \cdots \rangle$ と $\mathfrak{B} = \langle B, \cdots \rangle$ を同型な L-構造として，$g : A \to B$ を $\mathfrak{A}$ から $\mathfrak{B}$ への同型写像とする．このとき，任意の L-項 $t = t(x_0, ..., x_{n-1})$ に対し,

$$g(t^{\mathfrak{A}}(a_0, ..., a_{n-1})) = t^{\mathfrak{B}}(g(a_0), ..., g(a_{n-1}))$$

が成り立つことを，t の構成に関する帰納法で示せ.

3. L を任意の言語として $\mathfrak{A} = \langle A, \cdots \rangle$ と $\mathfrak{B} = \langle B, \cdots \rangle$ を同型な L-構造として，$g : A \to B$ を $\mathfrak{A}$ から $\mathfrak{B}$ への同型写像とする．このとき，任意の L-論理式 $\varphi = \varphi(x_0, ..., x_{n-1})$ と $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$ に対し,

$$\mathfrak{A} \models \varphi(a_0, ..., a_{n-1}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{B} \models \varphi(g(a_0), ..., g(a_{n-1}))$$

が成り立つことを φ の構成に関する帰納法で示せ.

4. L を言語として Γ を L-理論として ψ L-論理式とする．$\Gamma \models \psi$ とは，任意の L-構造 $\mathfrak{A} = \langle A, \cdots \rangle$ に対して，$\mathfrak{A} \models \Gamma$ ならすべての変数記号の解釈 $I : Var \to A$ に対し，$\langle \mathfrak{A}, I \rangle \models \psi$ が成り立つことだった．特に，L-文 φ に対し，$\Gamma = \{\varphi\}$ のとき $\Gamma \models \psi$ を，$\varphi \models \psi$ とあらわし，$\Gamma = \emptyset$ のとき $\Gamma \models \psi$ を $\models \psi$ とあらわす.

(1) $\Gamma \models \psi \Leftrightarrow \Gamma \models \forall x \psi$ を示せ.

(2) $\varphi \models \psi \Leftrightarrow \models (\varphi \to \psi)$ となることを示せ．ただし，ここでは φ は L-文とする.

(3) $\models (\varphi \to (\psi \to \varphi))$ が任意の L-論理式 φ, ψ に対し成り立つことを示せ.

以上.