圏論と集合論

渕野 昌 (Sakaé Fuchino)

23年1月22日（09時39分）版

以下の文章は、**現代思想 2020 年現代思想 7 月号「特集＝圏論」**に寄稿した論説の拡張版である。雑誌掲載版では紙数の制限などのために削除した部分も復活させている。また、投稿後／校正後の加筆訂正も含まれる。このテキストの最新版は、`https://fuchino.ddo.jp/misc/category-vers-sets-2020-x.pdf` として download することができる。

目次

---

0) 本稿の内容は、筆者が研究代表者となっている科研費研究プロジェクト: 集合論的多世界宇宙の視点での連続体問題の解決、基盤研究 (C) (2020 – 2023) での研究計画とも密接な関連を持つものである。

本文にも御名前が引用されている A. Kanamori 氏には集合論の数学史に関するアドバイスをいただいた。また、やはり本文で御名前の出た、薄葉季路氏には、本稿のドラフトを読み込んで、いくつもの細かいミスの指摘をしていただいた. 御両人に感謝する.

1　数学の基礎と数学の基礎付け

「数学の基礎」と「数学の基礎付け」というのは、英語に戻すと、それぞれ basics of mathematics と foundation of mathematics であるが、これらは全く異なる概念である。しかし、これらの概念は日本語では混同されることが非常に多いのではないかと思う。「数学の基礎」は数学を学習／研究したり、応用したりするときに必要となる基礎知識／基礎概念、という意味で使われる（ことが多い）言葉であるのに対し、「数学の基礎付け」というのは、数学がいかなる基盤の上に成り立っているのかを研究する、ということを指している。現代の視点からは、この「基礎付け」の研究には、数学を行なうときの論理についての研究や、数学を行なっている我々の行為を外側から数学的に分析するための枠組（超数学 — meta-mathematics）の研究などが含まれる。ちなみに、一般向けの説明ではそのように記述されることは稀だが、（ゲーデルの）不完全性定理は、この超数学に関する定理である。[1)]

「数学の基礎」と「数学の基礎付け」という二つの表現は、意図的に混同されることもある。私は、1993 年に、（故）前原昭二先生の発案で企画がスタートしたヒルベルトとベルナイスの „Grundlagen der Mathematik“ の抄訳を吉田夏彦先生との共訳で上梓している。この本の企画の会議（そこには（故）廣瀬健先生も同席していらしたと思う）で、私は、訳本のタイトルは「数学の基礎付け」と訳さなくてはならない、と主張したのだが、「数学の基礎」とする方が、内容を勘違いして買う人が増えてよい、という理由で却下されてしまった。「偉い」先生の企画だったこともあったし、当時、ヨーロッパに住んでいて、日本の文化なんて所詮自分とは関係ない、という気分でもあったので、これに関して、それ以上強く踏み込むことはしなかった。結局、この訳本は前原先生の没後、彼の意向を汲んで、この「数学の基礎」という日本語の題で上梓されたが、これは、日本での「数学の

---

1) 「超数学」と「超数学に関する数学」は厳密に区別されないことが多いように思えるが、この区別も、もっと精密に行なうことが必要かもしれない。

基礎」と「数学の基礎付け」の更なる混同に、大きな寄与を果してしまったのではないかと恐れる。

しかし、この二つの概念は日本に限らず、混同されることが多いもののようである。「集合論を数学の基礎とする必要はない」、「集合論を数学の基礎とするのは時代遅れである」というような主張をする人たちがいるようなのだが、この人たちは（意図的にそうしているのかそうでないのかは微妙な気もするのだが、いずれにしても）、「数学の基礎」と「数学の基礎付け」を混同しているようである。また、このような人たちのなかには、「数学の基礎は集合論でなく、カテゴリー論（圏論）である」というような主張をする人もいるようである。

これらの主張での「数学の基礎」が、この節の初めで言ったような意味の「数学の基礎」なのなら、このような表明は、「趣味の問題」として大目に見ることもできるものだが、[2] それが「数学の基礎付け」を含む表明としてなされているとしたら、これは、数学についての主張として見たときには、単純に間違っている。そういう間違った意味でこれらの主張をしている、おかしな人たちを相手にするのは、時間の無駄でしかないかもしれない。しかし、この間違った主張をなんとなく受け入れてしまっている数学者のグレーゾーンが思ったより広い、という可能性も低くないような気もする。むしろ、数理論理学の素養を持たない数学者が少なくないことを思えば、このグレーゾーンの黒雲が大多数の数学者の上に重く広がっていてもおかしくないだろう。そこで、以下では、この「数学の基礎は集合論でなく、カテゴリー論である」という痛い発言の分析も含めて、集合論とカテゴリー論の関係について、できるだけ数理論理学の専門知識の仮定をせずに精査してみようと思う。[3]

---

2) 後出の脚注 6) も参照されたい。

3) 「できるだけ数理論理学の専門知識の仮定をせずに」とは言っても、すべての定理をこの小文で証明するわけにもいかないので、参照すべき定理等の名称（例えば後で出てくる下方レーベンハイム・スコーレム定理など）を明記して、アイデアとその帰結を正確に、しかしできるだけその

2　数学的 theory for everything としての集合論

集合論は、既存の数学理論をすべてその部分体系として記述できる。[4)]

数学の諸理論の殆どは、ただ集合論の部分理論としてコードされている、というだけではなく、集合論の部分理論として、ごく自然にコードすることができているとは思うが、そうだとしても、ここでの「集合論は、既存の数学理論をすべてその部分体系として記述できる」という表明は、個々の数学理論は集合論の部分体系として展開されるべきだ、という主張ではない。[6)] また、ここで言っている意味が理解しやすいと思われる形で述べ、どこでその事実の詳細が参照できるかを注意する、というような書き方にならざるを得なかったところもある。

ポピュラーな、「商売になる数学の啓蒙」を目指す人たちは、数学の理解はなんとなくイメージでわかる、というのでもよい、と言うかもしれないが、筆者は、これは数学に対する冒涜、あるいはむしろ人類の知性に対する冒涜であると考えている。もちろん、数学の理解の多くの局面では、ブラックボックスになっている理解の空白を残して全体像を把握しなくてはならなくなることは少なくないが、それでも、究極の理解とは、すべてが証明の細部にもわたってわかる、ということである。これは書いてある数学の証明一字一句をまる暗記に近い形で理解する、ということとは全く異なり、書いてある数学を足掛りにして理解の階梯を登り詰めて、大きな展望の得られる絶壁の上に立つ、ということである。もっとも、このことを日本語で書いてみても、日本の文化の側にこれを受け入れるだけの度量がないのではないか、という危惧も小さくはないのだが。

---

4) 「集合論は、既存の数学理論をすべてその部分体系として記述できる」という表明はもちろん経験則に過ぎない。しかし、弱い算術の体系から出発していくつかの ZFC の部分体系を経て、ZFC そして ZFC に様々な巨大基数公理や、強制法公理たちのような妥当と思われる公理などを付加して得られるより強い体系にいたる拡張の系列は、数学理論の無矛盾性の強さの（現在のところ？）唯一の尺度として機能しているので、[5)] もし何らかの新しい数学理論が、この拡張の系列のどの階層とも全く関連づけられない、ということが起こったとすると、その新しい理論の正当性や整合性の判定を何か全く新しい方法で個別に行なわなくてはならなくなるが、これはほとんど不可能に近いことのように思える。

5) 「無矛盾性の強さ」といういう用語については、脚注 47) を参照。

6) 以下に書くことが、精度の高い喩えになっているかどうかは少し心許ない気もするが…。現代では本格的なコンピュータ・プログラムを機械語で書く人はいないだろう。しかしこのことは、コンピュータの CPU が 機械語の命令一つ一つに対応する動作ユニットの列の実現として動作している、という事実を変えるものではない。 しかし、逆にこの事実から「コンピュータプログラムはすべからく機械語で書かなくてはいけない」という結論が導かれるわけでもないし、誰もそ

「数学理論」とは、その形式化できる部分についてであり、その理論で生身の人間が議論をしているときの直観（これは物理的な直観など、いずれにしても数学からはみ出しているものを含む）や思考の生理を含めて言っているわけでも、もちろんない。集合論自身も、それを研究している数学者の直観や思考の生理が公理系からの形式論理での演繹としての形式的証明、という枠の外側に広がっている。また、公理系からの演繹としての集合論での数学を、その外側から見て議論する超数学での考察と、公理系からの形式的証明に落とし込める数学との間を行き来して議論する、という集合論で特徴的な研究の形態[7]も、この枠からはみ出るものとなっている。

幾つかの理論では、それらが実際に集合論で展開できることを見るために自明でない手立てが必要になる。そのような理論で、直ぐに思いつくものが二つあるが、その一つは強制法（forcing）の理論で、もう一つはカテゴリーの理論である。

強制法の理論は、もともと数学的な命題の集合論からの相対的無矛盾性や相対的独立性を超数学で証明するために開発された理論であるが、その基本的な部分は、強制関係（forcing relation）と呼ばれる（集合論の言語で論理式として書き下すことのできる）関係に関する（超数学で、ではなく）集合論での理論である。強制関係が、ジェネリック拡大と呼ばれる、集合論の宇宙（つまり、すべての集合からなるクラス $\mathsf{V} = \{x : x = x\}$）の拡大を記述するものになっていることを主張する強制定理（Forcing Theorems）がこの理論の要（かなめ）となるが、この「集合論の宇宙の拡大」は言葉どおり解釈したのでは、矛盾である。集合論の宇宙がすべての集合

---

7) 「公理系の外側にある超数学での考察と、公理系からの形式的証明に落とし込める数学との間を行き来する」という集合論で典型的な議論の形態は、様々な数学的命題の相対的無矛盾性や独立性を証明する、という集合論の研究目標の一つから来る必然だが、このような数学的議論の形態は、形式的証明に落とし込むことのできる数学（これは普通に数学で「数学の結果」と言ったときのものに対応するものである）としての結果を得るためにも有効な、しかし、他の数学の分野ではまだ活用されることのきわめて少ないテクニックでもある。

んなことはしていない。

を含んでいるとすると、それを更に拡張しようがないからである。[8] 後で述べる、カテゴリー論を集合論の部分理論としてコードするときの機関（からくり）（反映定理）は、この「集合論の宇宙の拡大」の見かけの矛盾の解消で、組み合わせて用いられる3つの手法の中の1つである。

3 小さいカテゴリーと大きいカテゴリー

数学的な内容にもある程度踏み込んだ、きちんとした説明にするために、カテゴリーの定義の復習から始めることにする。ここでの日本語の用語は、『数学辞典』第4版 [23] に準拠しているが、[23] が扱っていない概念については、筆者のとりあえずの訳語を採用している場合もある。$\mathcal{K}$ がカテゴリー（圏（けん））であるとは、[9] $\mathcal{K}$ は対象 (objects) の範囲とその範囲内の任意の2つの対象 X, Y の間に、射 (morphisms) と呼ばれるものの集合 $Hom(X, Y)$ を指定することで与えられるもののことである。[10] ただし、$\mathcal{K}$ の任意の対象 X, Y, Z と、$Hom(X, Y)$, $Hom(Y, Z)$ のそれぞれの要素 f, g に対し、それらの合成 $g \circ f \in Hom(X, Z)$ が対応させられており、各対象 X に対し、$Hom(X, X)$ の特別な要素 id_X が与えられていて、（i）任意の $f \in Hom(X, Y), g \in Hom(Y, Z), h \in Hom(Z, W)$ に対し、$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ が成り立つ；（ii）任意の $f \in Hom(Y, X), g \in Hom(X, Z)$ に対し、$f = id_X \circ f$,

---

8) この問題をどうやって回避して、強制法の理論を集合論の公理系の中で展開するのか、ということについては、第7節で簡単に触れることになる — 関連事項の議論の細部に興味のある読者は [20] の Chapter VII あるいは、筆者の講義録 [10] の section 1.1 などを参照されたい。

9) 本稿では、「カテゴリー」と「圏」を全く同等な用語として用いている。たとえば後で「小さい圏」という用語を導入するが、これは「小さいカテゴリー」という表現と同等である。

10) $Hom(X, Y)$ がカテゴリー $\mathcal{K}$ での射であることを強調したいときには、$\mathcal{K}$ を添字にして $Hom_{\mathcal{K}}(X, Y)$ と書くことにする。カテゴリーを図式でグラフィックに理解するときには、関数の記法 $f : a \to b$ と同様にオブジェクトとからオブジェクトへの矢印を描くことが多く、これが「『矢印』が描きだす」の正体である。

$g = g \circ id_X$ が成り立つ; (iii) 任意の異なる $\mathcal{K}$ の対象の組 $\langle X, Y \rangle, \langle X', Y' \rangle$ に対し、$Hom(X, Y)$ と $Hom(X', Y')$ は共通部分を持たない、が成り立つとする。

カテゴリーの具体例の一つは、$\mathcal{K}$ の対象を群とし、2つの対象（群）G_0, G_1 に対し、$Hom(G_0, G_1)$ を G_0 から G_1 への準同形 f と G_1 の組 $\langle f, G_1 \rangle$ の全体とし、$\langle f, G_1 \rangle \in Hom(G_0, G_1)$ と $\langle g, G_2 \rangle \in Hom(G_1, G_2)$ に対し、それらの合成を $\langle g \circ f, G_2 \rangle$ と定義することで得られるものである。[11] ここで $g \circ f$ は、準同形 f と g の関数としての合成を表している。また $\mathcal{K}$ の対象 G に対し id_G は、G 上の恒等写像 i と G の組 $\langle i, G \rangle$ のこととする。

上のカテゴリーの定義で、「射と呼ばれるものの集合」という表現が現れていることからもわかるように、カテゴリーの定義は集合の概念を既知としてなされている。この点をうやむやにするために、「集合」という言葉を使う代わりに「射の集まり」(collection of morphisms) というような表現が使われることもあるが、この「集まり」が何であるかを（数学の基礎付けの観点から）特定するためには、いずれにしても何らかの意味での集合論の概念がカテゴリーの定義に先立って導入されている必要がある。[12]

一方、カテゴリーの定義での「対象の範囲」の方は、もう少し微妙な問題が絡んでいる。群のカテゴリーの例でもそうであるように、対象の範囲は多くの場合、

---

11) ここで、単に準同形 f を考えるのではなく、組 $\langle f, G_1 \rangle$ を考えているのは、もし G_1 がもう一つの群 G_2 の部分群になっていた場合 $f : G_0 \to G_1$ なら $f : G_0 \to G_2$ と見ることもできてしまい、f を単独で射としたのでは、カテゴリーの性質 (iii) が成立しなくなってしまうからである。

12) 「数学の基礎は集合論でなく、カテゴリー論（圏論）である」という表明での「基礎」を「基礎付け」と解釈したときの、この表明の不適当さは、ここで述べたことだけからも明らかであるはずなのだが、あまりに自明だからなのか、このことを明示的に指摘している文献は非常に少ない。

集合とはならず、真のクラスになってしまうからである。[13] 現代の集合論でスタンダードな公理系として採用される Zermelo-Fraenkel 集合論に選択公理を加えた体系 (ZFC) では、クラスは理論のオブジェクトとしては扱うことができず、各々の具体的なクラスが、それを定義する (meta-mathematics での) 論理式の別称のようなものとして扱えるだけである、たとえば、群の全体からなるクラス $\mathcal{G}$ では、集合論の言語での「x は群である」に対応する論理式 $\varphi(x)$ の別称としてこのクラス $\mathcal{G}$ を考えることになる。$\mathcal{G} = \{G : \varphi(G)\}$ という書き方をすることもある。したがって、たとえば、G がクラス $\mathcal{G}$ に属す、という表明 (これを $G \in \mathcal{G}$ とも記す) は、$\varphi(G)$ という論理式表現の略記にすぎない、ということになる。真のクラスのこのような扱いで、具体的に与えられた個々のカテゴリーは集合論で扱かうことができるようになるが、圏を対象と思い、圏の間の関手 (functors) を射と考[16]

---

13) すべての集合 a は $a = \{x : x \in a\}$ と表わせるのでクラスでもある。したがって、クラスの概念は集合の概念の一般化になっているわけだが、クラスのうち、たとえば V など、集合でないものを、真のクラスとよぶ。群のカテゴリーの例では、このカテゴリーを同型で割って得られるカテゴリーを考えてもこれは真のクラスである。[14] これは、すべての基数 κ に対し、濃度 κ を持つ群が存在するからである。これに対し、たとえば有限群のカテゴリーでは、このカテゴリーを群の同型関係で割って得られる商カテゴリーは集合となる。[15] このことは、後に触れることになるノイマンの累積的階層の用語を用いると、各同値類の代表元が V_α からとれることからわかる。

14) クラスを同値類で割ることは、同値類 (これもクラスになってしまうかもしれない) の要素のうち最低のランクを持つものだけを集めた集合を代表元の代用品としてとる、という "Scott's trick" とも呼ばれることのあるトリックを使うことで集合論の中で実行することができる。この "Scott's trick" という名称は、1955 年の Scott の講演のアップストラクトで導入されている一般原理に因む。しかし、このトリック自身は、1940 年代初めの終ゲーデルの『赤本』ですでに用いられている。Kanamori 先生は、この論法を popularize したのが Scott なので、この名称でよいのだ、と仰るのだが、Scott や後出のモンタギュの属していたタルスキーの学派の人たちは『赤本』を精読していたはずなので、これは些かアンフェアなような気もする。

15) 対象の全体が集合論となるカテゴリーを「小さなカテゴリー」と呼ぶ流儀もあるようであるが、これは我々が本稿で「小さなカテゴリー」と呼んでいるものとは異なる。

16) 「現代の集合論」が何時からのことなのか、というのは不毛な議論にも思えるが、今日の視点からは、1960 年代のコーエン (Paul Cohen) の仕事以降というのが、順当な基準であろう。

えて作られる「大きな」圏を考えようとすると、少なくともZFCでは、普通のやり方では、これを、うまく扱うことができなくなってしまう。[17]

念のため、関手の概念の復習もしておこう。圏 $\mathcal{K}$ に対し、$\mathcal{K}$ の対象の全体のなすクラスを $Obj(\mathcal{K})$ で表すことにする。また、$Hom(\mathcal{K})$ で $\mathcal{K}$ に現れる射の全体を表すことにする。$Hom(\mathcal{K}) = \bigcup_{X,Y \in \mathcal{K}} Hom(X,Y)$ である。$\mathcal{K}_0$, $\mathcal{K}_1$ を圏とするとき、$\mathcal{F}$ が $\mathcal{K}_0$ から $\mathcal{K}_1$ への関手であるとは、$\mathcal{F}$ はクラス関数[20] $\mathcal{F} : Obj(\mathcal{K}_0) \cup Hom(\mathcal{K}_0) \to Obj(\mathcal{K}_1) \cup Hom(\mathcal{K}_1)$ で、(i) $\mathcal{F}''Obj(\mathcal{K}_0) \subseteq Obj(\mathcal{K}_1)$, $\mathcal{F}''Hom(\mathcal{K}_0) \subseteq Hom(\mathcal{K}_1)$; (ii) すべての $X, Y \in Obj(\mathcal{K}_0)$ と $f \in Hom_{\mathcal{K}_0}(X,Y)$ に対し、$\mathcal{F}(f) \in Hom_{\mathcal{K}_1}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$ が成り立つ; (iii) $f \in Hom_{\mathcal{K}_0}(X,Y)$, $g \in Hom_{\mathcal{K}_0}(Y,Z)$ に対し、$\mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f)$ が成りたつことである。

見かけ上、大きく異るカテゴリーの間に関手が存在すること、さらにその関手が逆同型写像に対応するような性質を持つ関手（随伴関手）を持つこと、として表わせる数学での表現定理や構造定理は少なくない。実際、数学的な抽象化能力を

---

17) ここでの問題は、クラスの集まりを一般的に考えようとすると、クラスが超数学での論理式のことであることから、集合論の中では、クラスを量化することが一般的にはできなくなってしまうことである。ただし、有限個のクラスや、[18] 単一の論理式でパラメタを動かすことによって得られるクラスの集まりについては、[19] 問題なく扱かうことができるので、「クラスの集まり」を考察することが全くできない、というわけでもない。

超数学での論理式でなく、集合論の中での論理式の全体の集合を用いればよいのではないか、と思うかもしれないが、それを実行しようとすると、タルスキー真理の定義不可能性定理が我々の前に立ちはだかっていることに気付く（タルスキーの真理の定義不可能性定理については、後出の脚注55）の前後も参照されたい）。

18) もちろん、ここでの「有限個」は超数学の意味での有限個である。

19) 単一の論理式でパラメタを動かすことによって得られるクラスの集まりでは、各々のクラスをそれを導入するパラメタと同一視することで、クラスのクラスを扱かうことができる。

20) クラス関数は、集合としての関数のクラス版である。あるクラス $\mathcal{F}$ がクラス $\mathcal{A}$ からクラス $\mathcal{B}$ へのクラス関数であるとは、$\mathcal{A}$ の任意の要素 a に対し、$\mathcal{B}$ の要素 b で $\langle a, b \rangle \in \mathcal{F}$ となるものが一意に決まり、$\mathcal{F}$ のすべての要素はこのような形をしていることである。このとき $\mathcal{F}(a) = b$ と書くことにする。また、$\mathcal{F}$ がクラス関数のとき、任意のクラス $\mathcal{C}$ に対し、$\mathcal{F}''\mathcal{C}$ で $\mathcal{C}$ の $\mathcal{F}$ による像を表わす。つまり、$\mathcal{F}''\mathcal{C} = \{x : \langle c, x \rangle \in \mathcal{F} \text{ for some } c \in \mathcal{C}\}$ である。

持った人が、関手の定義を初めて習ったときには、学部の一年で習った線形代数で出てきたさまざまな定理のフラッシュバックがあるに違いない：

たとえば、有限次元線形空間の全体と線形写像の全体の作るカテゴリーから、ベクトル空間（係数体の要素の n 組みの全体からなる空間）の全体と行列の全体の作る空間への関手（各線形空間の基底を選ぶごとにそのような関手が一意に定まる）や、線形空間全体と線形写像の全体の作るカテゴリーからそれ自身への、双対空間を対応させる関手、等々。

関手の定義での (ii) と (iii) を、(ii') すべての $X, Y \in Obj(\mathcal{K}_0)$ と $f \in Hom_{\mathcal{K}_0}(X, Y)$ に対し、$\mathcal{F}(f) \in Hom_{\mathcal{K}_1}(\mathcal{F}(Y), \mathcal{F}(X))$ が成り立つ；(iii') $f \in Hom_{\mathcal{K}_0}(X, Y)$, $g \in Hom_{\mathcal{K}_0}(Y, Z)$ に対し、$\mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)$ が成りたつ、と変更したものが成り立つような f を反変関手とよぶ。随伴関手を伴った反変関手は、少し手の込んだ表現定理で頻繁に現れる：

ガロア理論の基本定理は、ガロア拡大の中間体の全体からなるカテゴリーからガロア群の部分群のなすカテゴリーへの随伴関手を伴なった反変関手に関する定理として読みなおすことができる。

ブール代数のストーンの表現定理は、ブール代数の全体のなすカテゴリーから、ストーン空間（コンパクト・ハウスドルフ空間で、その位相が clopen sets からなるベースを持つようなもの）全体のなすカテゴリーへの随伴関手を伴った反変関手の存在に関する定理と考えることができる。等々。

個別の具体的に与えられた関手は、クラスとして扱えるので、ここで述べたような具体的な圏や関手に関する議論は、すべて ZFC に乗せることができるが、大きな圏の一般論をそのままの形で ZFC で展開することはできない。これに対する解決策は2つあるが、2つのうち、数理論理学の知見を本質的に用いる、平均的な数学者が「ついて行けない」と思うかもしれないものになっている二番目のものが、最終的な解決策である。次の二つの節でこの2つについて見ることにする。

4 グロタンディク宇宙

この節と次の節で述べることの大筋は、1984 年に発表されている Blass [4] で既に述べられていることである。Andreas Blass は、筆者より少し年上の数学者であるが、彼は最近の Mathematics Stack Exchange などで若い人に交じって発言をされているので、もっと若い人だと思っていた人もいるかもしれない。

ここでは、[4] では既知と仮定されて説明のされていない、いくつかの前提知識を補った説明をすることにする。[21]

集合の宇宙 $\mathsf{V} = \{x : x = x\}$ の構造はノイマンの累積的階層を用いて分析できる。On で順序数の全体のクラスを表わすことにして、$\alpha \in \mathrm{On}$ に対する集合 V_α を以下のように (超限) 帰納的に定義する：[22] $V_0 = \emptyset$; $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$; [23] γ が極限順序数のときには、$V_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} V_\alpha$ とする。このとき、各 V_α は推移的で、[24] 列 V_α, $\alpha \in \mathrm{On}$ は 関係 $\subseteq$ に関する上昇列になることが超限帰納法で容易に証明できる。[25]

---

21) ここでの記述は、読者が行間を埋めることで、すべて数学的に再現できるものになるように工夫して書いているつもりだが、更なる子細については、必要なら、筆者の [5] や、さらに詳しくは、2017 年の講義録 [9] を参照されたい。[20]、[21] も参考にできる。

22) 「帰納的」と「再帰的」という言葉の区別を厳密にする流儀の人は、ここで「再帰的」と言わず「帰納的」と言うと目くじらをたてるかもしれない。ZFC などの full-fledged な公理系で議論をしている際には、再帰の形で定義されている順序数上の関数 (または On 上のクラス関数) では、その関数の始片の存在の一意性の帰納的証明という形でこの再帰は帰納の形に解消されており、公理として導入された再帰の原理が用いられているわけではない。このため、集合論では、「帰納的」と「再帰的」の区別をせずに、すべて帰納的と表現することが多い。

23) $\mathcal{P}(a)$ で集合 a の冪集合を表す。$\mathcal{P}(a) = \{b : b \subseteq a\}$ である。

24) 集合 a が推移的とは、すべての $b \in a$ と $c \in b$ に対し、$c \in a$ が成り立つことである。これは、すべての $b \in a$ に対し $b \subseteq a$ である、ということと同値であることに注意する。

25) これは学部生向けの易しい演習問題と言えるが、念のために証明を見てみることにする：まず、すべての V_α が推移的であることを帰納法で示す。$V_0 = \emptyset$ は要素を持たないから無内容的 (vacously) に推移的である。V_α が推移的だとすると、$V_{\alpha+1}$ も推移的である：$b \in V_{\alpha+1}$ とすると、$V_{\alpha+1}$ の定義から $b \subseteq V_\alpha$ だから、$c \in b$ なら $c \in V_\alpha$ である。したがって、帰納法の仮定から $c \subseteq V_\alpha$ となるが、このことから $c \in V_{\alpha+1}$ である。最後に γ を極限順序数として、すべての

基礎の公理から、$\mathsf{V} = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} V_\alpha$ である。このことと、$V_\alpha, \alpha \in \mathrm{On}$ が集合の連続[26]な上昇列であることから、列 $V_\alpha, \alpha \in \mathrm{On}$ は、集合論の宇宙 V の以下で述べるような意味での「近似列」になっていることがわかる。特に、各 V_α を要素関係 $\in$ をそこに制限したものとの組として、集合論の言語の構造と見ると、多くの $\alpha \in \mathrm{On}$ に対し、V_α は集合論の公理（のうちの幾分か）を満たすものになっている。すべての $\alpha \in \mathrm{On}$ に対して、V_α は推移的だから、外延性公理を満たすし、$\alpha > 0$ なら $\emptyset \in V_\alpha$ だから、V_α は空集合の公理を満たす。また、α が極限順序のときには、V_α は2つの集合に対し、その2つの集合を要素とする対の集合をとるという演算に関して閉じているから、そのことと V_α が推移的であることから V_α は対の公理を満たすことがわかる。また、α 極限順序のとき、V_α は冪集合の公理も満たすものとなる。等々。このように続けてゆくと、V_α が ZFC 集合論の公

$\alpha < \gamma$ に対し、V_α は推移的とする。このとき V_γ も推移的である：$b \in V_\gamma$ なら、ある $\alpha < \gamma$ で $b \in V_\alpha$ となるものがあるが、V_α は推移的だったから、$c \in b$ なら $c \in V_\alpha$ である。したがって V_γ の定義から、$c \in V_\gamma$ がわかる。

列 $V_\alpha, \alpha \in \mathrm{On}$ が $\subseteq$ に関して上昇列になっていること示すには、$V_\alpha \subseteq V_{\alpha+1}$ が成り立つことが示せれば十分である。$b \in V_\alpha$ とすると、V_α は推移的なのだったから、$b \subseteq V_\alpha$ である。したがって $V_{\alpha+1}$ の定義から、$b \in V_{\alpha+1}$ がわかる。**（証明終り）**

[26] ここでの連続性は、極限順序数 γ に対して、$V_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} V_\alpha$ となることである。この意味での連続性は、On の順序位相と V の $\subseteq$ に関する位相に関する連続性と一致するのだが、このことは、ここでの本題と直接関係しないので、その子細は省略する。

理をすべて満たすような順序数 α が存在することが言えるのではないか、という[27]気がするかもしれないが、そのような α の存在は、ZFC が矛盾しない限り証明できない。もし、V_α が「「ZFC」」を満たすような順序数 α の存在が ZFC から証明[29]できるとすると、「「ZFC」」の無矛盾性が ZFC で証明できたことになるが、不完全性定理により、そのことから、ZFC からの矛盾の証明が（超数学で）作れてしまうからである。

そこで、「与えられたどんな順序数 β よりも大きな順序数 α で、V_α が「「ZFC」」を満たすようなものが存在する」という公理を集合論に付加して考えると、この体系は ZFC より真に強いものとなるが、この体系では、次のようにして、小さい圏や、小さい圏からなる大きな圏[30]を集合論の対象として捉えなおすことができる

---

27) ここでの、「ZFC 集合論の公理のすべて」は「V_α が ZFC 集合論の公理のすべてのモデルになる」ということの記述の可能性から、ここでの「ZFC」は超数学の意味での ZFC ではなく、集合論の内側での ZFC である。多くの著者はこの二つの ZFC をあえて記号上で区別しないが、筆者は、集合論の中での（自然数の全体の集合を使ってコードされた）集合としての ZFC を「「ZFC」」という記号で区別して書くことが多い。以下でも、この「「．」」という記法を活用することにする。[28] ちなみに、この記号は、超数学での記号列 $\mathfrak{S}$ に対し、対応する集合としての記号列を表わす、（定義可能な集合論のオブジェクトやクラス関数を表わす定数記号や関数記号を導入することで拡張された）集合論の言語での項を「$\mathfrak{S}$」と表わす、というスタンダードな記法からの類推で導入されている。

28) 2019 年の秋に数理研で行なわれた集合論の集会の折、tutorial の speaker だった Asaf Karagila 氏が、彼の導入した「bullet notation」について、「この tutorial で話すことは全く撲のオリジナルではないが、この記法については、撲の発明した大変に有益な表記法であることを自信を持って宣言できる」とコメントしたのが印象に残っている。この講演以来、筆者は、この bullet notation の愛用者になっている（例えば [16] を参照）のだが、「「．」」の記法についても、筆者自身、同様の宣言ができる、と思っている。なお、[6] は、筆者が、この「「．」」の記法を使った最初の出版された論文である。

29) 「「ZFC」」という記法については脚注 27) を参照されたい。

30) その対象がすべて集合であるような圏を小さい圏とよび、対象が必ずしも集合でないような圏を大きい圏とよぶことにする。ただし、ここでの「集合」は、何の構造も持たない裸の集合、というニュアンスで言っているものではなく、台集合が集合であるようなすべての構造も、（台集合やその上の関数や関係などの組としての）集合である。

ようになる。

たとえば、$Obj(\mathcal{G}) = \{G : G$ は群である$\}$, $Hom(\mathcal{G}) = \{\langle h, G_1\rangle : G_0, G_1 \in Obj(\mathcal{G}), h : G_0 \to G_1$ は群の準同形$\}$ となっている群のカテゴリー $\mathcal{G}$ を考える代わりに、上のような α を固定しておき、$Obj(\mathcal{G}_\alpha) = \{G \in V_\alpha : V_\alpha \models G$ は群である$\}$, $Hom(\mathcal{G}_\alpha) = \{\langle h, G_1\rangle \in V_\alpha : G_0, G_1 \in Obj(\mathcal{G}_\alpha), V_\alpha \models h : G_0 \to G_1$ は群の準同形$\}$ として導入されるカテゴリー $\mathcal{G}_\alpha$ で置き換えて議論をしても、[31] V_α が集合論の公理をすべて満たすことから、$\mathcal{G}_\alpha$ に関して、もとの $\mathcal{G}$ でと、実質上同じ議論ができることになる。[32]

$Obj(\mathcal{G}_\alpha)$ も $Hom(\mathcal{G}_\alpha)$ も V_α の部分集合だから、集合である。他の具体的に与えられた小さいカテゴリー $\mathcal{K}$ についても、同様に対応する $\mathcal{K}_\alpha$ を考えることができる。そのようなカテゴリーを全部集めたものも、V_α から出発して作ることのできる集合になるので、集合論で扱える対象となるが、[33] こうして得られたカテゴリーの部分圏たちを大きなカテゴリーの代替と思うことにすることで、そのままでは集合論の枠組にうまく乗せることのできなかった大きなカテゴリーについての議論が集合論でできるようになる。

カテゴリー論での議論を、ある具体的に与えられた構造 $\mathfrak{A}$ に適用したいときには、次のようにすればよい。順序数 β を $\mathfrak{A} \in V_\beta$ となるものとして、$\alpha > \beta$ を $V_\alpha \models$「「ZFC」」となるものとする。$\mathfrak{A} \in V_\beta \subseteq V_\alpha$ となるから、この α に対して、

---

31) 構造 $\mathfrak{A}$ と、命題 φ に対し、$\mathfrak{A} \models \varphi$ で、「命題 φ が (それを構造 $\mathfrak{A}$ の中で解釈しなおしたとき) $\mathfrak{A}$ で成り立つ」ということをあらわす。ここで "$V_\alpha \models \cdots$" と言ったときには、台集合 V_α に、要素関係 $\in$ を V_α に制限して得られる V_α 上の二項関係 (これも $\in$ であらわすことにする) を付け加えて得られる構造 $\langle V_\alpha, \in\rangle$ で $\cdots$ が成り立つ、ということを表わしている。

32) 「$\cdots$ は群である」という性質を記述する論理式の単純さから (それが Δ_0 であることから) $\mathcal{G}_\alpha = \mathcal{G} \cap V_\alpha$ となるが、対応する等式は他のカテゴリーでは成り立つとは限らない。これに対して、次の節で述べるレヴィ・モンタギュ反映定理の応用では、V_α での反映の性質から、対応する等式が考察の対象となっている任意のカテゴリーに対して成り立つように α の取り方を調節できる。

33) この読み替えで、クラスは V_α の定義可能な部分集合に解釈しなおされることに注意する。

前のパラグラフで述べたようなカテゴリー論の読み替えを行なえばよい。[34]

グロタンディク宇宙は、このアイデアでの、「$V_\alpha \models$「「ZFC」」となるV_α」の特別な場合で、その存在の主張はこのようなV_αの存在の主張よりずっと強くなるが、[35]

反面、もう少し「通常の」数学の言葉で表現できる条件で規定できる集合の概念である。

グロタンディク宇宙のもともとの定義（例えば、[27]）は次のようなものである：集合Uがグロタンディク宇宙であるとは、Uが、(i) 推移的で、[36] (ii) 対集合をとる演算に関して閉じており、[37] (iii) 冪集合をとる演算に関しても閉じていて、[38] (iv) 任意の$I \in U$を添字集合とするUの要素の列$\langle u_i : i \in I \rangle$に対し、常に$\bigcup_{i \in I} u_i \in U$となる、ことをいう。

グロタンディク宇宙の定義は選択公理なしのZFでも意味をなすし、ZFから基礎の公理も除いた体系でも意味を持つ。しかし、これらの公理をすべて仮定したZFCでは、グロタンディク宇宙は、集合論でよく知られた別の概念と一致する。

基数κが正則であるとは、κの自分自身より短い近似列が存在しないことである。[39] κが到達不可能基数（inaccessible cadinal）であるとは、κは正則で冪基数の演算に関し閉じていることである。[40] 冪基数の演算が定義されるためには選択公

---

34) すべての$\beta \in \mathrm{On}$に対し、$\alpha \in \mathrm{On}, \beta < \alpha$である性質$\mathcal{P}$を満たすものが存在するとき、性質$\mathcal{P}$を持つ$\alpha$は非有界に存在する（unboundedly many）、という。

35) 後出の定理2を参照。

36) 推移的な集合の定義は脚注24)で述べた。

37) Uが対集合をとる演算に対して閉じているとは、すべての$a, b \in U$に対し$\{a, b\} \in U$となる、ことである。

38) Uが冪集合をとる演算に関して閉じているとは、$a \in U$なら、$\mathcal{P}(a) \in U$となることである。

39) つまり、κが正則基数であるとは、$\lambda < \kappa$として$\langle \kappa_\xi : \xi < \lambda \rangle$を$\kappa$より真に小さい順序数の列とするとき、$\sup\{\kappa_\xi : \xi < \lambda\} < \kappa$が常に成り立つことである。

40) 基数κが冪基数の演算に対し閉じている、とは、すべての$\lambda < \kappa$に対し、$2^\lambda < \kappa$が成り立

理が必要なので、到達不可能基数の概念は、ZFC で初めて意味を持つものである。

κ が到達不可能基数のとき、$V_\kappa \models$「「ZFC」」が成り立つことは、容易に示せる。[41]

次の定理は、ほとんど忘れられているように思える。[43] 集合 U が推移的のとき、U と順序数の全体 On の共通部分はある順序数になる。[45] ここでは $\kappa = U \cap \mathrm{On}$ のことを U の高さと呼ぶことにする。

定理 1・ (ZFC, Williams [28]) 空でない、推移的集合 U が高さ κ を持つとき、U がグロタンディク宇宙であることと、$\kappa = \omega$ で $U = V_\omega$ であるか、または κ は到達不可能基数で $U = V_\kappa$ である、ということは同値である。またこのことから、すべての非可算なグロタンディク宇宙は「「ZFC」」を満たすものになっていることがわかる。

$V_\alpha \models$「「ZFC」」となるような α が非有界に存在することに対応する、グロタンつことである。ここに、2^λ は $\mathcal{P}(\lambda)$ の濃度で、この濃度が存在することを言うためには、選択公理が必要になる。

41) たとえば、この証明は、[20] の Chapter IV, Theorem 6.6 では、遺伝的に濃度 $<\kappa$ な集合の全体 $\mathcal{H}(\kappa)$ が、κ が到達不能基数のときには V_κ と等しくなることを用いて、$\mathcal{H}(\kappa)$ の考察を経由して示されている。[42]

42) 集合 a が遺伝的に濃度 $<\kappa$ である、とは濃度が $<\kappa$ の推移的な集合 b で $a \subseteq b$ となるものが存在することである。したがって、$\mathcal{H}(\kappa) = \{a : a$ は遺伝的に濃度 $<\kappa\}$ である。$\mathcal{H}(\kappa)$ が集合であることの証明は、ちょっとトリッキーである。これは例えば、[20] の Chapter IV, Lemma 6.2 では、$\mathcal{H}(\kappa) \subseteq V_\kappa$ がすべての無限基数 κ に対し成り立つことを示すことで得られている。

43) 実際、Williams の定理は、筆者が調べてみることのできた解説記事や関連論文のどこにも触れられておらず、この論文やその結果の存在を知らずに自分で再発見した後で、改めてネットを検索した際に見つけたものである。筆者は、この Williams の定理の証明の一般化から、正則な（必ずしも到達不可能基数ではない）κ に対する $\mathcal{H}(\kappa)$ の特徴付けを得たが、[44] これについては、本稿の姉妹論文である [12] を参照されたい。

44) $\mathcal{H}(\kappa)$ については、脚注 42) を参照。

45) 順序数の（フォン・ノイマン以来の）近代的な定義では、一つ一つの順序数は順序数の全体のクラスの始片となる集合で、逆も成り立つ。U が（集合で）推移的なら、$\mathrm{On} \cap U$ も（分離公理により）集合で、これは On のある始片になるので、順序数である。

ディク宇宙に対する条件は、「すべての集合 a に対し、$a \in U$ となるグロタンディク宇宙 U が存在する」であるが、定理1により、これは、「到達不能基数が非有界に存在する」という条件と同値である。[46]

非可算なグロタンディク宇宙が（少なくとも一つは）存在することの主張は、「$V_\alpha \models$「「ZFC」」となる α が非有界に存在する」という主張より無矛盾性の強さの大きなものとなっている。[47]

定理2・ 公理系「ZFC + 非可算なグロタンディク宇宙が存在する」で、「「ZFC」」+「$V_\alpha \models$「「ZFC」」となる α が非有界に存在する」[48]の無矛盾性が証明できる。

定理2の証明は、初等部分構造[49]に関する、下方レーベンハイム・スコーレム定

---

46) 「非有界に存在する」という言い方については脚注 34) を参照されたい。

47) ある程度の集合論の議論の展開が可能な公理系を含む二つの公理系 T_0, T_1 について（実際には、論理学のコーディングに必要な初等算術が展開できれば十分である）、T_1 が T_0 より無矛盾性の強さが大きい（of higher consistency strength）、とは、T_1 で「T_0」の無矛盾性が証明できることである。不完全性定理により、このときには、T_1 は T_0 より本質的に強い理論である、あるいは、もっと否定的な表現をすれば、T_1 が矛盾している可能性は、T_0 が矛盾している可能性より真に高いという解釈ができる。無矛盾性の強さに関しては、[6] の5節も参照されたい。

48) 集合 M を M 上の要素関係を二項関係として持つ構造ととらえて $M \models$「「ZFC」」が成り立つとき、「M は ZFC のモデルである」と言う。

49) 同じ言語 (signature) L を持つ構造 $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ で、$\mathfrak{A}$ が $\mathfrak{B}$ の部分構造になっているものについて、$\mathfrak{A}$ が $\mathfrak{B}$ の初等的部分構造 (elementary substructure) である（これは $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ という記号で表される）とは、L での任意の（一階の論理での）論理式 $\varphi(x_0, \cdots, x_{n-1})$ と、$\mathfrak{A}$ の台集合の要素 $a_0, \cdots, a_{n-1}$ に対し、$\mathfrak{A} \models \varphi(a_0, \cdots, a_{n-1})$ であることと、$\mathfrak{B} \models \varphi(a_0, \cdots, a_{n-1})$ であることが同値になる、ことである。ここでの「任意の論理式」は、超数学での論理式ではなく、集合論の中の論理式の全体の集合の要素としての任意の論理式を言っていることを注意しておく。後で、レヴィ・モンタギュ反映定理について述べるときには、超数学の意味の任意の論理式を考える必要が出てきて、それを取り違えると容易に（数学から）矛盾が導けてしまうので、この注意は不要な厳密性ではない。

[[この「初等的部分構造」(elementary substructure) という用語は「一階の論理 = 初等論理」に由来する命名と思われるが、一階の論理に対応する英語の first order logic という名称は、ひょっとすると若い人たちには誤解される可能性のあるものになっているかもしれない。first order logic は、集合論的な概念を全く前提としない、通常の数学的な議論を乗せるための論理のうち一番弱

理[50]と、初等的連鎖の定理[51]と呼ばれる、モデル理論での基本定理を知っていれば殆ど自明である。この定理の証明のアイデアは、次の節で述べるレヴィ・モンタギュ反映定理の証明の仮託（アナローグ）になるので、反映定理の証明の方には踏み込む余裕がないこともあり、こちらの方についてはここで見ておくことにしたい。

定理2の証明： 公理系「ZFC + 非可算なグロタンディク宇宙が存在する」で、議論する。U を非可算なグロタンディク宇宙とすると、定理1から、$\kappa = \mathrm{On} \cap U$ とすると、$U = V_\kappa$ で, κ は到達不可能基数である。κ が正則で冪基数の演算に関して閉じていること、下方レーベンハイム・スコーレム定理と初等的連鎖の定理を繰り返し適用すると、κ と共終な基数の連続な上昇列 $\lambda_\xi, \xi < \kappa$ で、$V_{\lambda_\xi} \prec V_\kappa$ がすべての $\xi < \kappa$ に対し成り立つようなものがとれる。

前にも述べたように、$V_\kappa \models$「「ZFC」」であるから、V_{λ_ξ} が V_κ の初等的部分構造であることから、$V_{\lambda_\xi} \models$「「ZFC」」がすべての $\xi < \kappa$ で成り立つ。すべての $\xi < \kappa$

いものであるが、Star Wars の最近の episodes での “First Order” は “America First” と同じ意味合の first で、「強い」悪の帝国である。]]

たとえば、有理数の全体 $\mathbb{Q}$ を実数の全体 $\mathbb{R}$ に普通に埋め込んだときには、この埋め込みは四則演算を保存するものだが、四則演算の言語で書き下せる「$\sqrt{x}$ が存在する」という論理式 $\varphi(x)$ を考えると $\mathbb{Q} \not\models \varphi(2)$ だが、$\mathbb{R} \models \varphi(2)$ だから、$\mathbb{Q} \prec \mathbb{R}$ ではない。一方、$\mathbb{Q}$ と $\mathbb{R}$ をそれぞれ、キャノニカルな大小関係だけ持つ構造と考えたときには、（たとえば、初等的部分構造の Ehrenfeucht-Fräissé ゲームを使った特徴付けを用いると）$\mathbb{Q} \prec \mathbb{R}$ となることが示せる。

50) 下方レーベンハイム・スコーレム定理は、一番簡単なセッティングでは、可算な言語を持つ任意の無限構造 $\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{A}$ の台集合の無限部分集合 X に対し、$\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$ で、$\mathfrak{B}$ 台集合が X を部分集合として含み、その濃度が X の濃度と等しいようなものが常に存在する、という定理である。X から出発して $\mathfrak{A}$ の中で初等部分構造の中に含まれていなければならない種類の要素を超限帰納的にとってゆくことで、このような $\mathfrak{B}$ を得る、というのが証明のアイデアである。

51) 初等的連鎖の定理はいくつかの似た命題の集まりであるが、ここで必要になる形のものは、$\mathfrak{A}_\xi$, $\xi < \delta$ が構造 $\mathfrak{A}$ の初等部分構造の上昇列のとき、構造 $\bigcup_{\xi<\delta} \mathfrak{A}_\xi$ も $\mathfrak{A}$ の初等部分構造になる、というものである。

に対し、$V_{\lambda_\xi} \in V_\kappa$ で、[52] 各 V_{λ_ξ} は V_κ での意味での V_{λ_ξ} でもある。したがって、

$$V_\kappa \models \ulcorner\ulcorner \mathsf{ZFC} \urcorner\urcorner + \text{「}V_\alpha \models \ulcorner\ulcorner \mathsf{ZFC} \urcorner\urcorner \text{となる } \alpha \text{ が非有界に存在する」}$$

である。(モデルが存在するのだから) 理論、

$$\ulcorner\ulcorner \mathsf{ZFC} \urcorner\urcorner + \text{「}V_\alpha \models \ulcorner\ulcorner \mathsf{ZFC} \urcorner\urcorner \text{となる } \alpha \text{ が非有界に存在する」}$$

は無矛盾である。**(証明終り)**

到達不可能基数は「存在する」巨大基数と考えられてはいるが、[53] そうだとしても到達不可能基数が非有界に存在するという仮定は、定理2でも見たような意味で、集合論の公理系 ZFC よりずっと大きな無矛盾性の強さを持つものになってしまっているので、ZFC だけの仮定から議論したときとは真に異なる数学になってしまっている。

実際には、大きいカテゴリーの議論を含むカテゴリー論は、ZFC の無矛盾性の強さを超えずに集合論の中に組み込むことができるのだが、そのために用いられるのが、次の節で見ることになるレヴィ・モンタギュ反映定理と呼ばれる定理である。

5 レヴィ・モンタギュ反映定理

レヴィ・モンタギュ反映定理は、Azriel Lévy と Richard Montague (モンタギュ文法の Montague である) が、1960 年ごろに独立に発見したものである。昔は、この定理はレヴィ反映原理として知られていて、筆者はこの定理のゲーデルの階層に関する特別な場合を難波完爾先生の教科書 [22] で学んだ記憶がある。レヴィ・モンタギュ反映定理の歴史的背景の説明については A. Kanamori [19] とそこに引用

---

52) これは、$V_{\lambda_\xi} \in \mathcal{P}(V_{\lambda_\xi}) = V_{\lambda_{\xi+1}} \subseteq V_\kappa$ により明らか。

53) この、到達不可能基数は「存在する」巨大基数である、という議論については、[7] を参照されたい。

されている原論文を参照されたい。集合論のスタンダードな教科書である Kunen [20]、[21] では、この定理は、レヴィやモンタギュの名前の言及なしに、単に「反映原理」(Reflection Principle) として述べられている。

定理2の証明では、到達不可能基数 κ に対し、$V_{\lambda_\xi} \prec V_\kappa$ となる基数の連続な上昇列[54] $\langle \lambda_\xi : \xi < \kappa \rangle$ の存在が証明の要点となっていた。同じような状況が、V_κ に対してでなく、集合のユニヴァース V に対して成り立たないだろうか？ というのは、自然な疑問に思える。しかし、この設問には、ちょっと厄介な問題が絡んでくる。

この設問について答えるためには、「$V_\alpha \prec \mathsf{V}$ である」という述語を用いて問題となる命題を記述しなくてはならなくなるが、この述語は、初等的部分構造の定義 (脚注 49) を参照) の類推で、「集合論の言語での任意の (一階の論理での) 論理式 $\varphi(x_0, \cdots, x_{n-1})$ と、V_α の要素 $a_0, \cdots, a_{n-1}$ に対し、$\mathsf{V} \models \varphi(a_0, \cdots, a_{n-1})$ であることと、$V_\alpha \models \varphi(a_0, \cdots, a_{n-1})$ であることが同値になる」となること、として定義されるべきものである。ところが、タルスキーの真理の定義不可能性の定理の一つのヴァリアントから、任意の論理 φ 式に対して $\mathsf{V} \models \varphi(a_0, \cdots, a_{n-1})$ であることを表現する集合論の論理式 (真理の定義) は存在しない。[55] したがって、「$V_\alpha \prec \mathsf{V}$ となる α が存在する」という主張は、そもそも集合論の命題として、(少なくとも直球で記述しようとしたときには) 記述のできない主張となってしまうのである。レヴィ・モンタギュ反映定理は、この記述のできない主張の内容のうち、記述のできる部分を、拾い上げたものとなっている。以下の定理は、meta-theorem である。つまり、この定理の以下での記述で「各々の ZFC の有限個の公理 $\varphi_0, \cdots, \varphi_{n-1}$ に対し」とあるのは、「どんな ZFC の有限個の公理が具体的に与えられたとして

---

54) この上昇列が連続になるようにとれることは、初等的連鎖の定理 (脚注 51) を参照) からわかる。

55) ここで引用されているタルスキー真理の定義不可能性定理のヴァージョンについては、たとえば [11] の 3.1 節を参照。

も」という意味で、定理の実際の記述は、具体的に与えられた ZFC の有限個の公理の一つごとに、ZFC の言語での（定理の主張に対応する）閉論理式を集めたものの全体となっている。[57]

定理3．（レヴィ・モンタギュ反映定理）　各々の ZFC の言語での有限個の論理式 $\varphi_0, \cdots, \varphi_{n-1}$ に対し、順序数 α で、すべての $i < n$ に対して、$\varphi_i = \varphi(x_0, \cdots, x_{k-1})$ として、$\forall x_0 \cdots \forall x_{n-1}((x_0 \in V_\alpha \wedge \cdots \wedge x_{n-1} \in V_\alpha) \rightarrow (\varphi_i(x_0, \cdots, x_{n-1}) \leftrightarrow V_\alpha \models \ulcorner \varphi_i \urcorner(x_0, \cdots, x_{n-1})))$ となるようなものが、非有界に存在する。[58]

この定理で、$\varphi_0, \cdots, \varphi_{n-1}$ がすべて ZFC の公理の場合を考えると、次の系が成り立つことがわかる。

系4．　$\varphi_0, \cdots, \varphi_{n-1}$ を具体的に与えられた ZFC の有限個の公理とするとき、順序数 α で $V_\alpha \models$「$\varphi_0 \wedge \cdots \wedge \varphi_{n-1}$」となるものが非有界に存在する。[60]

---

56) 「集めたもの」と言っても、これは超数学での「集めたもの」で、実際には、これは（無限回のステップで）「集めてくる」ときの集め方のアルゴリズムを述べたものにすぎない。

57) ここでは、誌面の制限から以下のレヴィ・モンタギュ反映定理の証明の細部については述べられないが、次の脚注から再現できない場合には [9] または、[20] か [21] を参照されたい。

58) レヴィ・モンタギュ反映定理の証明の要点は、ここでの「有限個の論理式」の集まりを少し拡張して、部分論理式に関して閉じた集まりとし、これに属す論理式の複雑さに関する（超数学での）帰納法で示す、ということと、帰納法がうまく回るために、ここで「非有界に存在する」と言っているのを、「閉非有界な順序数のクラス」ですべての要素がここでの性質を持つものがとれる」で置き換えた、もとの主張より強いものを証明する、ということである。

59) 順序数のクラス $\mathcal{C}$ が閉非有界 (closed unbounded) とは $\mathcal{C}$ を昇順に枚挙するクラス関数が連続で非有界になることである。

60) 系4と、定理2の証明の後半での議論を組み合わせると、「ZFC と同値な有限な公理系は存在しない」（このことは ZFC は有限公理化可能でない、とも表現する）というモンタギュの定理が得られる。ツェルメロの集合論 ZC は有限公理化可能なので、レヴィ・モンタギュ反映定理から、ZFC が ZC より無矛盾性の強さが真に大きいことや、ZFC が ZC 上でも有限公理化可能でないことなども導ける。

ここで、ZFC + 「$V_\alpha \models$「「ZFC」」となる α が非有界に存在する」という公理系 $\mathcal{A}$ で、大きなカテゴリーを含む議論により、ある理論 $\mathcal{T}$ が確立されたとしてみよう。この理論の出来上った部分としての $\mathcal{T}$ は、集合論の言語での有限個の閉論理式とその $\mathcal{A}$ からの証明になっている。これらの証明はいずれも論理式の有限列であるから、それらの証明のどこかで使われている ZFC の公理の全体 $\mathcal{A}_0$ は有限である。ここで、「$V_\alpha \models$「「ZFC」」となる α が非有界に存在する」を、「$V_\alpha \models$「「$\mathcal{A}_0$」」となる α が非有界に存在する」で置き換えて、$\mathcal{T}$ での議論での V_α をこの意味でのものとして読みなおすと、後者の存在の主張は系4により ZFC の定理なので、$\mathcal{T}$ の証明が ZFC で実行できることになる。

フェルマーの定理の命題は、不完全性定理の証明でのコーディングのアイデアを使うと、ペアノ算術で(単一の論理式として)記述できる。この定理の命題は、ペアノ算術で記述できるだけでなく、そこで証明することもできるだろう、と予想されているのだが、そもそも、この定理の知られている証明には、大きなカテゴリーを経由する議論による理論由来のツールも含まれているので、それをそのまま記述しようとすると ZFC の無矛盾性の強さすら超えてしまう。この証明が、少なくとも ZFC では実行できている、という確信[61]は、ここで述べたような議論がその論拠となっている。

6 ヴォペンカ原理とカテゴリー

ヴォペンカ原理 (Vopěnka Principle) とは、次のような原理を言う。

ヴォペンカ原理・ 任意の同じ言語を持つ構造からなる真のクラス $\mathcal{K}$ には、常に二つの構造 $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{K}$ で $\mathfrak{A}$ から $\mathfrak{B}$ への埋め込みが存在するようなものが常に存

---

61) ここで、念のため、「事実」とは言わず「確信」と言っているのは、実際にそうであることの完全な保証は、ZFC での証明を実際に書き出してみることでしか得られないかもしれないようにも思えるからである。

在する。

この原理は、レヴィ・モンタギュ反映定理（定理3）と同様、クラス $\mathcal{K}$ を定義する論理式ごとの主張となっている論理式を集めた meta-theorem である。

ヴォペンカ原理で、「埋め込み」を「初等的埋め込み」[62]に変更しても、それによって得られる原理はもとのものと同値である。これは、$\mathcal{K}$ の各要素 $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \cdots$ の一律な拡張[63] $\tilde{\mathfrak{A}}, \tilde{\mathfrak{B}}, \cdots$ をうまくとると、拡張間の埋め込みがすべてもとの構造たちの初等埋め込みになるようにできること、からわかる。

言語 $\mathcal{L}$ を持つ構造 $\mathfrak{A}$ に対し、$\mathfrak{A}$ の理論 $Th(\mathfrak{A})$ とは、$\mathfrak{A}$ で成り立つ $\mathcal{L}$-閉論理式の全体のこと、とする。$Th(\mathfrak{A}) = \{\varphi : \varphi$ は $\mathcal{L}$-閉論理式で $\mathfrak{A} \models \varphi\}$ である。

一つ言語 $\mathcal{L}$ を固定すると、その言語での理論は高々集合個しかないから、鳩の巣論法により、次の主張は ZFC の定理であることが、わかる。

命題 5・ 任意の同じ言語を持つ構造からなる真のクラス $\mathcal{K}$ には、常に二つの構造 $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{K}$ で $Th(\mathfrak{A}) = Th(\mathfrak{B})$ となるものが存在する。

構造 $\mathfrak{A}$ から構造 $\mathfrak{B}$ への初等的埋め込みが存在するときには、$Th(\mathfrak{A}) = Th(\mathfrak{B})$ だから、ヴォペンカ原理は、命題5の拡張になっていることがわかる。

一方、ヴォペンカ原理での「$\mathfrak{A}$ から $\mathfrak{B}$ への埋め込み」を「$\mathfrak{A}$ は $\mathfrak{B}$ の部分構造」で置き換えた主張に対しては、容易に反例が作れる。

ヴォペンカ原理は、Kruskal の定理との類似性が感じられる次のヴァージョンとも同値である。

ヴォペンカ原理のもう一つのヴァージョン・ $\mathcal{L}$ をある言語として $\mathfrak{A}_\alpha$, $\alpha \in \mathrm{On}$

---

62) 構造の埋め込みで埋め込んだ先をもとの構造と同一視したときに、これが初等的部分構造になっているようなもの。

63) 構造 $\mathfrak{A}$ に対し、$\mathfrak{A}$ の台集合を広げて、$\mathfrak{A}$ と同じ言語の構造で $\mathfrak{A}$ が部分構造として埋め込まれるようなものを作る構成を、$\mathfrak{A}$ の拡大 (extension) といい、台集合はそのままにして $\mathfrak{A}$ の言語を拡張して、対応する構造を付け加える構成を拡張 (expansion) という。ここで言っているのは後者である。

を $\mathcal{L}$-構造の列とすると、$\alpha, \beta \in \mathrm{On}, \alpha < \beta$ で $\mathfrak{A}_\alpha$ が $\mathfrak{A}_\beta$ に埋め込めるようなものが存在する。

この命題についても「埋め込み」を「初等的埋め込み」で置き換えて得られる原理は、もとのものと同値である。

ここでは、構造と埋め込み、構造と初等的埋め込み、という言葉遣いでヴォペンカ原理を考えたが、これは、それらの対象と射とするような圏に関する主張として言い換えることもできるので、圏論の原理としても捉えられる。

今までの考察で、ヴォペンカ原理は、ひょっとしたら ZFC の定理になっていてもおかしくない、というような印象を受けるかもしれないが、実は、この原理からは、大きな巨大基数の存在が導かれる。たとえば、[7] では超コンパクト基数が非有界に存在する、ということが導けてしまう。[64]

ヴォペンカ原理のカテゴリーの理論への影響に関する研究には、ロシツキ (Jiří Rosický)[65] らによる 1990 年代以降のものがあるが、この方向の研究では、バガリア (Joan Bagaria) らによる最近の進展が注目を集めている[66a] (たとえば、[1]、[2] などを参照)。バガリアが、ヴォペンカ原理の研究を始めていたころに、彼に招待されてバルセロナに長期滞在していたのに、筆者自身の当時の興味が、ヴォペンカ原理より無矛盾性の強さの低い強コンパクト基数の周辺にあったため、彼の研究をリアルタイムでフォローしそこなっていたのは、今になってみるととても残念に思える。ただし、筆者の研究上の焦点は、ごく最近、次の節で述べるよ

---

64) ヴォペンカ原理に関する子細は、Solovay, Reinhardt and Kanamori [24]、Kanamori [18] などを参照されたい。

65) ロシツキ教授は Brno の数学者である。Brno はゲーデルの生れ故郷だが、ここは遺伝学の始祖メンデルのいた街でもあった、ということをロシツキ氏からおそわった。

66a) これは個人的なことではあるが、筆者は、バガリア氏とは研究上でも個人的にも長い付合いがあり、Forcing Axioms と呼ばれる原理の研究ではニアミス的に類似の結果を得たりしたこともある。

うな文脈で、ヴォペンカ原理の無矛盾性の強さを超える領域に徐々に移行してきているので、遅蒔きながら、この Joan の研究にもつながる仕事が何かできそうな気がしてきているところではある。

7　究極のカテゴリー論としての集合論的多元宇宙

数学をカテゴリーの研究という視点から行なうとき、各カテゴリーに属す一つ一つの対象については、その内部構造を全く忘れて、それらの一つ一つを点として扱い、射たちに関する性質で記述できる事柄に集中する、という立脚点から数学を把握する、という捉え方が可能である。本稿の最初でも述べた「数学の基礎は集合論でなく、カテゴリー論である」というような主旨の表明は、このような捉え方を背景として表明されているのだろう。一方、「基礎付け」としての「集合論」がこのような捉え方で不必要になるわけではないことも既に論じた。

このようなカテゴリー一元論的な捉え方の可能性にもかかわらず、具体的なカテゴリーを論じようとするときには、それを構成するために、カテゴリーの各対象の（集合論的な）由来を考えなくてはならなくなることも依然として多い。

与えられたカテゴリー $\mathcal{C}$ の、対象たちのそれぞれが多様な構造を持っていればいるほど、そして、それらの間の関係性としての射がこれらの対象の多様性を反映していればしているほど、それらの総体としてのカテゴリー $\mathcal{C}$ も多様なものになるだろう。この場合の $\mathcal{C}$ の多様性は、$\mathcal{C}$ を対象として含む大きなカテゴリーでのカテゴリー論的な性質として評価できるかもしれない。そのような「多様な構造」のカテゴリーとしては、その一つ一つの中で全数学が展開するところの集合論のモデルや、それらを更に拡張したものを対象として持ち、それらの集合論のモデル（の拡張）の間の埋め込みを射とするようものが究極のものとなるであろう。ただし、「集合論のモデル」の存在についての、不完全性定理由来の問題を回避するために、いくらでも大きな巨大基数が存在することを仮定するのでなけれ

ば、ここでの「集合論」は ZFC ではなく、その十分に大きな（有限）部分、で置き換えて考える必要がある。

前節で、ヴォペンカ原理から、超コンパクト基数が非有界に存在することが導ける、と述べたが、その事実の証明も、その対象が集合論のモデルの拡張からなるようなカテゴリーを用いて行なうことができる。

集合論のモデルの総体を数学的対象として捉える視点は、近年集合論的多世界宇宙 (set-theoretic multiverse) と呼ばれて注目を集めている。

現代の集合論 (1960 年代以降の集合論) では、標準的な集合論の公理系 ZFC やそれ以外の集合論の公理系と矛盾しない命題を発見するための様々な手法が開発されている。これらのほとんどのものは、強制法とそのヴァリエーションである。[66] もちろん、不完全性定理により、ZFC を含む集合論の公理系のどれについても、その無矛盾性を確定的な方法で示すことはできないので、[67]「集合論の公理系と矛盾しない命題」というのは「集合論の公理系が矛盾しないことを仮定すると、集合論の公理系にそれに加えても矛盾をしないことの証明できる命題」ということである。更に付け加えると、通常は、ここでの「証明できる」は、「厳格に確定的な[68]方法で証明できる」ものになっている。

---

66) 「強制法」自身、一般的な名称であり、それぞれについて一冊の専門書が書けるような様々な構成法が幾つも属している。たとえば、英語版の Wikipedia には List of Forcing notions という項目があって、ここには現在 20 の異なる Forcing notions とそれらの variations についての説明が書かれている。

67) 「ZFC の公理系の無矛盾性を確定的な方法で示すことはできない」というのは、「ZFC は矛盾している」という表明とは無関係で、後者は証明されていないし、これに関連する数学的な状況を把握している人たちが予想していることでもない。この点については筆者のコメント https://fuchino.ddo.jp/obanoyama.html#19.04.27 も参照されたい

68) ここで「確定的」と言っているのは、finitär というヒルベルトの用語の訳語で、英語ではこれは finitary という通常の英語の語彙に存在しない単語に訳されることが多い。この単語は、日本語では「有限的」と誤訳されることが多く、筆者自身も（「偉い」先生たちの圧力で?）この誤訳を採用してしまったことも何度かある。

強制法では、可算で推移的な ZFC（の十分に大きな有限部分）[69] のモデル M と M での原子を持たない無限半順序集合[70] $\mathbb{P}$ に対し、M-ジェネリック・フィルターと呼ばれる M の中には存在し得ないオブジェクト $\mathbb{G}$ を M に加えて得られる M の拡大（ジェネリック拡大）$M[\mathbb{G}]$ を得る、[71] という構成法で、この $\mathbb{P}$ の選び方に依存して異なる命題のモデルになっているようなモデルが得られる。この $M[\mathbb{G}]$ が、第 2 節で触れた、「集合論のユニヴァースの拡張」の代替である。そこでも述べたように、$M[\mathbb{G}]$ で成り立つ命題は、$\mathbb{P}$ に関する強制関係とよばれる M での関係によって制御できる。M はこの強制関係によって $M[\mathbb{G}]$ が何になるかを、既に、ある程度「知っている」。

第 4 節で触れた下方レーベンハイム・スコーレム定理とモストフスキ崩壊定理[72] を、第 5 節でのレヴィ・モンタギュ反映定理で得られる、集合論の公理系の十分に大きな有限部分のモデル V_α に適用すると、同じ有限部分の可算で推移的なモデル M を得ることができる。この M に強制法の構成と内部モデルをとる、と

---

69) 「「ZFC」」でなく ZFC と書いていることからもわかるように、ここでの「有限部分」は meta-mathematics の意味での有限部分であり、「ZFC の有限部分が具体的に与えられたとすると、それに対して以下の議論が行える」という意味で使われている表現である。

70) ここで用いている強制法に関連する用語や基礎定理については、[5]、[9]、[20]、[21] などを参照されたい。M の原子を持たない半順序集合は, M が推移的であることから、M の外から見たときにも原子を持たない半順序集合になっているが、M が可算なら、M の中では非可算な半順序集合でも、外で見たときには可算な半順序集合である。

71) $M[\mathbb{G}]$ も推移的になり、M での順序数の全体と $M[\mathbb{G}]$ での順序数の全体は一致する。必要によっては、M を最初に選んだ ZFC の十分に大きな有限部分より若干多くの公理を満たすようなものととっておくことで、$M[\mathbb{G}]$ をこの最初に選んだ ZFC の有限部分のモデルになるようにすることもできる。また M は $M[\mathbb{G}]$ の中で定義されることも知られているので (Laver-Woodin の定理)、M は $M[\mathbb{G}]$ の内部モデルである。

72) モストフスキ崩壊定理の、ここでの応用で使えるヴァージョンは、構造 $N = \langle N, \in \rangle$ が外延性公理を満たしているなら、(N の要素を $\in$ に関するランクの小さいものから ($\in$ に関して) 下方にぎっしりと詰めなおすことで) これと同型な推移的構造 $\langle M, \in \rangle$ がとれる、ということを主張するものである。

いう構成を繰り返し適用することで、M を含み、内部モデルをとる操作とジェネリック拡大を得る操作に関して閉じているような、モデルのクラス（実は集合になる）$\mathcal{M}$ が得られる。この $\mathcal{M}$ は、ウディン（Hugh Woodin）が「集合論的多元宇宙」として導入したクラスに対応する。彼の集合論的多元宇宙は、ゲーデルのプログラム[73]での連続体問題の解決にむけて導入されたものだった。

ウディンの研究方針は、ごくラフな言い方では、次のように説明できる。今、集合論の宇宙 V の性質を十分に反映するような V_α をとり、この V_α から出発して、前のパラグラフで説明したような M と $\mathcal{M}$ をとる。$Th(V_\alpha) = Th(M)$ により、M は V の性質を十分に反映するから、$\mathcal{M}$ での M の立ち位置は「V の V をとりまく集合論的多元宇宙（実際にはそのようなものは存在しないのだが）での立ち位置」の「再現」になっていると考えていいだろう。ここで、V は我々の集合論の宇宙であり、その「一意性」から、それに対応して、M は $\mathcal{M}$ で特異な位置づけをされていなくてはならないだろう。特に、M で確立した「真理」は強制法の恣意では容易に変更が加えられないものになっているべきであるが、そのことの「自然な」定式化を導入すると、それから連続体仮説が導かれる。M は V の性質をよく反映するものになっていたのだから、連続体仮説は V でも成り立つ。

スティール（John Steel [25]）の集合論的多世界宇宙は、複数の数学的平行宇宙の存在をもっと容認する立場から考えられたものになっている。この多世界宇宙は、弱い集合論の成り立つ全ての宇宙の極限になっているような外宇宙の中で展開するものとなっている。筆者は [13]、[14]、[15] などで、共著者たちと共に、「自然な」反映原理が、[74] 連続体や $\aleph_1$ などの小さな非可算基数を反映点として成立す

---

73) 集合論の公理系の「正しい」拡張を求めることで、連続体仮説など、ZFC ではその真偽が決定できない（ことが証明されている）命題の真偽を決定する拡張された集合論を得る、という研究方針とその妥当性は、ゲーデルが [17] で論じている。この研究方針は現在では「ゲーデルのプログラム」と呼ばれている。

74) ここで言っている、反映原理は、「小さな濃度の構造への性質の反映」という意味での反映原理で、レヴィ・モンタギュ反映定理とは（関連はするが）異なるものである。

ることを仮定すると、連続体仮説が成り立つか、連続体の濃度が $\aleph_2$ になるか、または連続体は非常に大きなものになるか、のいずれかである、ということを示す結果を得たが、この結果は、スティールの集合論的多世界宇宙での、望ましい顕著な性質を持つ宇宙の特定に向けた議論とも捉えられる。

集合論的多世界宇宙には、ギットマン（Victoria Gitman）とハムキンズ（Joel Hamkins）による多世界宇宙の公理を満たすものもある。この公理は、多世界宇宙の中のどの世界（集合論のモデル）もこの世界が「偽物の世界」であることを知っているような別の世界に埋め込めるようなものになっていて、ウディンやスティールの多世界宇宙とはかなり趣旨の異なるものになっている。

これら以外にも、スティールの多世界宇宙とギットマン・ハムキンズの多世界宇宙の間に位置するようなフリードマン（Sy-David Friedman）による多世界宇宙の定式化もある。

集合論的多世界宇宙の中の一つの宇宙 U に着目して、この宇宙の内部モデル M で、U が M のジェネリック拡大になっているようなものの全体のカテゴリーを考えることができる。このようなカテゴリーの研究はハムキンズによって集合論的地質学と名付けられたが、[75] この方向で近年多くの研究がなされるようになってきている。集合論的地質学は、ウディンの多世界宇宙でもスティールの多世界宇宙でも同じように考えることができる。

筆者は、早稲田大学の薄葉季路氏と集合論的多世界宇宙に関する日本語のモノグラフ［8］を執筆中であるが、薄葉氏は、ヴォペンカ原理の前後の無矛盾性の強さを持つ巨大基数の存在を仮定すると集合論的なマントルがこの集合論的地質学

---

75) 武満徹の作品は魅力的なタイトルを持つものが多いが、彼は作曲にあたって、曲の題名を決めるために多くのエネルギーを費したらしい。もちろん彼のほとんどの作品が名前負けしていないということが、ここでのポイントであるが、数学でも、「集合論的多世界宇宙」や「集合論的地質学」など、概念の catchy なネーミングは思いのほか重要な役割をはたすかもしれない。そう書いて思い出したが、category あるいは、仏語の catégorie という名称も、それが哲学の文脈から出た単語だったため、それが導入された当初、人文系の科学者に大いにうけたようである。

のカテゴリーに属すことを証明して世界の集合論の研究者たちの注目を集めた。彼の研究は、巨大基数の意味、特に、非常に大きな巨大基数の意義を考える上で、集合論的多世界宇宙の見方が決定的な役割をはたすことになる可能性を示唆しているように思える。

薄葉氏の研究結果でのように、これらの集合論的多世界宇宙やそれらのヴァリエーションズの一つ一つをカテゴリーとらえて、これらのカテゴリーたちと、それらの間の関手の作る大きなカテゴリーを考えてゆく、というスタンスは、日常の数学からは遠く離れた壮大な数学の宇宙論につながってゆくものになるかもしれない。しかし、前に述べた連続体問題の解決にむけての研究でのように、ここでのスケールの大きな研究が、日常の数学との接点を持つ結果に戻ってくる可能性も十分にある。いずれにしても、魅力的で全く新しい数学的な視点と、興味深い多くの未解決の研究課題を与えてくれるアプローチであると言えると思う。

参考文献

[1] J. Bagaria, C. Casacuberta, A.R.D. Mathias, and J. Rosický, Definable orthogonality classes in accessible categories are small, Journal of the European Mathematical Society. 17 (3) (2015), 549–589.

[2] J. Bagaria, The Weak Vopěnka's Principle for definable classes of structures, slides at RIMS Set Theory Workshop 2019 Set Theory and Infinity, 18-22 November 2019, Kyoto.
http://www.sic.shibaura-it.ac.jp/~ikegami/Bagaria.pdf

[3] J.L. Bell, Category Theory and the Foundations of Mathematics, The British Journal for the Philosophy of Science Vol.32, No.4 (1981), 349–358.

[4] Andreas Blass, The interaction between category theory and set theory, Contemporary Mathematics, Vol.30, (1984), 5–28.

[5] 渕野 昌、構成的集合と公理的集合論入門、[26] の第IV巻に収録、(2007).

[6] ———、数学と集合論 — ゲーデルの加速定理の視点からの考察、科学基礎論研究、Vol.46, No.1 (2018), 33–47.

[7] ———、巨大基数と巨大な巨大基数、超数学での無限と集合論的無限、それらに対する有限の諸相、現代思想、2019年現代思想12月号「特集＝巨大数の世界」(2019). この論説の拡張版: https://fuchino.ddo.jp/misc/large-cardinals-2019-x.pdf

[8] 渕野昌、薄葉季路、集合論的多世界宇宙、in preparation.

[9] Sakaé Fuchino, An outline of independence proofs by forcing, lecture note (2017). https://fuchino.ddo.jp/notes/forcing-outline-katowice-2017.pdf

[10] ———, Iterated forcing, lecture note (2018), https://fuchino.ddo.jp/notes/iterated-forcing-katowice-2018.pdf

[11] ———, Set theory and the foundation of mathematics, lecture note (2019), https://fuchino.ddo.jp/kobe/logic-ss2019.pdf

[12] ———, Hilbert's paradox, Grothendieck universe and internal characterizations of V_κ and $\mathcal{H}(\kappa)$, in preparation.

[13] Sakaé Fuchino, André Ottenbereit Maschio Rodrigues, and Hiroshi Sakai, Strong downward Löwenheim-Skolem theorems for stationary logics, I, to appear in Archive for Mathematical Logic.
Extended version of the paper: https://fuchino.ddo.jp/papers/SDLS-x.pdf

[14] _____: Strong downward Löwenheim-Skolem theorems for stationary logics, II — reflection down to the continuum, preprint.
Extended version of the paper: https://fuchino.ddo.jp/papers/SDLS-II-x.pdf

[15] Sakaé Fuchino, André Ottenbreit Maschio Rodorigues, Reflection principles, generic large cardinals, and the Continuum Problem, to appear in: Proceedings of the Symposium on Advances in Mathematical Logic 2018.
論文の拡張版:
https://fuchino.ddo.jp/papers/refl_principles_gen_large_cardinals_continuum_problem-x.pdf

[16] Sakaé Fuchino, André Ottenbreit Maschio Rodrigues and Hiroshi Sakai, Strong downward Löwenheim-Skolem theorems for stationary logics, III — mixed support iteration, submitted.
Extended version: https://fuchino.ddo.jp/papers/SDLS-III-x.pdf

[17] Kurt Gödel, What is Cantor's Continuum Problem?, American Mathematical Monthly 54, 515–525; errata 55, 151 (1947); Revised and expanded version in: P. Benacerraf and H. Putnam, Philosophy of Mathematics: Selected Readings, Prentice-Hall (1984).

[18] Akihiro Kanamori, The Higher Infinite, Springer Verlag (1994/2003).
日本語訳: A・カナモリ著、渕野 昌 訳、**巨大基数の集合論**、シュプリンガー・フェアラーク東京 (株、当時の出版社名) (1998).

[19] ————, The Mathematical Development of Set Theory from Cantor to Cohen, The Bulletin of Symbolic Logic, Vol 2, No.1 (1996), 1–71.

[20] Kenneth Kunen, Set Theory, An Introduction to Independence Proofs, Elsevier (1980).

日本語訳: K. キューネン著、藤田博司訳、集合論 — 独立性証明への案内、日本評論社 (2008).

[21] ——————, Set Theory, College Publications (2011).

[22] 難波完爾、集合論、サイエンス社 (1975/1998).

[23] 日本数学会編、数学辞典 (第4版)、岩波書店 (2007).

[24] Robert Solovay, William N. Reinhardt, and Akihiro Kanamori, Annals of Mathematical Logic, 13(1978), 73–116.

[25] John R. Steel, Gödel's program, in: Juliette Kennedy (ed.), *Interpreting Gödel: Critical Essays*, Cambridge University Press (2014), 153–179.

[26] 田中一之 (編)、**ゲーデルと20世紀の論理学**、I–IV、東京大学出版会 (2006–2007).

[27] Wikipedia (英語版)、Grothendieck universe,
https://en.wikipedia.org/wiki/Grothendieck_universe

[28] N.H. Williams, On Grothendieck universes, Compositio Mathematica, tome 21, No.1, (1969), 1–3.