

美は一本の毛で男をひっぱるだろう

(1)
(2)

沢野 昌 (Sakae Fuchino)

April 30, 2018 (10時17分)

以下の文章は、「現代思想」2017年3月臨時増刊号、Vol.45-5、総特集＝知のトップランナー50人の美しいセオリーに収録された論説である。雑誌掲載では紙数の制限などのために削除した部分も再収録した。また、投稿／校正後の加筆訂正も含まれている。

1 美(学)としての数学？

私はこの小文で「あなたのお気に入り、深遠で、エレガントで、美しいセオリー（説明）は何ですか？」という設問に答えなくてはならない宿命を負っている。しかし、ここで問われている「お気に入り」というような個人の嗜好として、真善美の一要素としての美を語ってしまうことには、いささか抵抗を感じる。

一方、それでは個人の嗜好を超えた絶対的な美などというものはそもそもあるのだろうか。あるとすると（あるいはあると信じているとすると）、それは何であるのか、そして何であるべきか、というような問題に踏み込んでしまうと、この小文に課されている数制限内で書き終えることはとてもできないだろう。

私としては、そういう説明を一切省いてしまえば、「エレガントで、美しいセオリーは数学である」という表明で、この文章を終りにしてしまってもいいようにも思える。もちろん、もっと具体的な理論（セオリー）を挙げよ、と要請されたと

(1) これは、西脇順三郎の長詩『失われた時』(1960)「6」の中の一行である。筆者はこの詩行で、ブヌエルの『アンダルシアの犬』「1」の、男が縄でグロテスクなオブジェのぎっしりつまったグラウンドピアノを引っ張る有名なシーンを連想する(ブヌエル／ダリのイメージがグロテスクの美を体現しているのに比べて西脇のこの行は可憐で何かのエロティックな暗示も感じさせる)のだが、新倉[5][6]の詩行は、Alexander Pope (1688-1744) の“The Rape of the Lock”という英雄詩を模した風刺詩のCanto II、第2ストロークの終りにある“*And beauty draws us with a single hair*”から来るところと似ている。

(2) 筆者の神戸大学での同僚の菊池誠氏からは、本項の草稿に対する有用なコメントを頂いた。ここに感謝の意を表す。

したら、初等幾何学（ピタゴラスの定理）、ガロア理論、フェルマー定理にまつわる理論、など、他の数学者や数学の愛好者の多くも挙げるであろう理論に始まって、自分自身の研究により近いところでは、不完全性定理（とその周辺の理論（たとえば「4」を参照）やシェラハ（Saharon Shelah, 1945）の基数算術の理論（「8」ただし、このモノグラフ以降もこの理論は大きく進展している）など次々と挙げてゆくことができるだろうし、更にもうちよつと本音に近い言い方を許してもらえらるなら、自分が次に証明するであろう定理（とその証明）という答だっであり得る。しかし、こう各論を積み重ねてゆくと、結局のところ、最初に言った「数学である」という一般形の答にたどりついてしまいうしかなさそうである。

しかし、先程触れた（絶対的な）「美とは何か」という難問と同じように、数学とは何か」という問いだっって同じように一言では答えようのないものになっているとは言えないだろうか。何が数学と呼べるのか、という問題もあるが、それよりも前に、そもそも「数学」と言ったときに、それは紙の上に記述された「理論」を言っているのか、それとも紙の上に記述された数学を我々が理解したときに我々の思考の空間に展開される何かなのか、逆に紙の上に記述されているのは数学の単なる近似にすぎなくて、数学の本質は一部の例外的な才能を持つ人達の脳髄の中だけで展開されている何かでしかない、ということはないのか。あるいはもっとプラトニスティックな立場での「数学」という存在がどこかであって、我々の思考の中で展開される数学は、その本当の数学の有限近似にすぎないのではないのか。等々。

「美しいセオリーは数学である」という表明は、そういうような不定な概念の間の関係に関するステートメントとして、なんとも曖昧な、それだから逆にどうとでも解釈のできるものになってしまっているようにも思える。

それにもかかわらず、数学者たちが、「数学って美しいよね」というような話をするとき、そこには、個人の嗜好を超えた、共同幻影であるもの以上の実体があるようにも思える。しかも、この数学者の感覚は、彼／彼女の出身地や文化的な

背景などにもほとんど依存しないようである。

筆者は2016年の後半の多くの時間をバルセロナの郊外のベルラテラ（スペイン語の発音ではベヤテラ）という場所にあるバルセロナ自治大学のCRM数学研究所の客員研究員として過したのだが、この研究所での研究プログラムに参加していた数学者のなかには数学の哲学の研究にも携っている人が何人かいたため、雑談が数学の美に関する議論になることが何度かあった。そのような議論は、現代の *de facto lingua franca* であるところの英語で行なわれることが多い。今回の滞在では、そこにいるのは英語の母国語話者とそうでない人が半々というような状況が多かったのだが、そのような英語での談話で、筆者にとっての母国語や准母国語である日本語やドイツ語以外の言語でのコミュニケーションであるにもかかわらず、「数学の美」に関する議論が成立して、しかも、それがちゃんと噛み合っていてしまっていることが、とても不思議に思えた。

異なった文化背景を持つ数学者たちが数学の美に対する（ほとんど）共通の認識を持っている、というこの事実自身を、数学の美の重要な側面の一つと捉えてもいいような気さえしてくる。

2 美の条件

「美しいセオリーとしての数学」という表明自身は、前節に述べたような意味で、その意味していることの厳密な規定が容易でないとしても、我々が数学の何を美しいと感じるか、については、本稿に収まりきるような具体的な議論が可能かもしれない。

(1) 深淵な定理に容易に理解できる短い証明が与えられたとき、我々はそれを美しいと感じることが多いようである。ピタゴラスの定理（三平方の定理）に対して知られている多くの証明はそのようなものの例の一つだろう。

(2) 西脇順三郎は、「遠いものの連結」を詩の定義、乃至、詩学の主要な方法論

として彼の詩人としての生涯にわたって主張したが、この原理は数学理論の美の判定原理としても有効であるように思える。例えば、ガロアの理論の美しさは、この理論が体の拡大と自己同型群の部分群という二つの異なる見方の間の関係の確立(遠いものの連結)によって成り立っているということによる、と言ってよいだろう。「2」でも論じた「 K_4 Free 有限グラフで、エッジの2彩色のすべてに同色の三角形が存在する、ようなものが存在する」という定理のシエラハによる証明では、有限のオブジェクトに関するこの定理の証明に、集合論モデルのジエネリック拡大という、無限の数学に関する超数学が用いられている。この例に限らず、論理学 (logic) の手法が予期しないような方法で一般の数学に応用されたときに、その「遠いものの連結」としての美を感じることが多い、初等的部分モデル (elementary submodels) の応用はそのようなもの一つである。筆者は、最近、前ヒルベルト空間が正規直交基底を持たないこと(実際にそのような状況はありえることがハルモシユにより既に1970年代に示されている)の特徴付け定理を初等的部分モデルの手法を用いて証明した([3])。elementary submodels と超帰納法さえ知っていれば、すごく簡単にできる証明なのだが、それにもかかわらず(次の(3)を参照)、この定理は、筆者にとって、“普通の数学”の命題と論理学 (logic) を用いる証明、という遠いものの結合としての美的な体験でもあった。

(3) これは(1)とは真逆になってしまっただが、定理の証明や、理論の技術的な細部で、簡単には理解できないほど複雑で、精緻な展開がなされているとき、それを美しいと感じることがある。そのような例としては、前にも触れたフェルマーの定理の証明(証明は20世紀の数論の大きな展開と一体となっている)や、シエラハの基数算術の理論 (pcf-理論、これは通常の数学体系内で展開される理論だが、無矛盾性証明で得られた知見や技術を前提として、超巾や初等的部分モデルの手法を始めとする論理学 (logic) で確立された様々なテクニクを駆使する)を挙げることができるだろう。フェルマーの定理については、単純明快に記述できるこの定理の命題と、多くの数学的手法を駆使するその証明、という対比的な結合か

ら (2) に分類することもできるかもしれない。

(4) 得られた結果がそれまでの予想を大きく裏切るものであったときに、そのことの驚きが美をともなつて認識されることがある。たとえば、不完全性定理（とその周辺のいくつかの定理）はそのような驚愕の美の例と言えるだろう。(2) での「遠いものの結合」も、その予期しない結合に対する驚き、という意味でここに分類することもできるものも少なくない。

以上で論じたのは、確立された数学の定理や理論での美だが、数学者が研究を進めてゆくときの、定理（というよりその時点ではまだ仮説なわけだが）が証明されていったり、理論が確立されてゆくというプロセスの中での動的な数学の美というものもある。これについても上で述べた (1) ～ (4) に準じる議論が可能であろうが、この数学の確立のプロセスが、特に近代以降の数学では、複数の数学者の議論の中で進行することもある、という点を付け加えておきたい。数学の美は、この場合、黒板（白板？前述の RCM 研究所では“青板”だった）を前に議論をしている数人の数学者の共有する思考の空間の中に立ちのぼってゆくことになる。

(1) ～ (4) についてはそれぞれ更に議論したい点も多いのだが、紙数の制限のため、ここでは次の節で述べることに触れるにとどめる。

3 脳髓の憂鬱としての美

前節の (1) ～ (4) を見ると、これらはすべて人間の思考能力の容量と限界に関連していることがわかる。例えば、(3) では定理の証明や数学理論の複雑さが、我々の思考の限界ぎりぎり、あるいはそれを超えたところに設定されていることからくる、数学の精密さに対する畏敬に伴なう美感であるが、思考能力の容量と限界は、個人的な差が大きいので、何をそのような「緻密だが努力すれば何とか理解できるであろう数学」として認識できるかについては、人によって大きく異なるだろう。(1) では容易に理解できる証明の例としてピタゴラスの定理の証明を挙げ

だが、実際にはこれらの証明をむしろ「非常に複雑で難しい」と感じる人もいるかもしれない。

そう考えると、(1)と(3)の組は、手持ちの思考のリソースの異なる多くの人が、一定量の数学的結果を美しいと感じ得るための仕掛として機能していると言えるのかもしれない。

(3)の例としてシエラハの pcf 理論を挙げたが、多分現在生きている地球人の中で一番(しかもとびぬけて)数学的な能力の高いシエラハ自身の感じている、この理論の(少なくとも既に確立している部分についての)複雑さの感覚は我々が感じるものとは違うだろうし、だから、彼にとつてのこの理論の美は筆者を含めた凡庸な数学者の認識する美とは異なったものになっているはずである。

これに関連して、「7」に、シエラハが集合論⁽³⁾の

(3) 集合論はすべての数学を統一的に記述できる唯一の枠組であり、その意味で、ここでは数学と同一視してよいだろう。

興味の rating をつけている部分がある。この部分、その部分を見てみることにする。⁽⁴⁾

AXIS A: Source of interest	
1. foundations/applications to philosophy	!
2. applications to mathematics	!!!
3. historical reasons	!!!!
4. inner developments	!!!!
5. beauty	!!!!!!!!!!
6. proof with “bones” or at least “meat”	!!!!
7. generality	!!!!!!
8. sport (<i>added by popular demand</i>)	!!!

“beauty” に高い評価が与えられていて、その次に “generality” が来ているのは注目値する。この表の少し後に

As for beauty, I mean the beauty in a structure in which definitions, theorems and proofs have their part in the harmony; but complicated proofs do not bother me. As an undergraduate, I found Galois theory beautiful (more exactly, what is in the book of Birkhoff-Maclane), and later I found Morley’s theorem (with its proof) beautiful.

と書かれている。ここで、「複雑な証明も厭わない」とあるが、シエラハにとっての複雑な証明は、地球上のほとんどすべての人間にとって、複雑すぎてほとんど理解不能である、と断言してよい。シエラハの論文を読み込む技術や経験を持っている人が時間をかけて内容を十分に消化した末に「美しい」と思えるようになる

⁽⁴⁾ [7]の一種の続編とも言える [9]も参照されたい。[7]が集合論の研究者を讀者として想定しているのに対し、[9]で想定された讀者は一般の数学者である、とある。

るものであることが多いのである。ちなみに、引用した文の最後で触れられている「モーレイの定理(とその証明)」は、学部生だったころのシエラハがその少し後で『分類理論』(Classification Theory)とよばれる壮大な理論に拡張することになるモデル理論の定理である。

4 エピローグ——数学の絶対性と美について

数学が絶対的な“真理”を目指している学問であるため、「数学の美」もダイアモンドの結晶のような、人間の感情を寄せつけない冷たく完璧なものである、というようにとらえられがちなのではないかと思う。確かに我々が感じる数学の美は、たとえば大バツハのフーガを聞いたときに感じるような超越性と永遠の感覚をともしなしたものだ、前の二節で論じたように、数学の美の認識が、我々の知性の許容量と相対的であることから、我々は、数学の美を、もっと人間的な、ほのかな哀愁を帯びたものとしてさえ感じることになるのだと思う。

しかし美を論ずることは危険である。もう崖から落ちてしまった。特に、数学の美は、あくまでも数学のマシナリが全駆動しているその現場で論ぜられるべきもので、茶飲み話の種や酒のつまみのようなものとして論じるべきではないだろう——いいかげんな「数学談議」を嫌って「数学と美とは何の関係もない」と言いきつてしまう方がむしろいい場合さえあるようにも思える。

もう二十年以上も前に、「数学セミナー」誌で「数学と美」に関する特集があつた折、原稿の依頼を受けた新井敏康氏(現在は千葉大学の数学・情報数理学科に所属しておられる)が、『数学は美とは関係ない』という趣旨の記事を書きますが「いいですか」という意味のことを言つたところ、依頼を撤回された、と聞く。⁽⁵⁾私

(5)これは又聞き之又聞きなので、事実とは異なるかもしれないが、——と書いてから、気になったので、新井氏本人にここで御名前を出すことの許可を含めて問い合わせたところ、実際、新井氏の編集者に対するそのときの答は筆者の書いたものとは多少ニュアンスが異っていたようだということがわかった——いずれにしてもこれは新井氏の数学に対する毅然とした態度をよく表してい

は新井氏の捨てた「数学と美」を拾って一文を草した。

参考文献

- [1] Un chien andalou, 監督: Luis Buñuel, 台本: L. Buñuel et Salvador Dalí, (1929).
- [2] 渕野 昌、集合論(≡数学)の未解決問題、現代思想2016年10月臨時増刊号 総特集≡未解決問題集、109–129, (2016).
- [3] Sakae Fuchino, Pre-Hilbert spaces without orthonormal bases, submitted (<https://arxiv.org/pdf/1606.03869v2>).
- [4] 菊池 誠、不完全性定理、共立出版 (2016).
- [5] 新倉俊一、西脇順三郎全詩引喩集成、筑摩書房 (1982).
- [6] 西脇順三郎、西脇順三郎全集、筑摩書房 (1971-1983).
- [7] Saharon Shelah, The future of set theory, in: Haim Judah (ed.), *Set Theory of the Reals*, Israel Mathematical Conference Proceedings, Vol. 6, the Proceedings of the Bar Ilan Winter School (January 1991), (1993), 1–12. (<http://front.math.ucdavis.edu/math.LO/0211397>)
- [8] ———, Cardinal Arithmetic, Clarendon Press (Oxford, 1994).
- [9] ———, Logical Dreams, Bulletin of American Mathematical Society, 40 (2003), 203-228. (<http://front.math.ucdavis.edu/math.LO/0211398>)

る逸話だと思っ。