数理論理学　期末試験

担当:　渕野 昌　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　2012 年 08 月 01 日

以下の問題を解いてください．ただし，解答は，できるだけ，答がなぜ答になっているかの説明がされているようなものにしてください．
答だけが説明なしに書かれていても解答とは見なさせないこともあるので注意してください．

$\boxed{1}$ $L = \{0, 1, +, \cdot\}$ として，L-構造 $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, 0, 1, +, \cdot \rangle$ を考える．このとき，

(a) $\mathcal{N} \models \varphi(m, n) \Leftrightarrow m \leqq n$
がすべての $m, n \in \mathbb{N}$ に対して成り立つような L-論理式 $\varphi = \varphi(x, y)$ を与えよ．

(b) $\mathcal{N} \models \varphi(m, n) \Leftrightarrow m$ は n の倍数
がすべての $m, n \in \mathbb{N}$ に対して成り立つような L-論理式 $\varphi = \varphi(x, y)$ を与えよ．

(c) $\mathcal{N} \models \varphi(\ell, m, n) \Leftrightarrow \ell$ は m と n の最小公倍数
がすべての $\ell, m, n \in \mathbb{N}$ に対して成り立つような L-論理式 $\varphi = \varphi(x, y, z)$ を与えよ．

(a): たとえば，$\varphi(x, y) = \exists z\, y \equiv x + z$ **とすればよい．**

(b): たとえば，$\varphi(x, y) = \exists z\, x \equiv y \cdot z$ **とすればよい．**

(c): たとえば，最小公倍数の定義を素直に論理式に翻訳して，
$\varphi(x, y, z) = \exists u\, x \equiv y \cdot u \wedge \exists u\, x \equiv z \cdot u \wedge \forall v(\text{“}v < x\text{”} \rightarrow (\neg\exists u\, v \equiv y \cdot u \vee \neg\exists u\, v \equiv z \cdot u))$ **とすればよい，ただし，**
“$v < x$” **は，たとえば** $\exists w\, x \equiv (v + (w + 1))$ **という** L**-論理式で表現されているものとする．**

$\boxed{2}$ f を 1 変数関数記号として，$L = \{0, 1, +, \cdot, f\}$ を考える．

(a) 任意の $f^* : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ と $a, b \in \mathbb{R}$ について，

$$\langle \mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, f^* \rangle \models \varphi[a, b] \Leftrightarrow f^*(a) \leq f^*(b) \text{ となる}$$

が成り立つような L-論理式 $\varphi = \varphi(x, y)$ を与えよ．

(b) 任意の $f^* : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ について，

$$\langle \mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, f^* \rangle \models \varphi \Leftrightarrow f^* \text{ の値は常に } 0 \text{ と異なり，関数 } \frac{1}{f^*(x)} \text{ は増加関数である}$$

が成り立つような L-文 φ を与えよ．

(a): たとえば，$\varphi(x, y) = \exists z\, f(y) \equiv f(x) + z \cdot z$ **とすればよい．**

(b): まず，(a) でと同じアイデアにより，$x \leq y$, $x < y$ **はここではそれぞれ** $\exists z\, y \equiv x + z \cdot z$, $\exists z\, (z \not\equiv 0 \wedge y \equiv x + z \cdot z)$
とあらわせることに注意して，
φ **を，**

$\forall x\, f(x) \not\equiv 0 \wedge$
$\forall x \forall y\, (\text{“}x \leq y\text{”} \rightarrow$
$((\text{“}f(x) \cdot f(y) > 0\text{”} \wedge \text{“}f(y) \leq f(x)\text{”}) \vee (\text{“}f(x) \cdot f(y) < 0\text{”} \wedge \text{“}f(x) \leq f(y)\text{”})))$

とすればよい．ただし，“…” とくくった部分は，上の $x \leq y$, $x < y$ **と同様なやり方で** L**-論理式にうまく翻訳するものとする．**

$\boxed{3}$ 右の真偽表を満たすような命題論理の論理式 $\varphi = \varphi(A, B)$ を作れ:

A	B	φ
1	1	0
1	0	1
0	1	0
0	0	0

$\neg$, $\wedge$, $\vee$ **が関数的完全であることの証明で右のような真偽表を持つ論理式を作るための一般的な方法を与えている．**

$\boxed{4}$ 以下では，K で，講義で用いたような，述語論理の
推論の体系をあらわす．

(a) 真偽表を作って，命題論理の論理式 $((A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A))$ がトートロジーであることを示せ．

(b) L を言語として，φ, ψ を任意の L-論理式とするとき，$((\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi))$ が K の公理であることを示せ．

(c) T を L-論理式として φ, ψ を L-論理式とする．$P = \langle \varphi_1, \dots, \varphi_p \rangle$ が K での $(\varphi \to \psi)$ の T からの証明であるとき，$P' = \langle \varphi_1, \dots, \varphi_p, \varphi_{p+1}, \varphi_{p+2} \rangle$ が K での $(\neg\psi \to \neg\varphi)$ の T からの証明になるような $\varphi_{p+1}, \varphi_{p+2}$ を求めよ．求めた P' がなぜ $(\neg\psi \to \neg\varphi)$ の証明になっているかを説明せよ．

(a): 略．(b): 命題論理のトートロジー $((A \to B) \to (\neg B \to \neg A))$ **を** $\eta(A, B)$ **とあらわすことにすると，述語論理の論理式** $((\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi))$ **は，**$\eta(\varphi, \psi)$ **とあらわせる．したがって，**$((\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi))$ **は** K **の公理（述語論理のトートロジー）になっていることがわかる．**

(c): P **は，**$(\varphi \to \psi)$ **の証明だから，**$\varphi_p = (\varphi \to \psi)$ **である．したがって，**φ_{p+1} **をトートロジー** $((\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi))$ **として，** φ_{p+2} **を** $(\neg\psi \to \neg\varphi)$ **とすれば，**φ_{p+2} **は** φ_p **と** φ_{p+1} **から三段論法によって得られる論理式になっている．したがって，この** $P' = \langle \varphi_1, \dots, \varphi_p, \varphi_{p+1}, \varphi_{p+2} \rangle$ **が求めるようなものになっていることがわかる．**

$\boxed{5}$ 次の定理の証明で，下線を引いた (1), (2), (3) の主張が正しいことの理由を説明せよ．

定理． (述語論理のコンパクト性定理) 任意の言語 L に対し，T を L-文の集まりとする．T のすべての有限部分集合がモデルを持つとき T 自身もモデルを持つ．

証明． T をすべての有限部分がモデルを持つような理論とすると，
<u>T のすべての有限部分は無矛盾である</u>(1) このことから，<u>T 自身も無矛盾であることがわかる</u>(2)
<u>したがって，T はモデルを持つ</u>(3)．

$\boxed{6}$ L を任意の言語とするとき，L-文 φ で，任意の L-構造 $\mathfrak{A} = \langle A, \cdots \rangle$ に対し，

$$\mathfrak{A} \models \varphi \iff A \text{ は有限}$$

となるようなものは存在しないことを証明せよ (ヒント: 6. のコンパクト性定理を用いて背理法で示す)．

$\boxed{5}$, $\boxed{6}$ **は最後の講義で説明している．** $\boxed{5}$ **は完全性定理の応用である．**