計算、証明、有限、無限

渕野 昌 (Sakaé Fuchino)

24年11月9日 (11時46分(日本時間)) 版

の foreground の色) で色付けしてある。 れる。拡張版で加えられたテキストの主なものは、 削除した部分も復活させている。また、投稿後/校正後の加筆訂正も含ま 寄稿した論説の拡張版である。 以下の文章は、現代思想 二〇二三年7月号「特集* 雑誌掲載版では紙数の制限などのために dark green (川6女 〈計算〉の世界」に

このテキストの最新版は、https://fuchino.ddo.jp/misc/computation-2023-x.pdf と して download することができる。

目次

	6	5	4	3	2	1
参考文献	有限から無限、	Speed-up 定	実数の計算・	指数関数的増加が咆哮し、	無限の数の計算	計算と論理・
	無限から有限へ	定理たち・・・		加が咆哮し、	昇 · · · ·	
	限 へ · · ·	•	· · · · · ·	階乗関数的		· · · · · ·
				階乗関数的増加が牙をむく		
	· · · · ·			をむく・・		· · · · ·
33	30	· 24	· 22	· 20	· 10	1

1 計算と論理

この場合の数は、 「計算」と言ったときに多くの人が連想するのは、 自然数であることが多いのではないだろうか。たとえば、 数の計算であろう。 しかも 掛け

集合論的多世界宇宙の視点での連続体問題の解決、基盤研究 (C) (2020 – 2023) での研究とも、 連を持つものである。 本稿の内容は、(広い意味では)筆者が研究代表者となっている科研費研究プロジェクト: 関

数の有益なコメントを頂いた。筆者はこのことに感謝する。 後にも、本稿の何か所かで名前を挙げることになる酒井拓史氏からは、本稿の草稿に対する、複

れない。 れして、 算 99999999 × 999999 など。 してくれるかもしれ うまく計算できなかったり、 PC上の計算プログラムを使うと、9999899000001 という厳密な答を返 な 7 この掛け算は、 指数表示による近似値が表示されるかも 普通の「電卓」 で計算すると桁あふ

999999 = 1000000 - 1 = 106 - 1 に注意して、 きそうなことに気がつく。 ちょっと考えると、 この計算を暗算でしてください、と言われたときにはどうしたらよいだろうか? 中学で習った式 (a-b)(c-d) = ac - ad - bc + ad が応用で これを使うと、9999999 = 100000000 – <u>|--</u> 10^{8}

8になっていて、 1) 算機の教えてくれた答 99999899000001 で、 りぎりの線に入っていると言えるだろう。 と計算できることが分かる。 か 理解できる。 その後10°の桁未満で0が続いて、 この計算なら、 しかも、 最初に9が続いていて、 普通の人が暗算で計算のできる、 この式 (1) を見ると、 最後に一の桁が1になって 10^{8} なぜ、 の桁だけ ぎ

苦痛に思うの ク重量挙げ選手が持ちあげられるものより重いものを、 ことを機械的にやっているだけで、 度や量に違い する限り、 のと同じような種類 いけなくなるからである。 小学校で習う数の計算は、 どんな知性 (intelligence) があるとは言っても、 は、 規則に従っ の ₺ のであろう。 電卓や、 機械的な操作にすぎず、 て延々と機械的な操作を間違うことなくしなくて 違いは、 PCなどでの 基本的には、 も必要にならない。 「パワーショベルが、 (普通の)計算 app の例では、 小学校で習った数の計算と同じ 習ったことをそのまま実行 持ち上げられる」、 人間がそのような計算を どのオリンピッ という 速

機械的な計算とは少し違うような気もする。 「公式」と言うのだろう)を思い ここでの暗算の例では、 そこで挙げた代数の式 つく、 という理智の働きが必要になってい そうは言っても、 (学校数学ない ここで挙げた数の し受験数学では 、るので、

ても不可能だ、 はできるが、それなしの、 に見ることになるように、 計算の例では、 というような例もある。 力づくの機械的な計算で結果を出すこともできたわけだが、 闇雲な「計算」は、 ここでのような 「知性の働き」で計算を実行すること スーパーコンピュ ータをもってし すぐ

を思い起こしてみると理解できるだろう。 というだけでなく、その解決が重要な意義を持つことになるはずの未解決の問題 あるわけでもないことは、 を証明しようとしたとき、 を本質的に使わないと結果に至ることができない。 ことで問題が解決できない場合の方が多く、 命題の) 「計算」 証明を考えてみると、 を、 もう少し一般化して、狭義の計算を特別な場合として含む、 ある一定の時間をかけると結果が出る、 山 のように残っている数学の未解決問題 (ただ未解決 そこでは、 そのような場合には、 機械的な しかも、この場合、 「計算手続き」を適用する 人間 という保証 0) ある命題 知性 が

め が、 ろに来ているかもしれない。 それほど容易でないが、この翻訳をアシストする未来のAIも実現寸前までのとこ ことをチェックする(つまり、 ことは、 方、 現時点では、 かなり自然言語よりの、 数学の証明でも、 機械的な これを機械にかけてチェ 「計算手続き」で実行できる。 証明が一旦確立してしまったときには、 人間の 狭義の 「数学的直観」 「計算」 ックできるような言葉に翻訳す での検算に相当する作業をする) 人間の数学者が使っている言葉 に訴えるものになっているた それが のは

中学校以降の 「数学」 では、 証明のことを計算と言っ て いることも少なくな

¹⁵ うな例として説明された問題のような種類のものなのだろう、 うな未解決問題を例として挙げて説明すると、 いのは、現代の数学の内容やその意義が、予備知識のない人に対して、 いるのだろう、 1) 状況を理解してもらうのは至難の技であるように思える。 という状況に起因するのだろう。 こうは書 いてみたが、 と考えている人も少なくないのかもしれない。そういう感想を持つ人が少なくな 実際には、 このような誤解を解こうとして、 数学の重要な問 説明された側は、 題は、 既に過去にあらかた解けてしまっ と誤解してしまう危険も小さくな 数学の未解決問題とは、 そう簡単には説明できな 一般の人に理解しやすそ

実際、 なら、 と「計算」 般化された「論理計算」として「計算」に含めて考えることにしてみると、「知性_ 明にも思える。 ている手法をすべ ゴリズミックな対処法の間に、 数学の証明は、 難なく 現在の数式処理 の間の違いは限りなく小さなものに思えてくる。 「計算」 しかも後者なら、 てしらみつぶしに適用できるかどうか調べてみる、 人間の知性が必要になる、と言ったが、 できてしまうはずである。 のプログラムなら、 効率の差以上の本質的な差があるかどうかは、 コンピュータに実装することもできるだろうし、 先の例で触れたガウス積分やその変形 そのような意味で、 この 「知性」と、 「証明」も一 というアル 知 不 2

えがく 論理計算に他ならないものである。 れらをつなぐ推論は、 前提と結論に現れる命題たちが数学的な背景を持ったものになってはい 不用意に (人間の) 数学的直観をとり去って、 「論理計算」という表現を使ってしまったが、数学の 論理であり、 この意味で、我々が数学的な証明の背景に思い 操作として眺めたときには、 「証明」 るが、 では

たのは、 理学の研究自身は、 元年)) だった。 ここで言ったような意味で、論理も になってからだったのだが、 19世紀の論理学の研究を多くの点で先取りしていたことが判明するのは ライプニッ ライプニッツによる、 殆ど未発表で、 ツ (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646(寛永 23年) ~ 1716(享保 残された草稿からその全容が明らかになり、 彼が、 17世紀後半から、 「計算」 論理学のこのような研究をしていたこ に過ぎないことを、 18世紀初めにかけての論 最初に看破 18

は、 価に関しては、[20] も参照されたい)。 と自体は、 彼等への精神的影響は少なくなかった、 18世紀や19世紀の論理学の研究者たちにも知られており、その意味で と評価してよいようである (この評

代の計算機のプロトタイプと呼んでもよいものだった ([22] を参照)。 ただし、こ とが知られている (例えば [24] の第Ⅱ章第3節を参照)。 間の知性が、「計算」に過ぎない」という考え方に対しては、 しれない、 の「人間の知性が、 の1930年代の研究で導入された、 1954(昭和 29 年)) だったと思ってよいだろう。このアイデアを背景になされた彼 いことを、最初に見抜いたのは、テューリング (Alan Turing, 1912(明治 45 年) ~ 人間の知性も、 例えば、 ゲーデルはテューリングの研究を高く評価したが、この「人 「計算」に過ぎない」には、異論をはさむ人も少なくないかも (この拡張された意味を含む) 機械的な「計算」に過ぎな 仮想計算機械 (テューリング・マシン) は、 保留の意を表したこ

的な「計算」に完全に含まれていることを、最初に見抜いたのは ...」とでもすべきだろう。しか テューリングが、これを確信したと思っても、 しかし、この [22] と 1950 年の imitation game が論じられている [23] の間のどこかの時点で、 のような見方を背景に議論していた、というのは、数学史研究の精度でいうと、臆測でしかない。 も、こう言い直したとしても、テューリングが、彼の 1936 年の論文 [22] で、 スタンスでの出力という意味でも、出力全体、という意味でも、 確かに,これはいずれにしても言いすぎで,ここでの表現は、「人間の知性の出力が、 た」は,現代では誤解だと解釈されることが多いし、自分もそう思う、というコメントを頂いた。 「人間の知性も、(この拡張された意味を含む) 機械的な「計算」に過ぎないことを、最初に見抜い 2) このように書いたところ、Turing の研究をしている Zhao Fan 氏から、この テュー 間違ってはいないように、筆者には思える。 この拡張された意味を含む) 機械 既に、 明確に、そ -リングが

際のそれ、のみである。 タでなく、計算を実行する、 [22]で「人間の心の動き」として分析されているのは、コンピュータ (現代の意味のコンピュー という現在では無くなってしまった職業についている人間) の計算の

働きに対応するものになっている、 これが、「メタの立場に視点を移行して考える」という人間にそなわっているように思える知性の この論文では、 現代の用語で universal Turing machine と呼ばれるものが考察されているが、 という議論が書いてあるわけでもない。

1) してではなく、 ての確信を得てい そのため、 筆者の過剰解釈になってしまっている可能性も少なくないのではあるが、 数学者としての筆者は、テューリングが、 という見方にかけてみたいような気もしているのである。 [22]の執筆の段階で、既に、 これにつ 歴史家と

値すると言ってよいだろう。 像もつかない時代に、ここで言ったようなアイデアに到達していたことは驚愕に 議なものに思えないかもしれない。 の台頭が、話題をさらっているが、そういった 「知性的な」計算機を既に知って いる我々にとっては、 $\langle \cdot \rangle$ わゆる 「AI 翻訳」や、ChatGPT を初めとする"large language models" ライプニッツやテューリングのアイデアは、 しかし、彼等がこのような現代の計算機が想 そんなに不思

等的な、 等的といっても、 学を用いるものだが、もう少し簡単な、ラマヌジャンによる証明があり、更に初 数 暈のするような乖離がある。これは次のような例を見てみると理解できるだろう。 うところの ものである。 チェビシェフの定理、 n方、狭義の計算と、証明の間には、 に対し、 エルデシュが19才のときに発表した証明は、 「天国にある本」 この定理の、 nと 2n どうやってこの証明を見つけたのか分らないような ([1] で言 あるいはベルトラン仮説と呼ばれる定理は、 の間に少なくとも一つは素数が存在することを主張する チェビシェフによる元々の証明は、 に書いてあるような) 不思議な証明である。 有限の対象に対する考察に限定しても眩 [1] に細説されている。 少し複雑な、 任意の自然

Wikipedia [26] によると、 2023年2月現在に知られている最大の素数は

$$2^{82,589,933} - 1 (2)$$

だということである。ここで

出そうとしている会社たちの宣伝戦略のようなものの組み合わせで、 ようにも思えるので、 と言えるのではないかと思うのだが、このことは、ここでの論考とは別の文脈に属す話題である むしろ近い未来に実現されるかもしれない本物の intelligence を指すための用語であるべきであ (artificial intelligence) という単語が本来指すべきものは、 3) という理解に基づくものである。 ここでわざと「いわゆる「AI翻訳」」など括弧つきで、もってまわった言い方をしたのは、AI という能力/習性を持っていることと、 これに関連する議論の細説は、 人間は動物と話すこともできるし、 これらの現行の技術をAIとして売っている/売り 別の機会に譲りたいと思う。 現在既に実現できているものではなく、 いささか混乱が生じて お人形と話すこともで

込んで、 が今この記事を書くのに使っている emacs めることができる。 もしれないが、 算で具体的に確かめることはできない事例の一つ、 素数でないことが直ちに証明できる。こう言うと、 (例えば、 と思う人もいるかもしれないが、この形の素数 (メルレンヌ数) に関する基礎理論 部) は、 ちなみに、 例えば *scratch* [27] で、基礎事実が、 (これが素数でないことの証明を応用して計算すると) 割合い簡単に求 $2^{82,589,933}$. 実は、 例えば、この計算の一部になる 82589934 の素因数分解は、 $2^{82,589,934}$ — \vdash バッファで、 が素数なら、 証明も含めて確認できる) から、282,589,934 1 が素数でないことを例証する素因数分解 で primes.el というパッケージを読み $2^{82,589,934}$ これも、証明はできるが、 であるような気がしてくるか も素数かもしれない、 $\widehat{\phi}$ 計

7

(prime-factors 82589934) [control-j]

(2 3 7 1966427)

として難無く求めることができる。 この計算結果と、 先程述べた証明から抽出

しれない)。 。 が直ちに分かる (ただし、"rest" と書いた部分は、 た事実を用いると、282,589,934 1は、 $3 \times 7 \times 127 \times rest$ と因数分解できること まだ更に因数分解が可能かも

雑に入りくんでいるし、何がこの境界線のどちら側にあるのかは、 明によってのみ到達できる (一般化された意味での) 計算の可能性の境界線は、 みないと分らないことも多い。 ここで見たように、現代のコンピュータの計算力で太刀打ちのできる計算と、 個別に調べて 複 証

プローチが可能であるようなものがある、という種類の状況を示す例だった。 スが物理的に可能でないかもしれないものについて、数学的証明という形でのア ここで見たのは、計算できるはずだが、計算に必要な時間やメモリーの リソ

て見つけられた、 数の制限から、子細の説明は省略せざるを得ないが、Paris と Harrington によっ もので、そのようなものになってしまうものも、多く知られている。ここでは紙 在する。 らないようなものになってしまう、というような計算 (feasible でない計算)、も存 ルゴリズムについても、必要となる時間やリソースが物理的な制約の中に入りき 計算のアルゴリズムはあるが、その計算や、同じ計算をするための他のどんなア これは人工的にそのようなものを作れるだけではなく、数学的に自然な 有限 Ramsey 定理の変種に関連する関数 (「相対的に巨大」な

数は常に、 mod 3 で 1 であることも分かる。 納法で証明できる)。実際、このことと、 2^n-1 がメルセンヌ数のときには、n は素数になること ことは、すぐに分かる、というコメントを頂いた (この両方の事実は、組にして両方いっぺんに帰 mod 3 となり、 こう書いたところ、草稿に目を通していただいた酒井拓史氏から、n が偶数のときには、 $2^{n+1}-1$ は常に 3 で割切れ、 n が奇数のときには、 $2^n\equiv 2\mod 3$ になるので、 $2^{82,589,934}=1$ が 3 で割れる 特に、 メルセンヌ数ではないことが分かる。 。またメ ハセンヌ

的な制限の限界を考えても宇宙開闢から現在までの時間以上の時間が必要になる、とか、 のすぐ後で書くことになる例も参照されたい 能性までの、 存在する素粒子の全数より大きな数のメモリーが必要になる、 く見てみると、単に「現在の計算機では可能でない」というものから、計算するとしたら、 「計算に必要な時間やメモリーのリソースが物理的に可能でない」 グレイスケールのグレデイションを考える必要が出てくる。これについては、 というような、 という制約も、更に細か 究極の物理的不可 宇宙に

数より速く増加することが示せるの なっていることを注意してお を与える 様集合の存在を保証する、 関数、 [19] を参照されたい) σ: ☑ 色分けされるべき、 更に言うと、 \downarrow \mathbb{Z} 集合族の台集合の最小のサイズ がそのようなも この関数はどの原始帰納的関 0 0) 例 0) つ

つは 不完全性定理を応用すると、 りだったが、 今まで考えた計算問題は、 不完全性定理の応用で得られる、 そもそも計算できるかどうかが不明である、 そのような不思議な状況を容易に作ることができる。 計算する対象の存在が確定しているようなものば そのような計算のうち一番直接的なものの一 という問題もありえる。

それがペアノ算術からの 0 || \vdash の証明を П ドしている 9~ ٧V な数 \mathfrak{Z} (4)

には、 言っているわけである。 系 (初等算術の体系) での、 進法表示に相当するものとしてコードされているわけだが、 の計算が挙げられるだろう。 このプログラムはコンピュ nが記号列をコードしてい 等式 0 = コンピュ タの中では、 ータで何らかのプログラムを実行するとき の証明になっているような最小の数 て、 その記号列が 0 と 1 0) 列 (4) では、それと類似 ペアノ算術の公理 つまり自然数の二 nと

とも知られている (たとえばゲンツェンの定理がそのようなもの 理は示しているのだが、 とになる。 算術は (本当に) 矛盾していることになり、数学の基礎が根底から崩れてしまうこ から証明できないことを主張するものである。 デルの不完全性定理は、 これが起らないことの最終的な保証が存在しないことを、 それから、 0=1の本物の証明がデコードできてしまうので、 一方これが起らないことの状況証拠以上の保証が (4) でのような しかし、 nが存在しないことが もしこのような の一つである)。 不完全性定 ペア nがあっ ノ算術 アノ

 $[\]searrow$ 6) $^{\cap}$ ここで、 をとると、 関数 $f: \mathbb{Z}$ す べての \mathbb{Z} m >が、 \searrow 関数 g: ≥ に対し、 g(m) < f(m) が成り立つこと、 ・
□ より速く増加する、 と言っているの である。

る。 に、 保証もないわけである。 か かどうかを判定するアルゴリズムは存在する。 ある自然数 (4) これらの数が (4) での このプロセスは無限に止らないと信じてよいだろうが、 mが与えられたときには、 を出力して止まる、 nになっていないかどうかを調べてゆくことはでき ということは絶対にない、 この mしたがって、 が 0 \vdash の証明をコードしている 0, 1, 2,しか という最終的な , 3,... と、 本当にい つ

2 無限の数の計算

り、 ものとなる。 逆に複雑すぎて普通の数学の枠組の中におさまりきれなくなってしまうこともあ よっては、 かし、 上げ状態になってしまっているのではないか、 ように感じられる複雑な状況を頭に置くと、「無限の数」の計算などは、 前節で見てきたような、(有限の)数の計算での、 その複雑さの度合のパタンは、 「無限の数」 有限の数での対応する状況よりずっと簡単になっていることもあるし、 の計算を考えることは、 有限の数における状況とは些か呈を異にする 十分にできて、その計算は、 と思う人もあるかもしれない。し 既に手におえなくなっ 場合に 7 いる

有限の数と無限の数の大きな違い の 一 つは、 有限の数では、 順序数 2

歩を遂げているので、カントルのこれらの無限の数の導入が、数学史上の輝かしい瞬間の一つで 年) ~) による微細構造の理論の導入 (これは順序数算術を集合論の内部モデルの理論に関連づけ 及すべき節目と言えるだろう。 る理論と見ることができるだろう)、1980 年代以降のシェラハによる基数算術の理論、などは、 順序数や基数 (自然数を含む) の再定式化、1970 年代のイェンセン (Ronald Jensen, 1936 (昭和11 年代のハウスドルフによる、 あることには異論はないにしても、 のことを指している。 1918 (大正7年))、 に造詣のない人への説明としては、 ここで「無限の数の計算」と言っているのは、 により、1870 年代から 1880 年代に確立された、 ただし、超限順序数と無限基数の理論は、 基数算術の古典理論の確立、 カントルの名前を挙げて終りとしてしまうのは、「集合論的数 あまりに不完全であるように思える。 カントル (Georg Cantor, 1845 (弘化 2 1920 年代の、 20世紀から現在まで、 超限順序数と無限基数の理論 フォン・ノイマンによる 少なくとも、 大きな進

序数算術と基数算術が全く異るものになってしまうことである。 と数え上げてゆくときの、 中の 要素の個数としての数) 数え上げの順番に着目したときの数)と、 の算術的な差がないのに対し、 無限 の数で 基数 (集ま 順 ŋ

されている technicalities の範囲での直観的な言葉で、 このことを見るために、 まず、 順序数の構成と順序数算術について、 復習してみようと思う。 ここで

られる。 。。 をとる。 0 0 が作れるが、これらすべてが作られた後、ここでの「...」の極限をとって ω+ω が得 きの3である。集合としては、 ギリシャ文字の3で表わす。 のNで表わすことが多いが、これを一つの新しい数と捉える立場で見るときには、 することに対応する。 場で議論する。 自然数 0, 1, 2, 3,... を考えて、これら全体を一つの集まりとして考えられる立 \land 2 \sim $\omega+1$ は、集合としては、 $\omega+1=\{0,1,2,3,\ldots,\omega\}$ で、この集合上の順序 8+8は、 <3 <・・・を表わす「数」となっていると考える。 \wedge 3 < · · · < ε を表わす「数」となっている。 公理的集合論では、このことは、 順序型0 < 1 < 2 自然数全体からなる集まりを数学では、blackboard bold 体 聖書の黙示録にある、 $\omega = \{0,1,2,3,\cdots\}$ で、 ω は、この集合上の順序 $\omega < \omega + 1 < \omega + 2 < \omega + 3$ 無限公理と呼ばれる公理を仮定 我はαなり3なり、 同様に、ω+2,ω+3,ω+4,... ここで ε の次の数 ε+1 というと \land

C定理25を参照。 が無限公理なしでは証明できないことは、 比較的 簡単に示せる。 例えば、 0)

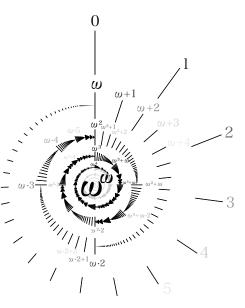
での絶対性) から結論できる。 レンケルの集合論で、 $V_{\omega+\omega}$ 合論では不十分で、 はツェルメロの集合論のモデルになっていること (および ε + ε の定義の推移的なモデル ε+ε をフォン・ ツェルメロ=フレンケルの集合論が必要になる。このことは、 (累積的階層の $\varepsilon + \varepsilon$ 番目のもの) を考えると、 $\varepsilon + \varepsilon \not\sim V_{\omega + \varepsilon}$ ノイマン流のモダンな順序数の理論で得るには、 ツェルメ ツェル メ ローフ

合場合で補正して使わなくてはならなくなり、 のクラスを考えなくてはならなくなることから、 古いタイプのツェルメロの集合論で実行できる順序数の理論は、 煩雑である。 基礎付けがうまくできなくなるので、 般論としてはクラス 色々と場

法 (再帰的定義) で、 構成される階層 ここで累積的階層と言っているのは、 次々に冪集合を作ってゆくことで (極限ではそれまでに作 V_{lpha} , (ただし lpha はすべての順序数を動く) のことである。 空集合から始めて、 すべての順序数上の帰納 ったものを全部合

 $\omega \cdot 2 + 1$, ようなプ を表わす数である。 7 $\frac{3}{3}$ 口 $\omega \cdot 2 +$ あるい セスを繰り返すことで ω・3, が得られ、 2, *ω* は、 これを、 ε_2 2+3,... と続けて、 が得られる、 これらの極限として ω" 順序数の掛け算で ここまで $\omega \cdot 4, \omega \cdot 5, \dots$ これらの極限でω・3 のプロ 3 . 2 が得られる、 セスを同様に繰り返すこと が得られ、これらの とも表わすことにすると、 を得る。 以上の 極限

3 素と をと であることの証明と同じアイデアで示せる。 one onto が可算なことは、 合としては 0) これらの順序数は、 要素として して $\frac{3}{3}$ の可算性の証明はもう少しチャレンジングだが、 0) になることから分かる。 の要素としての $n + \omega$ 3 ン one to one onto 0 3 n+1に対応させることで得られる の要素としての すべて可算である。 を n に対応させ、 3 + \vdash $\frac{\omega}{\omega} + \omega$ に対応づけることができる。 の要素として 0 を ε + 1 の要素としての 3 が可算なことは、 つまり、 の要素としての 0) one to one onto n に対応付ける写像が これらの順序数は、 有理数の全体の \mathcal{E} 2n+1 & $\omega+$ の要素として たとえば、 0) ω に対応づけ 写像かり が可算 3 ら分 ε 0) の要 も集 2n



[28] で引用されている、0 から ω^{ω} までの順序数の視覚化これは,螺旋階段を下から見上げた構図だと思うと、腑に落ちるかもしれない。

のには、 な順序数でな このように続けて 無限公理が必要になるのだったが、 らくなる。 100 そのような順序数を、 と ある時点で極限をとったときに、 ε_{1} 旦 と表わす。 3 の存在を認めてしまうと、 3 そ の存在を保証 が最早、 可算 する 3

 $\frac{3}{3}$ 序数として ω1 がとれるためには、 ロ=フレンケルの集合論で議論していることが必要である。 の存在を保証する (証明する) ためには、 の存在に関して既に注 9) で触れたように、 ツェ ルメロの集合論では不十分で、 新たな公理は必要にならない。 フォン・ ノイマンの意味での順 ツェ ただし、 ル

考えるときには、 を使って、それぞれ ニ₀, ニィ と表わす。 な集合の大きさ (濃度) の尺度となる順序数を基数とよび、 非可算性の尺度となる順序数 (最初の非可算な順序数) である。 が可算性の尺度となる順序数 (最初の無限順序数) だったように、ω1 それらを、ヘブライ語のアルファベットの最初の文字ス (aleph) ω や ω1 を基数として そこで、 は最初 そのよう

最初の濃度が ときが来る。 15 ロセスのある時点で、 てゆくが、ここで書いた順序数はすべて濃度z゚である。 順序数の生成は、 ω_1 を超えて、 $\omega_1+1,\,\omega_1+2,\ldots,\,\omega_1+\omega,\ldots,\,\omega_1+\omega_1,\ldots$ と表記する。 このことの証明も、 z_1 でない順序数は、 極限をとったときに、もはや濃度が に対応づけすることができる。 ω_1 の存在の証明と同様にできる。 ω2 と表わされ、 それを基数と捉えるときには しかし、 ご1 でなくなっている つまり、 順序数の生成のプ ここで現れる 集合として、 と続

することになる。 これにより、 名である)。 と得られる(ただし、 (基数としての表記は このように順序数の生成を続けてゆくと、 基数の極限も基数になることが示せるので、 すべての順序数 α 順序数の全体の中で一つの基数 ωα ε₀ は \mathcal{Z}_{ω}), 更に $\omega_{\omega+1}$, $\omega_{\omega+2}$... と無限に続いてゆくことになる。 ε をこの基数の列のメーンバーとして見るときの別 に対して、 α 番目の基数 ω_{α} (または z_{α}) が対応 節目になる基数が が現れると、 これらの極限として $\omega_0, \, \omega_1, \, \omega_2, \, \omega_3, \ldots$ 次の基数

れて 数算術では、 れることがあっ 無限基数をヘブライ語のス ヘブライ語のアルファ て、 これらの記号は $ext{FY}_{ ext{EX}}$ での $ext{amssymb}$ の数学記号の基本セットの中にも含ま (aleph) を使って表わすのは、 ベットの二番目と三番目の文字 🛭 (beth), 💄 カントル が導入した伝統である。 も用いら

ちは、 までには濃度 closed unbounded な部分クラスをなす)。 順序数たちの中にぎっ $\aleph_{\alpha+1}$ のギャップがあるのだが、 しりと詰って いる 全体として見たときには、 (基数の全体は順序数の全体 基数た 0) 中

じだが、 順序数 例えば (282,589,933 られ まり も同じにならない)。 は可換ではない について、 関しては、 則演算は有限 張する (超限再帰的) 定義により導入することもできる。 のうしろに順序型 β をつなげて得られる順序型に対応する順序数である。 や冪を考えることができる。 の定義を拡張するものになっており、 以上の る順序型に対応する順序数である。 β Q の要素のそれぞれを α のコピーで置き換えて、 順序数の生成の説明の中にも既に出てきたように、 と順序数 方、 β 次のようなことが成り立つ。(有限なものも含めた) 任意の順序数 α, β が の数のそれとは、 (つまり、 \mathcal{Q} 0でないなら、 \wedge β $\beta \sim \beta$ 同様のことは順序数の積についても言える。 $1) + \varepsilon = \varepsilon$ だし、 の積 $lpha \cdot eta$ 足し合せの順序を変えたときに、 が 一般には、 αより十分に大きいときには、 $\alpha < \alpha + \beta$ である。 かなり性格を異にするものとなる。 は、 順序型 α 実際、 $\omega + \omega^2$ この定義は、 順序数 α と 有限の数の和や積の再帰的定義を拡 のコピー $=\omega^2$ である。 これは、 有限の数 (自然数) β 辞書式に並べたとき) に得 の和 を しかし、 β 個ならべたとき (つ $\alpha + \beta$ 出てくる答が 順序数 有限の数の和でと同 $\alpha + \beta$ 特に、 無限順序数の四 例えば、 は、 0 間 順序数の和 β となる。 の和と積 順序型 a 0 必ずし 和 一方、 や積

は、 る)。 度となる基数のこととする。 合で) それぞれの濃度が π と λ の濃度となる基数のこととし、 あるか、 るものになる。 無限基数の四則演算は、 互いに素である必要はない) κ ・ λ は、 積集合 $X \times Y := \{\langle x, y \rangle : x \}$ ے のとき、 または、 基数 75 ある順序数 α に対し、 \aleph_{α} という形で表わせる順序数であるとす と λ を基数とする (つまり、 の和 ェ+ンを、互いに素な集合で(つまり、 (無限の基数に対しては) 順序数のそれらの演算とは異 同様に、 κ_{λ} の集合 X, Y をとったときの、 は、 \times $\{f:f:Y$ と Y を同様にとるとき (こちらの場合に 有限の順序数 (= X} の濃度となる基数のこと 和集合 $X \cup Y$ 共通部分が空の集 有限の基数) で igwedgeX, yの濃

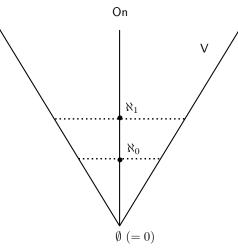
るので、 には、 も片方が無限基数の場合には、 とは異るものになることが分かるが、 の和と積 とする。 これらの定義も有限 有限の場合よりずっと簡単な計算で求まるものになる。 有限の 特に、 は可換になることは明らかなので、 この定義から、 ェ, ンに対しては、 の数の 和、 2^{λ} $\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$ となるからである。 積、 通常の和、 は、 実は、 冪の組合せ論的特徴付けの拡張になっ 冪集合 P(Y) の濃度となることがわかる。 基数の和と積は、 既にそのことから、 積、冪と一致する。 メとンの少なくと 無限の基数の場合 順序数の和と積 定義から、 て 15

度が はい る。 基本となるものでもあるが)、 このように、 まず、 、っても、 75 と \succ 無限基数の冪は、 の集合 X, Y をとったときの、 これらの演算は、 無限基数の和と積は、 選択公理なしでは定義できない。 一方、 具体的に与えられた集合の濃度を決定するときに 無限基数の冪は、 ほとんどトリヴィアルなものとなるが (と 集合 ひどく扱いづらいものであ κ_{\succ} は、 それぞれ濃

$$\{f:f:Y\to X\}\tag{5}$$

合と、 の濃度、 には、 選択公理が必要になるからである。 ある基数 z_{α} との間に one to one onto な写像が存在する) ことを示すため と定義したが、 そもそも、 このような集合が濃度を持つ (つまり、 この集

順序数の全体からなるクラス On は、 超限回繰り返すことで得られるフォン・ も) 集合の全体からなる集合論の宇宙は、 ことのない公理を仮定するが、この公理の下では、 現代の集合論では、 更に基礎の公理と呼ばれる、 集合論の宇宙をつらぬく、 ノイマン累積的階層の全体の和と一致し、 冪集合をとる操作を (空集合から始めて) (選択公理を仮定していなくて 古典的な数学では用 この累積的階層 7 られる



順序数の全体 On は累積的階層によって生成 される集合論の宇宙 V をつらぬく背骨になる。 基数 $\aleph_0, \aleph_1, \ldots$ はこの背骨の節目である。

はない。 (Gyula) König による定理で、 数の全体の集合の冪集合 P(図) の濃度になるが、 ど何も制約を受けないことが分っている。 は彼の息子である。 えば簡単のために κ 自身) の冪集合 (κ に対する P(κ)) の濃度だが、現在では、 の濃度は しか し、選択公理や基礎の公理を仮定したとしても、それで事が解決するわけで 既に注意したように、なを基数とするとき、 ょより真に大きく、)からの制限を受ける他は、 ケゥニッヒの定理 (König's Theorem これは Julius 無限グラフに関する Kőnig の補題の Dénes Kőnig 特に、 $\kappa = \varkappa_0$ の場合には、 P(図) は実数の全体 ₪ と等濃度 集合論の通常の公理系からは殆 25 は、 濃度が 2% は、 ェの集合 (例 自然

ンウムラウトで書くことが多いようである。 前はウムラウトで書き、Dénes Kőnig (1884(明治 17 年) ~ 1944(昭和 19 年)) の名前はハンガリア 親子で、二人ともハンガリー -人だが、 Julius König (1849(嘉永2年) ~ 1913(大正2年) の名

を導く理論である。 とが知られている。 の) に関しては、 となっているような基数)で、 ここで「殆ど何も制約を受けない」と書いたが、実は、極限基数 κ (極限順序数 α に対し $\kappa=arphi_lpha$ それより小さい基数での基数の冪の振舞いが、2~の値に複雑な影響を与えるこ 既に注7)で触れた、シェラハの基数算術は、 後述の(6)を満たさないもの(つまり、 このことに関連した様々な結果 弱到達不可能基数でないも

ことは、 で あ り₁₃₎ 和 の独立性と呼ばれる結果の一般化である。 ること (と、ここでは説明を省略した König の定理からの帰結である、 が非可算になること) 以外、 9年) ~ 2007(平成19年)) らによって 1960年代に証明された結果である。 2^{\aleph_0} 等式、 ズαとなる順序数αが、 $2^{\aleph_0} =$ Z は連続体仮説として知られているもので、 何も決定できない、という、連続体仮説の集合論から 通常の集合論の公理系からは、 これはコーエン (Paul Cohen, 1934(監 ここで言っ $\alpha \geq 1$ であ α の共終数

 ε 冪は、 する、 (無限公理) 大基数の理論と呼ばれるものである。 拡張することが可能なのか)、 何が可能なのか (つまり通常の集合論の公理系を (例えば基数算術に関して) どう 定しないとき (通常の集合論の公理系だけからの推論で) 何が言えるのか、また、 ることがハウスドルフによって示されているが (これが先に注 ア) で、「基数算術 (明治41年)の論文で導入した概念である。 の古典理論」 は強 実は、 のモニュメンタルな研究成果も含め、 般化した、 ハウスドルフ (Hausdorff 1868(明治元年) ~ 1942(昭和17年)) は、 冪 一般連続体仮説と呼ばれる公理を導入した。これはハウスドルフが 1908年 $\langle \cdot \rangle$ 基数算術の背後には、 超越性を持っていることが分かる。 の底が2でなく、 が必要になることは、この超越性の一つの顕れと考えることができる と表現したものである)、現代の興味は、 すべての基数 無限基数である場合も含めて、すべて一意に記述でき κ に対して $2^{\kappa} = \kappa^+$ という問題であり、これについては、 もう一つの大きなテーマが隠れている。 自然数 $0, 1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots$ 現在でも多くの研究がなされている。 一般連続体仮説を仮定すると、基数 3 の存在を言うために、 が成り立つ、 つ₁₄₎ むしろ一般連続体仮説を仮 ということを主張 上記のシェラ 連続体仮説 それは、 新しい公理 に対して、 巨 を

て、 13) これ から $P(\mathbb{N})$ への one to one onto な対応は、各実数の二進法による無限小数点表示を考え から自然に定義できる P(図) の要素への対応を調節することで得られる

 $^{^{(4)}}$ $_{\kappa^{+}}$ は $_{\kappa}$ の次の基数を表わす。 $_{\kappa}=z_{\alpha}$ として $_{\kappa^{+}}=z_{\alpha+1}$ である

¹⁵ 巨大基数については、[18] も参照されたい。

ときに、 だろう。 は、 公理とよばれており、 ているような特別な超越性は持っていないと考えてよいだろう。 れらの操作により、 から 2″ を作る操作についても同様である。自分自身より小さい基数たちのら 2″ 基数 κ が与えられたときに κ+ を作ることも、 その極限となる基数を作ることも、 強い超越性を持つ、 ω から出発して到達可能な、 $\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2,\ldots,\mathbf{z}_\omega,\ldots$ 様々な種類のものが研究されている。 極限基数の存在を、 新しい公理を必要としないので、 主張する公理群は、 基数の集合が与えられた 選択公理の下で は ε 巨大基数 の持 つ

るものである。 巨大基数のうち、 基数なが到達不可能基数であるとは、 一番小さい (超越性の弱い) ものは、 κ > ε となる極限基数で、 到達不可能基数と呼ば n

52 ĵ; 長さが ĸ 未満の順序数たちの上昇列の極限と して表わせない 6)

は基数の冪算に関して閉じている $\overline{\Xi}$

呼ばれ のうち (6) のみを満たす κ > ω となる極限基数は、 の概念は、 という性質を満たすことである。 ωの自然な拡張となっていると考えることができる。 εは、 (6) も (7) も満たすので、 今日では弱到達不可能基数と 到達不可能基数 この二つ の性質

についての、 [11]、[12]は、この $oldsymbol{arkappa}_1,oldsymbol{arkappa}_2,2^{\infty}$ がある種の潜在的な超越性を持つことと、 となっていると解釈のできる様々な命題が、 16) ただし、 $z_1, z_2, 2^{z_0}$ などが、 研究である。 ある種の潜在的な超越性を持つことは可能で、 研究されてもいる。 例えば、 連続体問題との関わり 筆者らの[9]、[10]、 そのことの表明

存在の主張は、 ものになるし、 巨大基数は、その超越性から、 この仮定から独立となる。 ある巨大基数の存在を仮定したときにも、 存在を保証をする公理は集合論の公理系からは証明できな それより「大きい」 種類の巨大基数

いく を強調したため、 見たときには、 めの一般向けの集合論の教科書の多くが、その後の集合論や数理論理学で得られた知見をもって ウスドルフの、 ものである。 現代の集合論への入門書としては大変に問題のあるものになっている、 ハウスドルフの書いた集合論の教科書 [15]、[16] や、それらに倣って書かれ その主張の影に隠れてしまって、 無限の算術としての集合論への貢献は、 十分に書ききれていなかったかもしれないが、 偉大であった、 としか形容しようのな という点

同値となるが、 般連続体仮説の下では、 一般には、 弱到達不可能基数の方が、 到達不可能基数の概念と弱到達不可能基数の概念は 到達不可能基数より弱いも

横たわっている。 断絶のような、否や、 の巨大基数と大きな巨大基数の間には、 数」に分類されるが、小さな巨大基数と中程度の巨大基数の間、あるいは中程度 集合論の宇宙全体から、それ以下への反映原理として記述される「大きな巨大基 性で特徴づけられるような、小さな巨大基数に対し、その少し上くらいの基数か 巨大基数の全体は、(7) のような、それ未満の基数での基数算術に関しての閉包 それ以下への反映の原理として記述のできる「中程度の大きさの巨大基数」、 それとは比べられないくらいの想像を超える大きな断絶が 自然数たちと 3 の間に存在する絶対的な

述語論理のコンパクト性定理を、 しかし、注 2)で述べたような意味での その意味では、大きな巨大基数も、 無限から有限への反映原理と捉えることもでき 「反映原理」という観点からは、 ω の概念の一般化になっている、

strength) な、 である、 いう命題たちは互いに同値になる) ― このことは、これらの概念が無矛盾同値 (equi-consistent) とも表現される。 同じである (つまり、それらの各々が集合論の通常の公理系の上で無矛盾である、と 到達不可能基数の概念と弱到達不可能基数の概念の無矛盾性の強さ (consistency 無矛盾性の強さについては、 第5節の初めを参照されたい

なので、 密と言える、「その存在が、ゲーデルの V=Lと矛盾しないような巨大基数」である、 なみに、「小さな巨大基数」 きな巨大基数」という用語とともに、 が想定されていることも多い。 「小さな巨大基数」というのは、形容矛盾に聞こえるかもしれないが、巨大基数の理論では、 「大きな巨大基数」 は定義の確定した概念ではないのだが、 は large large cardinal になってしまい、もっと変なのであるが。ち よく使う言い方である。 英語では、 ここで言っているものより精 巨大数は large cardinal という「定

り技術的には、 り下の世界でも起こっていることの主張、として表現できるような種類の命題のことである。よ いる現象 (のうちの指定された種類のもの) に対応する現象が、 存在に関する命題として記述されることも多い。 ここで言っている「反映原理」は、自分自身より (累積的階層に関して) 上の世界で起こっ このことは、集合論のユニヴァースから内部モデルへの非自明な初等的埋め込み (累積的階層に関して) 自分自身よ

3 指数関数的増加が咆哮し、階乗関数的増加が牙をむく

ゲット では、 incidence number の表示を採用して、Moderator (ニュースキャスタ) が リー のメディアの言っていることを理解する能力のない人達が、 人たちが知的エリートでもあることが、 違いに過ぎないだろう。 本のそれより高いことを示しているわけではなく、 ミックが始まって以来、 うなものに終始した。 日本でのメディアでのナレーションは、 的な日本人の知的レヴェルを代表している、 えられたことの一つだった。 人が、 (嘘吐きメディア) と呼んで憎悪を剥き出しにする、 い) メディ 人増えた」、「先週より何人減った」、「はじめて何千人台を越えた」等々というよ 今度のパンデミックでは、 などとコメントしたりしていたが、これは必ずしも、 (これが広く観察されたのは、 数学や統計などの初歩を理解していないらしい、 にしたメディアを可能にしている、というだけのことだろう。 のふりをしたがる、というドイツ文化での事情が、この知的エリートをタ アが知的エリートをターゲットにしていて日本ではそうでな ちなみに、 日本との違い、 我々は色々と新しいことを勉強することになりましたが 色々と教えられることが多かった。日本の大多数の 日本の場合、 ドイツのメディアは、 主にパンデミック以前のことではあるが) こ ということでは、意思決定権を持っ パンデミックの始まりから、 少なくなく、そうでない人たちも知的 テレビや新聞などのメディアが、 と考えてよさそうに思えるが、 ドイツでは (コマー という現象が見られた。 ということも、 ドイツの平均の知性が日 パンデミックの初期から これを "Lügenpresse" 事実、ドイツ 「先週より何 シャ い 改めて教 「パンテ ている という ルでな 平均 工

より、 ここで、 むしろス この 先週の今日の何月何日の 「先週より何 パ ーの買物で 人増えた」 の値段の計算と同レ 人数に比べて、 等は、 線形近似による現状分析、 ベ ル、 というような、 と言うほかない。 生の数値を という

唆して 言っ 7 V 7 るの は、 平均的な人々に平均値に つい T の理解も欠如していることを示

ど …」という説明をすべきか、 ので、 は、 たのだった。 帯の電源をすぐに ことに恐怖を覚える人がいたときには、 はす向か 数も習うはずである。 海道旅行をしたときのことである。 このことで思い出すことがある。 既にこのスーパーの買物の計算能力を超えたものになっているように思える。 距離の自乗に反比例する関数で表現できる現象は多いが、 本の高校では、 電源を切ってほ $\vec{\zeta}$ の席に坐っていた老人に、 切っ 線形 (アフ 引力や、 しい、と言われたのだった。 たのだが、 どうか、ちょっと迷った末、 アイン) ある点から放射された光りを含む放射線の強度な 電磁波 観光バスの中で SMS をチェックしている 昔、まだガラ系の携帯しかなかった時代に北 自分は心臓のペースメーカーをつけている 関数だけでなく二次関数や二次の 理由がどうであれやめるべきなので、 の強度は距離の自乗に反比例する もちろん、 何も言わないことに これに対する感覚 自分がやっ てい 分数 0) で 関 る

る。 われる、 は、 長しているように思える。 るとは到底思えない。 関数や二次分数関数の増減についての感覚さえおぼつかない人たちに理解ができ の多項式分数関数より速く減少する (0 に近づく) のであるが、このことは、二次 「指数関数的」 方、 ある 指数関数的なものである。 「幾何級数的」という死語になっているべき表現が (ガラパゴス化して?)、 $\langle \cdot \rangle$ 核反応などでの連鎖反応や、 は 肩に載っ (exponential) 7 しかも日本の場合、 いる変数に負の係数がかかっ という表現と拮抗しているために、 指数関数は、 人口爆発、 多分19世紀末に日本に輸入されたと思 どんな多項式関数よりも速く増加す 感染症の拡大でのダイナミズ ているときには、 分りにくさを助 どんな正

れも、 んだ段階で、 ンピュー S とすると「はずである」と、 この本質的な関数の増加の速さの違いを認識するはずであるが、 タサイエンスの素養のある人は、遅くても 現実の 間の、 $P \neq$ 乖離が存在するかもしれ NP問題につ $\langle \cdot \rangle$ て学

ない。

思う。 クでは、 害や非自然災害の多くで、 ていると、 とにすぎないようにも思える。 染拡大に対する構造的な安定性というよりは、 さくなかったことが幸いしているのだろうが、 間から一週間くらい、 今回の そうだったのは、 幸いに、この指数関数的な展開が感じられたのは、 パンデミックは、 どんな壊滅的状況が起こり得るかということも、 ごく短い期間の展開についてのことに止まったと言えると 微分方程式の抵抗項に対応するファクターがそれほど小 今、 経験を積みつつある、 終息に向っているように見えるが、 一方、我々は、 これは、 そういう不幸中の幸いのみに頼っ たまたま大丈夫だった、 ところでもある。 population の感染症の感 ほんの何回かで、 特に、 このパンデミッ 昨今の自然災 というこ 数日

の下では、 平均的な人々 そう考えると、 ひどく危険なことに思える22) の事態の認識能力の欠如は、 この増加の度合いが線形性の言葉 (以下) でしか理解のできな democratic な意思決定ということ b

論的な関数であり、 関数にな る、 か、 日常で遭遇する速い増加ということに関して、 階数関数が、 というとこれは、 2 て いる。 指数関数型の関数に対して、 階数関数型の関数のさらに彼方に鈍い光りを放っている。 第 1 全くそんなことはない。 節で触れた、 Paris-Harrington それらのどれよりも速く増加する 組合せの数を考えるときに出てく 指数関数が タ イプの関数も、 ノンプラスウ ル トラ

4 実数の計算

とが多いだろう。 15 わゆる「科学技術」 実数値 に関連する計算では、 の数値計算は、 いずれにしても近似計算でしかありえな 実数値の数値計算が問題になるこ

ないことも、 22) autocratic な意思決定が、 このパンデミックと同じ時期の様々な世界の動向が教えてくれた教訓であるように 旧式の democratic な意思決定よりまし、 というわけでも必ず

う頑張っ である。 い。 実数は、 ても有限桁で、 一般には無限桁の小数表現が必要になるが、 その桁数も極めて限られたものにならざるを得ない 我々が扱えるの から ど

ものにしかなり得ない 桁数のものでしかありえない 方法やその誤差などから来る制限や、 方、 例えば、 物理での計算では、 ので、 計算値で意味のある桁数も、 量子力学的な理論的な制限から、 この計算に入力すべき観測 結果的に小さな 値自身も、 限られた 測定

れは、 は、 この半径の円を描いた時、 が宇宙に送った人工物で、 の長さの計算値の誤差は一インチ以下だ、 21] によれば、 3.141592653589793 (小数点以下15桁) だということである。 現在地球から約14.8×10°マイルほど離れた地点にいるが、地球を中心に、 NASA による軌道計算での最高精度の計算で使ってい 一番地球から遠くに到達したのは、 πを小数点以下15桁まででうち切ったことによる円周 という説明がある。 Voyager 1 や、 <u>21</u> には、 る π 人類 の値

なっている可能性もあるような気がするのだが。 返し計算では、 しない可能性が高いが (物理学で出てくる公式を思い起こしてみると、 ただし、 の形で π自身は関連する計算では最後に定数として値にかかる形でし Ħ 誤差の集積をさけるために、 が現れるものは皆無と言っていいだろう)、値を出す途中の繰り もう少し多くの桁数の計算が必要に π^n か 関与

体系の かもしれない。 しているような解析学は、 しての数学の意味での実数の全体 科学技術での計算に従事している人の視点からは、 理論しか持っ しかし、 τ $\langle \cdot \rangle$ もし我々がある桁数に制限された実数だけからなる数の なかったとしたら、 決して生まれてい (連続体) は、 現在の科学技術計算がそのべ なかっただろう。 無駄な高精度のように感じられる 無限桁の実数表示の全体 スと と

考えるべきなのか、 の背後にある数学での理想化された無限桁小数表示としての実数の関係を、 この場合、 物理学的現実を見ているときに有効な桁数の小ささと、 数学での連続体は方便に過ぎない のか、 それとも物理的実存 物理学やそ

とは、 が、 者だとしたら、 ティングで、 るのか、それとも集合論的数学で初めて見ることができるようになる数学的現象 の背後に、 実は、 少なくとも、 物理的な現象にまで影を落している可能性もあるのか? ある種の極限として控えている何らかの実体と考えるべきなの 重要にも思える問題たちに、 その実存は古典的な数学で既に必要なものはすべ 数学、 数理哲学、 科学哲学の視点から見て、 連なっ 7 いるようにも思える 非常にエ て捉えきれ など、 このこ キサ か、 7 後 11

5 Speed-up 定理たち

きくなっ とは、 は、 のときには真の拡張になって 明できない 理により、 理論を展開す どんどん強い の理論たち、 の実数の 自然数の理論から、 理論 理論 T' 理論、 T'7 ここで考えている理論T 0) B 0) と、 で、 無矛盾性の強さが く。ここで無矛盾性の強さと言っている概念の標準的な定義の一33 もので置き換えてゆく必要が出てくる。 るための公理系の無矛盾性の強さ (consistency strength) で理論

T 無限集合を含む集合論 考察の対象を広げてい *T'*は 有限桁の小数点表示で表わされる実数たちの理論、 Tの無矛盾性が証明ができることである。 では証明の いる) 理論となっ 理論 が無矛盾なら、 Tできないことの証明ができる の理論、 より ったとき、 (無矛盾性の強さに関して真に) ていることがわかる 巨大基数の存在を仮定する集合論 T τ t T対応する公理的な背景理論 このことにより、 自身の無矛盾性は証 第二不完全性定 特に これら も真に大 すべ 強 0 7

盾性が り大きい。 ツ 工 証 ル 明できる。 X 口 0) ツ 集合論では、 工 ル つまり、 X ロ || フ ツェ レ 自然数論のモデル ン ケ ル ル X の集合論では 口 の集合論の無矛盾性の強さは、 が構成できるの ツ 工 ル X で、 口 0 集合論 自然数 自然数論 のモデ 0 矛

場合もあ 論の背景となる公理系の取り方によっ 23) ただ į 自 然数の 理 論 か ら有限桁の小数点表示で表わされる実数たちの理論 7 は、 無矛盾性の強さが大きくならないようにできて \wedge 0) 移 行は 15 理

基数

ル

が存在するので、、

が存在するので、

けたし、 な い₂₅ なかったわけなのだが の時代の人なので、ここで言ったような、 弟子だったカントル た有名な数学者のうちの最初の人たちの一人で、 (Leopold Kronecker 1823(文政6年)~1891(明治 24年)) は、そのような立場をとっ 張する数学者たちは少なからずいたし、現在でもいるかもしれない。クローネカ ことも可能なように思える。 で展開できる数学が安全で、 でもある。 ということは、 無矛盾性の強さと言うと聞こえがいいが、 」という有名な言葉を残してもいる。 「整数は神 このような背景から、 T'の方が、 が御造りになった。 の集合論や、 T \sharp \flat $\check{}$ 実際、そのような立場で数学を考えるべきだ、 そのようなものが望ましい」という結論を導き出す カントル自身に対して、 それ以外は全部、 不完全性定理による議論を知 もちろんクロ 彼は、この立場から、 ーネカはゲーデルより前 人の捏造したものにすぎ 猛烈な批判や攻撃を続 かつて りようは と主

に 公理系で数学を展開することの意義を説明することができる。 不思議なことに、 開することに、 1) ときには、 つい 逆に、 て、 あえて、 が数論を含んでいて、 何らかの積極的な意味を見出すことはできるのだろうか? 不完全性定理の証明の変形から、この無矛盾性の強さの大きな この矛盾している「確率」 T'の無矛盾性の強さが これをTで証明すると、 の高い、 強い 公理系の下で数学を展 Tのそれ 二つの理論TとT 物理的に不可能 より真に大き 実は、

²⁴⁾ 注 9)

にクロ 25) Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist ネカがベ ルリンでの科学者会議に講演で言ったとされる言葉 Menschenwerk" 886

4 や、 が、 デルの ゲーデル 言えるだけでなく、多少人工的な形はしているが、 うなもの な長さの証明 の定理の証明を見てみると分かるように、 Speed-up 定理と呼ばれるものを巷の言葉で言いなおしてみたものなのだ そこで挙げた文献を参照されたい 0) が存在する、 Speed-up 定理 しか存在 ということを主張が証明できるからである。 しな いが、 (や類似のその他の speed-up theorems) については T'での証明 は、 そのような♀は存在することが 実現可能な長さのものになるよ 具体的に与えることもできる。 これは、 ゲー

(Ehrenfeucht-Mycielski Speed-up 定理、この定理の証明は、 実は、 の真の拡張になっているときには、 の無矛盾性の強さが Tのそれより真に大きくなく speed-up 現象が起ることが知られ [13] に書いた) 7 7 いる が、

がT方の公理系で数学を展開してみる、 るように、 ことができるだろう。 妥当な公理系の組T、 と集合論、 るかもしれない証明が得られる可能性があるからである。 のそれより真に大きいようなものが与えられたとき、 デルや Ehrenfeucht-Mycielski の Speed-up 定理たちから、 集合論と集合論に巨大基数の存在公理を付加したもの、 T'で、 Tで得られるより、 この方針をとったときに、 T'T'がTの拡張になっ という方針が妥当なものであると議論する 容易に、 ずっと短く、 Speed-up 定理たちが示唆して ていて、 とりあえず拡張された Tの無矛盾性の強さ したがっ たとえば、 というような、 て簡単であ

には、 そのような試みから、 次のような① 2 Tの言語でも書き下せる命題 φ が、 (γ) (2)のシナリオの可能性が考えられる。 T'で証明できたとき

たとしても、 での結果が得られるわけなので、 証明に書き換えることができる場合。 ることができる。 1 得ら れた

の証明が、 Tはこの場合、 実は、 Tでの数学研究の もし、 ほとんどそのまま、 この場合には、 読者が、 tool として用い T'での数学を認めな あるいは多少の変更で この変更をしさえすれ られたと解釈す い立場だっ 0)

得られた γ 0) T'証明 が、 straightforward とは Tで の証 明 に翻訳できな

場合。 この場合には、 更にい くつか の可能な展開のシナリオが考えられる

- シュ て、 生身の数学者の研究に対して、大きな貢献があっ 明を見て、 を試みるときの大きな支えになりえるので、 の証明に何等貢献 の証明は、 2 T をペ による証明が、 (α) T'Tア でとは全く異るTでの証明が可能な場合。 でも証明できるに違いない、 でのそれとは全く異るとしたので、 ノ算術としたとき、 してい ちょうどそのようなものの例になっ ないようにも思えるが、 第1節で触れたチェビシェフ と思うことは、 そのような心理的なサポ 実際には、 たと解釈することもできる。 Tで得られている証明は これは、 てい 心理的には る。 T′で得ら の定理の、 この場合、 Tを集合論とし れて Tでの証 トとして () 工 TTルデ
- なっ とがあり得ることを指摘しているような場合である。 (2) てしまう場合。 (β) φ \downarrow \downarrow Tこれ でも証明できるが、 が、 まさにゲーデル その証明の長さは 0) Speed-up 定理が、 feasible なものでなく そのようなこ

は、 等かの超数学的な手法で証明できる場合、 この場合には、 Tで の証明の試みは暗礁に乗りあげたような状態になってしまう。 (1) Tでの 証明の長さが がありえるが、 feasible なものでありえない (2)そうでない場合、 ことを何

Tをペア みが袋小路に入っ 可能性も 実際に超数学的手法で、 合せ論の 2 (γ) あるが、 命題がそのようなものになってい ノ算術としたとき、 は、 Tでは証明できない場合。 ここでも、 てしまったような状態になってしまうこともあり得る。 (1) 第 φ (2)1節で触れた Paris-Harrington の定理での有限組 がTでは証明できないことが証明できる、 そのような証明が得られずに、 る。 これは、 この定理での場合のように、 やはり、 Tを集合論とし Tでの証 という 0) て、 (1)

滞は、 なら、 起こるし ここで見たシナリオたちのうち、 (2) T'かな (β) を認めず、 いものだが、 (1)や 2 Tの中だけで考えるという立場で研究していたとしても、 (γ) そのような立場で、 (1)の形で状況が打開される可能性からも、 2 (β) (2)と、 超数学的な考察も拒否している 2 (γ) (2)で起ってしまうの停 見放さ

T'での証明を経由した場合に比べて、 0) れてしまうことになる。 助け な でもタ の証明を見出せて 1 や ② (α) () ずっと時間がかかっ では、 るかもしれな T-純粋主義者は、 15 が、 てしまっている可能性 証明を発見するまで T'で 究結果

Σ, になる可能性がある、 能性があることであるが、 数あげることができる。 いうだけでなく、 TT'が、 だけを認める立場にとっ 与えられたときに、 強い方の体系で得られる証明によって、 ということも挙げられ その一 ただ短かくて簡単な証明が得られる可能性が ての、 もっと積極的に つは、 T'既に述べたように、 の理という観点から議論してみたが、 T'での数学を推奨する理由も、 定理の意味がより 短い 証明 が得ら ある、 明 複 と 可 T

だろう。 が て、 己同型群の間 て、現代の言葉で整理しなおすと、 作る体での一階の理論として研究された。 一生を捧げる課題だったが、 このことの、 (集合論の中で展開できる理論) より整理された形で理解できるだろう。 タル タガリアやカル の相互作用を記述するガロアの理論やその拡張、 歴史上の例の一つには、三次や四次の方程式の解法があ ダー 現代では、 ノの での、 冪根の表現を含む代数的な表現で表わせる数 中世の数学では、 ₺ この理論は、 2 当時は、 と大きな文脈の中の これらの偉大な数学者たち これは、 体の拡大や、 という、 種 つの 対応する自 0 秘法とし いげられ 高階の理 現象とし る

えられる集合論的数学が様々な分野で試みられている。 大体対応するものである。 合論の公理系を考察したのは、1908年 (明治41年)の[29]だった。 いと思う。 もう一 の集合論 0 ツ の例として、 工 ル メロ ZC と呼ばれるもの (Ernst Zermelo, 1871(明治 4年) ~ 1953(昭和 28年)) ここでは、 この前後にヨーロッ 古典的な集合論的数学につい (と全く一致するわけではない パでは、 ZC で展開されていると考 て触れ これは、 が、 ておきた これ) に 現在 が集

合論 方、 ZFC 現在集合論の公理系として標準的に考察されるツ と呼ばれる体系は、 既に触れたように、 ZC より無矛盾性の強さの大き エ ル X \Box フレ ル

てい での ヾ 7 パ な体系で、 、ラグラ 7 るように見える。 ないことが多い 研究とはほとんど没交渉に発展したため、 スコ フ で この体系が確立するのは、 V ムとい 「集合論的数学」 2 ので不明の場合もあるが、 た人達の と呼んだ研究分野は、 研究を経た、 ツ エ ル 1940 年代のことだっ メロ 殆どの場合 ZC はっきりと公理的 フ この間、 V ンケ ル、 で た。 フォ の議論を継承 な枠組で議論 の集合論の 筆者 ン が 前 前 イ 7 0)

てい る 数学の様々な結果の再構成を含むテキストの執筆の準備を始めて という意味あ ような、 11 旧来のカテゴリー論的数学) 0) 的数学の歴史的論文をひどく読みにく $([\infty])^{\circ}$ 集合論的数学で、 ₽ る 0) か のだが、 12 旧式 な まさにこのことが、 9 の集合論的数学から、 (1 7 もこめて、 この新しいタイプ () るような気がする。 もっとモダンな、 筆者は の視点からは、 少なくとも筆者にとっ の集合論的数学は、 「集合論的数学」 もっとモダンな集合論的数学へ このような背景を鑑みて、 現代集合論をベ いものにし それらに、 てい という題で、 る。 旧来の集合論的数学 ては、 ースとした研究が興ってき うまく融合しきれていな 1970 年代ごろか この古典 ここで記述した いるところであ 旧来の集合論的 の移行を促す、 的 な (また、 6集合論

では、 系での数学に移行 る立場や、 進歩を支えてゆ 制限された体系の 対立する立場としてのみ記述したが、 その 中間にある様々な立場たちは、 くべきものであると思う。 みで数学を行おうとする保守 てゆこうとする傾向のある前進的な数学、 実際には、 全体として相補的に共存して数学 的な立場 これら 5 の二つ どんどん強 と いうの の対極にあ を、 15 公理

はなっ とする、 のだが、 場か か 7 いな という意味で ここでも既に分析したように、 他の立場の数学を強く批判する人々が出てくる傾向があるように思える 実際には、 1) とし 遅くとも の純粋主義者の か言いようがな ク 口 ネカ以来、 いようにも思える。 ~ ~ 制限された体系だけで数学を実行 は、 客観的に どの時代 は、 13 ₽́ あまり良い 0) 保守 的 な立

6 有限から無限、無限から有限へ

マティ て、 い クの共有やアナロジーによるアイデアの交換、 れまでに話題にした、 方もいるかもしれない。 連な話題について気儘なコメントをした、 コンパクト性定理のような、 うことである。 ここまで読み進められた読者の中には、 大きな文脈に結びつけられており、これらを研究する立場からも、 ックな遷移原理などによって、 多様な視点、 しかし、 (この定理の場合には有限と無限との間での) システ 筆者がここで述べたかったことは、 観点からの様々な 高度に synagetic な状況が成立している、 というような印象を持たれてしまった ひょっとすると、 場合によっては、 「計算」 筆者が、 たちが、 第 2 節で触れた 雑多な無関 テクニ 全体とし ح ッ

古くから認識されていたと思うが、、 限や無限の「数の計算」での現象も超えて、 ることだと思う。 特に、 このシナジェティックな状況は、 ここで話題としてとりあげた広い 有限組合せ論と無限組合せ論 もっと大きな絵の中でも成り立って 意味での有 0) 間 で は

近起こった事例について、 最後に、 ここでシナジーと言ったことの例となるような、 話してみしたいと思う。 筆者自身の 研 究で最

ジ ときに何になるか、 大きな巨大基数で起っている現象のアナロジ 書いた URL で、 井拓史氏との共著で書き上げた論文である。 14 は、 0 説明が、 筆者が 2022 年の夏に、これまでにも多くの共同研究を行なってきた酒 論文の初めの方に偽の等式 プレプリントアーカイヴに というタイプの設問に対する答が得られていて、 upload されている。 現在投稿前ではあるが、 ーを小さな巨大基数 の世界に移した この論文では このアナロ 文献表にも

言った、 できる。 論の間の 26) 2 $\operatorname{transfer}$ 節 限組合せ論と無限組合せ論の間のシナジーの説明の一つになっていると考えることが の終 h を記述する定理と看倣すことができ、 で触れた、 --階の述語論理のコンパクト性定理は、 そう見たときには、 有限組合せ論と無限組合せ この定理は、 ここで

$$\frac{\text{weakly compact cardinals}}{\text{strongly compact cardinals}} = \frac{x}{\text{extendible cardinals}}.$$
 (8)

もちょっ で、 unfoldable cardinals として導入して、 世界を表徴するものになっている)。著者たちのこの論文での主要結果の一つは と同じものであることを示すことになった、 までそれほどなかった Andrés Villaveces 氏が、 者が大変親しくしている、 研究上のクロスオーヴァーを持つことになるとは思っていなかったので、自分で 置するもので、 グレデイションに関しては、 に住んでいた頃からの旧知である。 明論と呼ばれる研究分野の、代表的な研究者の一人で、筆者は、彼とは、 と呼ばれる小さな巨大基数が、 言えるが、 な無限の この等式でのx として説明し の特徴付けだった。 筆者自身は証明論に興味もあり勉強を試みてもいる、 とびっ 研究の間での、 更に、 てある くり だから、 が何かを決定したことである。 この研究では、 したのだった。 (分母が大きな巨大基数の世界で、 アイデアの交流を通じての、新しいアナロジーの確立、 筆者の研究の位置とはかなり離れていると言える。 しかし、 有限と無限のちょうど間くらいのグレ 登場人物の一人となっている。 Michael Rathijen の導入した shrewd cardinals やはり研究分野の違いから、 しかも、 氏の研究分野である証明論は、 後に Philipp Lücke という背景を持つ、 [4] で実際に用られているのは、 これは、 抽象モデル理論の文脈で strongly 大きな無限の研究と小さ 分子が小さな巨大基数の とはいえ、 氏が Rathijen 氏は、 研究上の交流は今 shrewd cardinals shrewd cardinals 有限と無限 ーゾーンに位 このような、 ベ 、ルリン それ と 筆

だが、 共同研究の可能性とともに、 プの一人である、 シナジェティ 論文をプレプリントア 彼とも面識はあったが、 クな他の数学の研究分野との結びつきを強く感じたのだった。 Will Boney 氏がメールを送ってくれて、 力 ここで我々の行なった無限の数 イヴに upload 共同研究などをしたことはなかっ した後、 抽象モデル理論 論文をほめてくれた (巨大基数) の研究 た ので、 の若手 未来 0 ホ

わざわざ、

自画自賛に見えてしまうかもしれない危険を犯してまで、

自分の最

もある。 くないので、 してもしょうがない」 近の研究まで例に挙げて説明を試みてみたのは、 それに対して注意を促しておいてもよいような気がしているからで という種類の コ メントを言ったり、 ひとつには、 書いたりする人が少な などの研究を

だが、 ていればよいだけだと思う。 なるもの であるとは思えない。 て何に意味がない」、 に様々な研究分野が有機的に複雑に絡みあった状況においては、「何が意味があっ のシナジ 察する研究たちの間にはりめぐらされた、 ここで述べた有限と無限に関する研究たちにおける synergetic もっと一般的に、 があれば、 まだ見えていない関連性のネットワークなどからなる、 それはいずれは自然消滅するはずなので、 というようなことをわざわざ議論することは、 もし本当に研究してもしようがない、 科学で考察される、多様な概念たちや現象たち、 アナロジーや、 アイデアの共有や、 と判断されることに 自然消滅にまか な状況でもそう あまり建設的 大きな文脈 それを考 連想 せ

うなものに過ぎないのかもしれない。 ろ、 この、 自分の 色々な場所で聞かれる、 「専門分野」に凝り固まっ $\overline{\vdots}$ は研究してもしょうがない」 た人々の、 動物的な縄張り本能の発露のよ 発言は、 む L

が、 は、 0) 段に大きくなっている、 きな視点からのユニバーサルな研究が我々にもできる可能性は、 大きな研究は、 どの分野でも研究が進みすぎてしまっ 逆に、 もう常人にはできなくなってしまった、 インターネットやコンピュータ上の様々な tools 現実では、 とも言えるのではないかとも思う。 必ずしも、 て、 いつも十分にでききれる、 と言う人も少なくないかも 全体を見渡すような研究は、 のおかげで、 そのようなスケ 過去に比べて格 とは限らな 現在、 しれな 今日 大 で ル

可能なのかもしれない 限りにおい 人的専門意識 この 「理系」、 『動物的 ては、 「文系」という受験産業の用語を初めとして、日本の文化の中には、人が動物的 /縄張り意識」を高めるための手立てが沢山仕組まれてい 「競争意識を持ってお互いに切磋琢磨する」、 「職人的専門意識」 、縄張り意識」』 は、 ゲ ーム感覚で、遊び半分に運用して というような積極的な意味付 る、 と言えるかもし けも いる れな

初めて見えてくることになる素晴しい風景を、 たいと思うし、 かもしれないが、 そのような努力の結果に得られるであろう広い視野で見たときに、 少なくとも、そういうものを目指す心構えは忘れないようにし 眺望できることを切望するもので

想の での 間の の証明になっている、 Overflow に [30] を投稿した。彼がそこで書いているのは、主に計算論と集合論の この作文の投稿版を『現代思想』誌に渡した直後に、Joel Hamkins "natural affinity" であるが、 「研究たちの間にはりめぐらされた、 が決して私の個人的な感想にすぎないわけではないことの、 と言えるだろう。 彼が書いていることも、 アナロジーや、 私がここで書いた意味 アイデアの共有や、 が、 Math-

参考文献

- 1 Martin Aigner, Günter (2002/2022). Springer, (1998/2018). 日本語訳: M. Ziegler: 蟹江 Proofs from THE 幸博 訳、 天書の証明、 воок, 6.Edition, 丸善出版
- 2 デデキント著: ま学芸文庫、 (2013/2021).渕野 昌 訳 • 解説、 数とは何かそして何であるべきか、 ちく
- 3 引き』、 Herbert tion, Academic Press (2001). 日本語訳: 1月と7月 (2020). ᄧ Enderton: A Mathematical Introduction 嘉田 勝 訳、『論理学への数学的手 to Logic, Second Edi-
- 4 論研究、 渕野 昌: 数学と集合論 Vol.46, No.1 (2018), 33–47 ゲーデルの 加速定理の視点からの考察、 科学基礎

https://fuchino.ddo.jp/papers/speedup-th.pdf

		5
講演の slides: https://fuchino.ddo.jp/wakate-fuchino-2021-12-pf.pdf	2021/12/03 (zoom, org.: 倉橋 太志 (神戸大))	: 無限と有限の硲 (はざま) にて、数学基礎論若手の会での講演

- 6 load 可能 出版後の拡張版が、https://fuchino.ddo.jp/misc/hausdorff-x.pdf から down-相の考え方 想的)近未来の視点からの考察、 _: ハウスドルフの集合論と位相空間論の誕生 数学の基礎をなす概念」、7-18 数理科学 2022 年 6 月号・特集「集合・位 現代、 ない 仮
- 7 214-229._: 論理、この厄介なもの、 https://fuchino.ddo.jp/misc/logic-2022-x.pdf 現代思想、 2022年4月号、 Vol.50, No.4,
- 8 _: 集合論的数学、 monograph, in preparation
- 9 Sakaé Fuchino, André Ottenbreit Maschio Rodrigues and Hiroshi Sakai, thematical Logic, Volume 60, issue 1-2, (2021), 17-47. Strong Löwenheim-Skolem theorems for stationary logics, I, Archive for Ma-
- 10 for Mathematical Logic, Volume 60, issue 3-4, (2021), 495–523. rems for stationary logics, II reflection down to the continuum, Archive Strong Löwenheim-Skolem theo-
- 11 Proceedings of the Asian Logic Conference 2019 rems for stationary logics, III – mixed support iteration, to appear in the Strong Löwenheim-Skolem theo-
- 12 Sakaé Fuchino and André Ottenbreit Maschio Rodrigues, Reflection princi-(2022), 1-26Proceedings of the Symposium on Advances in Mathematical Logic 2018 ples, generic large cardinals, and the Continuum Problem, to appear in the

- 13 Sakaé Fuchino, Axiomatic set theory and the foundation of mathematics, 録 2019年の前期と後期に、 神戸と Katowice (Poland) で行なった講義の講義
- https://fuchino.ddo.jp/kobe/logic-ss2019.pdf
- 14 Sakaé Fuchino, and Hiroshi Sakai: Weakly extendible cardinals and compactness of extended logics, preprint. https://arxiv.org/abs/2212.14218
- <u>15</u> Felix Hausdorff: Grundzüge der Mengenlehre, Veit & Comp., Leipzig (1914).
- 17 (2008).Gesammelte Werke, Band III, (全集 第 III 巻), Springer-Verlag
- 18 Akihiro Kanamori, The Higher Infinite, Springer-Verlag (1994/2003).
- 19 Jeff Paris, Arithmetic, Handbook of Mathematical Logicm ed.: J. Barwise (1977). and Leo Harrington: A mathematical Incompleteness in Peano
- 20 https://plato.stanford.edu/entries/leibniz-logic-influence/ Volker Peckhaus: Leibnitz's Influence on 19th Century Logic, Stanford Encyclopedia of Philosophy, (2018).
- 21 Mark Rayman: How Many Decimals of Pi Do We Really Need?, NASA/JPL Edu (2016/2022)
- https://www.jpl.nasa.gov/edu/news/2016/3/16/how-many-decimals-of-pi-do-we-really-need/
- 22 Alan Turing: On Computable Numbers with an Application to the Entschei-230 - 265dungsproblem, Proceedings of London Math Soc, Series 2, Vol.42, (1937)

- 23 433-460. Computing Machinery and Intelligence, Mind, Vol.49, (1950),
- 24 Hao Wang: From Mathematics to Philosophy, Routledge Revivals, (1974).
- [편] Wikipedia: Gaussian integral,
 https://en.wikipedia.org/wiki/Gaussian_integral
- <u>26</u> Wikipedia: Largest known prime number https://en.wikipedia.org/wiki/Largest_known_prime_number
- [전] Wikipedia: Mersenne prime,
 https://en.wikipedia.org/wiki/Mersenne_prime
- [2] Wikipedia: Ordinalzahl,

 https://de.wikipedia.org/wiki/Ordinalzahl
- <u>29</u> Ernst Zermelo: Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. Mathematische Annalen 65 (1908), 261 | 281.

雑誌投稿後に加えられた補足文献

30 Joel David Hamkins, Theorems in set theory that use computability theory tools, and vice versa, MathOverflow,

https://mathoverflow.net/a/444997 (version: 2023-04-18)