この文章は「ゲーデルと20世紀の論理学 第４巻」（東京大学出版会，2007）の，渕野 昌の執筆した第I部の第2章からの抜粋です．
ただし，2009年の後期に神戸大学で大学院の講義でテキストとして用いたときに見つけた typos などの訂正などの update が施されているため，本とは多少異なるものになっています．

2.1　整列順序

X を集合とするとき，R が X 上の二項関係であるとは，$R \subseteq X^2$ となることである．x, $y \in X$ に対し，$x\ R\ y$ で $\langle x, y\rangle \in R$ を表わすことにする．$x\ R\ y$ は，“x と y が関係 R にある” と読み下すことができる．たとえば，

$$< = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{N}^2 : x \text{ は } y \text{ より小さい}\}$$

とすると[2)]，$<$ は $\mathbb{N}$ 上の二項関係となり，ここでの記法による，“$x < y$” は通常の数の大小関係と一致する．“x は y より小さい” が述語なのに対し，$<$ は集合となっていることに注意する．

R と S をそれぞれ X と Y の上の二項関係とするとき，$f : X \to Y$ が $\langle X, R\rangle$ から $\langle Y, S\rangle$ への同型写像であるとは，f は全単射で[3)]，すべての x_0, $x_1 \in X$ に対し，

$$x_0\ R\ x_1 \ \Leftrightarrow\ f(x_0)\ S\ f(x_1)$$

となることである．f が $\langle X, R\rangle$ から $\langle Y, S\rangle$ への同型写像であるとき，これを $f : \langle X, R\rangle \xrightarrow{\cong} \langle Y, S\rangle$ とも表し，このような f が存在するとき，$\langle X, R\rangle$ と $\langle Y, S\rangle$ は同型であるという．$\langle X, R\rangle$ と $\langle Y, S\rangle$ が同型のとき，同型写像を指定せずに，$\langle X, R\rangle \cong \langle Y, S\rangle$ と書くこともある．$\langle X, R\rangle$ と $\langle Y, S\rangle$ が同型のときには，$\langle X, R\rangle$ と $\langle Y, S\rangle$ は同じ構造を持つ互いの “コピー” になっていると考えられる．

X 上の二項関係 R が半順序であるとは，次の (2.1), (2.2) が成り立つことである：

(2.1)　すべての $x \in X$ に対し $x\ R\ x$ でない;

2)　$\mathbb{N}$ が 10 ページでのように定義されているとき，“x は y より小さい” は，“$x \in y$” によって定義することができる．

3)　$f : X \to Y$ として，すべての異なる x, $x' \in X$ に対し，$f(x)$, $f(x')$ も異なるとき，f は単射あるいは 1 対 1 写像であるといい，すべての $y \in Y$ に対し $f(x) = y$ となる $x \in X$ がとれるとき，全射あるいは上射（上への写像）であるという．f が単射かつ全射のとき，f は全単射であるという．

(2.2)　すべての $x, y, z \in X$ に対し，$x \mathrel{R} y$ かつ $y \mathrel{R} z$ なら $x \mathrel{R} z$.

R は X の 2 元（のうちのいくつか）の比較を与えるものと考えることができる．“$x \mathrel{R} y$” を “y は x より真に大きい” と読み下してみると，(2.1), (2.2) の条件は納得できるであろう．

X 上の半順序 R がさらに

(2.3)　すべての異なる $x, y \in X$ に対し，$x \mathrel{R} y$ または $y \mathrel{R} x$ のどちらかが成り立つ

を満たすとき，R は X 上の全順序であるという．(2.3) により，R が X 上の全順序のときには，X の任意の 2 元は R により比較が可能となる．したがって，X の元は R により “一列に” ならべられることになる．そのため全順序を線型順序とよぶこともある．以下で半順序を考えるときには，“y は x より真に大きい” という解釈を強調するため，文字 R のかわりに “$<$” という記号を使うことにする．$<$ が X 上の半順序であるとき，“$x \leq y$” で “$x < y$ または $x = y$” という関係を表わす．これは X 上の二項関係としては

$$\leq \;=\; < \cup \{\langle x, x\rangle \in X^2 : x \in X\}$$

を考えていることになる．$<$ が X 上の半順序（または全順序）のとき，X と $<$ の組 $\langle X, < \rangle$ を半順序集合（または全順序集合）とよぶ．

X を集合として $<$ を X 上の二項関係とする．$\langle X, < \rangle$ が整列順序集合である[4)]とは，次が成り立つことである：

(2.4)　$\langle X, < \rangle$ は全順序集合である；

(2.5)　すべての空でない X の部分集合 A は $<$ に関する最小元を持つ（これを $\min A$ で表わす）．

次は容易に示せる：

4)　$<$ は X 上の整列順序である，あるいは，$<$ は X を整列する，などとも言うことにする．

補題 2.1 $\langle X, < \rangle$ が整列順序集合で，$C \subseteq X$ なら，

$$< \restriction C = < \cap (C \times C) = \{\langle x, y\rangle : x \in C,\, y \in C \text{ かつ } x < y\}$$

は C 上の整列順序となる．

簡単のために $< \restriction C$, $< \cap (C \times C)$ などと書くかわりに，単に $<$ と書くことが多く，たとえば，“$\langle C, < \rangle$ は整列順序である”，などと言うことにする．後で二項関係の一つとして，集合の要素関係 “$\in$” を考えることになる．このときも，たとえば，$\langle X, \in \rangle$ と書いたときには，ここでの $\in$ は $\in \restriction X = \in \cap X^2 = \{\langle x, y\rangle \in X^2 : x \in y\}$ のことである．

$\langle X, < \rangle$ が整列順序集合で $X \neq \emptyset$ なら，$\langle X, < \rangle$ は最小元を持つ： これを見るには，(2.5) で，A として X 自身をとってみればよい．

一方，X は最大元を持つ必要はない — 例えば，$\langle X, < \rangle = \langle \mathbb{N}, < \rangle$ とすると，X が整列集合となることは容易に確かめられるが，X は最大元を持たない．

$x \in X$ が X の最大元でないなら，$y \in X$, $x < y$ で，どんな $z \in X$ に対しても $x < z < y$ とはならないようなものがとれる — このときには，$\{z \in X : x < z\}$ は空でないから，この集合の最小元がとれるが，これが求める性質を持つものとなっている．このような y を x の（X での）次の元と言う．x の X での次の元を x' と表わす．$x' = \min\{z \in X : x < z\}$ である．

X の元 z は X の最小元でなく，どの $x \in X$ によっても，x' と表わせないとき， X の極限点とよばれる．X のすべての元 x は，X の最小元であるか，極限点であるか,（ただ一つに決まる $z \in X$ の）次の元であるか，のどれかである．最後の場合 x は X の非極限点である，と言うことにする．x が X の極限点なら，すべての $z \in X$ に対し，$z < x$ なら $z' < x$ である：$z < x$ なら $z' \leq x$, だが x は次の元でないことから，ここで “$=$” は成り立たないからである．

例 2.2 自然数の全体の集合 $\mathbb{N}$ は自然な順序により整列順序集合となる．$n \in \mathbb{N}$ に対し，$n' = n \cup \{n\}$ である．すべての $n \in \mathbb{N}$ に対し，$n \neq 0$ な

ら，$m' = n$ となる $m \in \mathbb{N}$ がとれるから，$\mathbb{N}$ は極限点を含まない．一方 $X = \mathbb{N} \cup \{\mathbb{N}\}$ として，X 上の二項関係 $<_X$ を，

$$<_X = \{\langle x, y\rangle \in X^2 : (x, y \in \mathbb{N} \text{ かつ } x < y) \\ \text{または } (x \in \mathbb{N} \text{ かつ } y = \mathbb{N})\ \}$$

と定義すると，$<_X$ は X 上の整列順序となり，$\mathbb{N}$ は X での（$<_X$ に関する）極限点となっている．

例 2.3　実数の全体の集合 $\mathbb{R}$ を自然な順序で考えると，線形順序集合となるが，整列順序集合ではない．たとえば，$\mathbb{R}$ の部分集合 $\{x \in \mathbb{R} : 0 < x\}$ は最小元を持たない．

$\langle X, <_X\rangle$ と $\langle Y, <_Y\rangle$ を全順序集合とするとき，$f : X \to Y$ が真に増加とは，任意の x_0, $x_1 \in X$ が $x_0 <_X x_1$ を満たすとき，$F(x_0) <_Y F(x_1)$ が成り立つこととする．

補題 2.4　$\langle X, <\rangle$ を整列順序として，$F : X \to X$ を真に増加な関数とする．このとき，すべての $x \in X$ に対し，$x \leq F(x)$ が成り立つ．

証明　$F_0 : X \to X$ が補題の反例となっているとして矛盾を導く．つまり F_0 は真に増加だが，$F_0(x) < x$ となるような $x \in X$ が存在するとする．このとき，$x_0 = \min\{x \in X : F_0(x) < x\}$ がとれるが，$F_0(x_0) < x_0$ だから，x_0 の最小性より，$F_0(x_0) \leq F_0(F_0(x_0))$ となる．一方 F_0 の増加性から，$F_0(x_0) < x_0$ の両辺に F_0 を施すと $F_0(F_0(x_0)) < F_0(x_0)$ となる．したがって，(2.2) により，$F_0(x_0) < F_0(x_0)$ となるが，これは (2.1) に矛盾である．　(証明終わり)

系 2.5　$\langle X, <\rangle$ を整列順序とする．このとき，X 上の恒等写像 id_X は，$\langle X, <\rangle$ からそれ自身への唯一の同型写像[5)]となる．

5)　集合 X に対し，$id_X = \{\langle x, x\rangle : x \in X\}$ で定義される X から X への関数を X 上の恒等写像という．すべての $x \in X$ に対し $id_X(x) = x$ である．

証明　id_X が $\langle X, < \rangle$ から $\langle X, < \rangle$ への同型写像であることは明らかである．$F : X \to X$ を任意の同型写像とするとき，F も F^{-1} も増加関数となるから，補題 2.4 により，すべての $x \in X$ に対し，$x \le F(x)$ かつ $x = F^{-1}(F(x)) \ge F(x)$, したがって $x = F(x)$ が成り立つ．よって $F = id_X$ である．　(証明終わり)

系 2.6　$\langle X, < \rangle$ と $\langle Y, < \rangle$ を整列順序集合とする．もし，$\langle X, < \rangle$ から $\langle Y, < \rangle$ への同型写像が存在すれば，この同型写像は一意に決まる．

証明　$F : X \to Y$ と $G : X \to Y$ を $\langle X, < \rangle$ から $\langle Y, < \rangle$ への同型写像とすれば，$F^{-1} \circ G$ は $\langle X, < \rangle$ から $\langle X, < \rangle$ への同型写像となるから，系 2.5 により，$F^{-1} \circ G = id_X$ である．したがって，この等式の両辺に F を適用すると $G = F$ がわかる．　(証明終わり)

$\langle X, < \rangle$ を半順序集合とする．X の部分集合 I が X の始片であるとは，

$$(\forall c \in I)(\forall x \in X)(x \le c \;\to\; x \in I)$$

が成り立つこととする．X の始片 I は X と異るとき X の真の始片であるという．

$\langle X, < \rangle$ を整列順序集合として，I が X の真の始片のとき，$x = \min(X \setminus I)$. として，x で定義される始片を $X_{<x} = \{y \in X : y < x\}$ と定義すると，$I = X_{<x}$ となる：$y \in X_{<x}$ なら，$y < x$ だから，x の定義から $y \in I$ がわかる．逆に，$c \in I$ なら，$c < x$ である：そうでなければ（$<$ が全順序であることから）$x \le c$ となり，I は始片だから $x \in I$ となってしまい，x の定義に矛盾である．したがって，$c \in X_{<x}$ である．

系 2.7　$\langle X, < \rangle$ が整列順序集合なら，$\langle X, < \rangle$ は，$\langle X, < \rangle$ のどの真の始片とも同型にならない．

定理 2.9 の証明のために，まず，次の補題を用意しておく．証明は 11 ページで述べた関数の定義 (1.2) から明らかである．

補題 2.8　$\mathcal{F}$ を関数を要素とする集合とする．$F = \bigcup \mathcal{F}\,(= \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f)$ が関数となるのは，$\mathcal{F}$ に含まれる関数が互いに矛盾しないときである[6)]．また，このときには，$dom(F) = \bigcup_{f \in \mathcal{F}} dom(f)$ となる．

定理 2.9　$\langle X, < \rangle$ と $\langle Y, < \rangle$ を整列順序集合とするとき，次の 3 つのうち（ちょうど）1 つが成り立つ：

(1)　$\langle X, < \rangle$ と $\langle Y, < \rangle$ は同型である．

(2)　$\langle X, < \rangle$ は $\langle Y, < \rangle$ の真の始片の 1 つと同型である．

(3)　$\langle Y, < \rangle$ は $\langle X, < \rangle$ の真の始片の 1 つと同型である．

証明　定理が成り立たないとすると，整列順序集合 $\langle X, < \rangle, \langle Y, < \rangle$ で，(1), (2), (3) のいずれも成り立たないようなものが存在する．

$$\begin{aligned}\mathcal{F} = \{f :\ & X \text{ のある始片 } X' \text{ と } Y \text{ のある始片 } Y' \text{ に対し}\\ & f : \langle X', < \rangle \overset{\cong}{\to} \langle Y', < \rangle\,\}\end{aligned}$$

とする[7)]．このとき，

Claim 2.9.1　$f, g \in \mathcal{F}$ なら，$f \subseteq g$ か $g \subseteq f$ のいずれかが成り立つ．

$\vdash$　$f, g \in \mathcal{F}$ なら，$dom(f), dom(g)$ はともに X の始片だから，$dom(f) \subseteq dom(g)$ か $dom(g) \subseteq dom(f)$ のいずれかが成り立つ．仮に $dom(f) \subseteq dom(g)$ とすると，補題 2.1 と系 2.6 により，$f = g \restriction dom(f)$ となるから，$f \subseteq g$ である[8)]．同様に $dom(g) \subseteq dom(f)$ とすると，$g \subseteq f$ が成り立つ．

$\dashv$

Claim 2.9.1 と補題 2.8 により，$f^* = \bigcup \mathcal{F}$ は $dom(f^*) = \bigcup_{f \in \mathcal{F}} dom(f)$ 上の関数となるが，

Claim 2.9.2　f^* は $\mathcal{F}$ の最大元となる．

6)　$\mathcal{F}$ に含まれる関数が互いに矛盾しない，とは，すべての $f, g \in \mathcal{F}$ に対し，$f \cap g$ が（$dom(f) \cap dom(g)$ 上の）関数となるとき（つまり，すべての $x \in dom(f) \cap dom(g)$ に対し，$f(x) = g(x)$ となるとき）である．

7)　$\mathcal{F}$ が集合であることは $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X \times Y)$ と分出公理により示せる．

8)　$f \restriction S$ で関数 f の S への制限を表わす．$f : X \to Y$ のとき，$f \restriction S = f \cap (S \times Y)$ である．

$\vdash$ $dom(f^*) = \bigcup\{dom(f) : f \in \mathcal{F}\}$, $f^{*\,\prime\prime}\,dom(f^*) = \bigcup\{f^{\prime\prime}\,dom(f) : f \in \mathcal{F}\}$ だから，f^* は X の始片から Y の始片への写像となっている．$X^* = dom(f^*)$, $Y^* = f^{*\,\prime\prime}\,dom(f^*)$ とおく．

f^* が順序を保存することを見るために $x, y \in X^*$, $x < y$ をとる．このとき $f, g \in \mathcal{F}$ で，$x \in dom(f)$, $y \in dom(g)$ となるものがあるが，Claim 2.9.1 により，たとえば，$g \subseteq f$ としてよい．したがって $x, y \in dom(f)$ としてよいが，$f \in \mathcal{F}$ により，$x < y$ から $f^*(x) = f(x) < f(y) = f^*(y)$ となる．$f^*(x) < f^*(y)$ なら $x < y$ となることも同様に示せる．

したがって $f^* \in \mathcal{F}$ だが，f^* の定義から，すべての $f \in \mathcal{F}$ に対し，$f \subseteq f^*$ となるから，f^* は $\mathcal{F}$ の最大元である． $\dashv$

仮定により，$X^* \neq X$, $Y^* \neq Y$ だから，$x^* = \min(X \setminus X^*)$, $y^* = \min(Y \setminus Y^*)$ がとれるが，

$$f^{**} = f^* \cup \{\langle x^*, y^* \rangle\}$$

とすれば，明らかに $f^{**} \in \mathcal{F}$ となる．ところが，$f^* \subsetneqq f^{**}$ だから，これは f^* が $\mathcal{F}$ の最大元であることに矛盾である． (証明終わり)

2.2 数学的帰納法による証明と関数の再帰的定義

整列順序集合上では，命題を帰納的に証明したり，関数を再帰的に定義したりすることができる．

定理 2.10 (帰納法)　$\langle X, < \rangle$ を整列順序集合として $E(x)$ を，X の元 x に関する命題とする．すべての $x \in X$ に対し， 条件：

(2.6)　すべての $y < x$ に対し命題 $E(y)$ が成り立つなら，x に対しても命題 $E(x)$ が成り立つ

が成り立つなら，すべての $x \in X$ に対し，命題 E が成り立つ．

証明　定理が成り立たないと仮定して，矛盾を導く．この仮定により，整列順序集合 $\langle X, < \rangle$ と X の元 x に関する命題 $E(x)$ で，E は (2.6) を満たすが，$E(x)$ とならないような $x \in X$ が存在するようなものがとれる．したがって，

$$Y = \{ x \in X : E(x) \text{ は成り立たない} \}$$

とすると Y は空でない．よって，X が整列順序集合であることから，Y の最小元 x_0 がとれる．x_0 の最小性から，すべての $y \in X$, $y < x_0$ に対し，$E(y)$ が成り立つ．したがって (2.6) により，$E(x_0)$ も成り立つことが帰結できてしまうが，これは，$x_0 \in Y$ に矛盾である．　(証明終わり)

整列順序 $<$ 上の帰納法は，次のようなやり方で行われることも多い[9)]：

定理 2.11　$\langle X, < \rangle$ を整列順序集合として $E(x)$ を，X の元 x に関する命題とする．次の (2.7), (2.8), (2.9) が成り立つとする：

(2.7)　X の最小元は E を満たす.

(2.8)　$x \in X$ が E を満たし，X の最大元でないなら，x' も E を満たす.

(2.9)　x が極限点で，$y < x$ となるすべての y が E を満たすなら，x も E を満たす.

このとき，すべての $x \in X$ は E を満たす.

証明　E が 定理 2.10 での (2.6) を満たすことを示せばよい．このため，$x \in X$ を任意にとり，$E(y)$ がすべての $y < x$ に対し成り立つとして，$E(x)$ を示す.

x が X の最小元のときには，(2.7) により $E(x)$ となるから，(2.6) は成り立つ．x が最小元でないときには，x は（ある X の元の）次の元であるか，極限点であるかのどちらかであるが，x が次の元のときには，(2.8) により，x が極限点であるときには，(2.9) により，$E(x)$ が成り立つ.

9)　ここでは，p.32 でのように，$x \in X$ が X の最大元でないとき，x' で x の X での次の元を表している.

したがって，(2.6) が成り立つことがわかるが，このことと定理 2.10 により，すべての $x \in X$ に対し $E(x)$ が成り立つことが帰結できる．

(証明終わり)

定理 2.12 (関数の再帰的定義)　$\langle X, < \rangle$ を整列順序集合として，Y をある集合とする．G を，

$$dom(G) = \{f : f \text{ は，ある } X \text{ の真の始片から } Y \text{ への関数 }\}$$

から Y への関数とする[10)]．このとき，$F : X \to Y$ で，すべての $x \in X$ に対し，

$$F(x) = G(F \restriction X_{<x}) \tag{2.10}$$

となるようなものが，ちょうど一つ存在する[11)]．

証明　まず，(2.10) を満たすような F がたかだか一つしか存在しないことを示す．X 上の関数 F と F' が，ともに (2.10) を満たしていると仮定する．$F \neq F'$ だったとすると，$\{x \in X : F(x) \neq F'(x)\}$ は空でないから，この集合の最小元 x_0 がとれるが，$y < x_0$ なら x_0 の最小性から，$F(y) = F'(y)$ となる．したがって，$F \restriction X_{<x_0} = F' \restriction X_{<x_0}$ となるが，このことから，

$$F(x_0) = G(F \restriction X_{<x_0}) = G(F' \restriction X_{<x_0}) = F'(x_0)$$

となってしまい x_0 のとり方に矛盾する．したがって $F = F'$ である．

次に，(2.10) を満たすような F が実際に存在することを示す．

$$\begin{aligned}\mathcal{F} = \{f : f \text{ は } X \text{ のある始片 } I \text{ 上の関数で} \\ \text{すべての } x \in I \text{ に対し，} \quad f(x) = G(f \restriction X_{<x}) \text{ が成り立つ }\}\end{aligned}$$

10)　直観的には，G は，F が X のある始片まで定義できたときに，これを一つ先の元にどう延長するかを指定する関数である．(2.10) は，F がこの延長を “くりかえす” ことで得られる関数となっていることを主張している．

11)　定理 2.12 は，G が関数でなく，定義可能な対応（つまり，脚注 19 の意味でのクラス関数）である場合にも成り立つが，このことの証明には，分出公理だけでは不十分で，置換公理が必要となる．

とする．$\emptyset \in \mathcal{F}$ だから[12)]，$\mathcal{F} \neq \emptyset$ である．

以下で，この $\mathcal{F}$ に補題 2.8 を適用して，$F = \bigcup \mathcal{F}$ が求めるようなものであることを示す．

Claim 2.12.1 $f, g \in \mathcal{F}$ なら f と g は矛盾しない．

$\vdash$ $dom(f) \subseteq dom(g)$ と仮定してよい．f と g が矛盾するなら，$x \in dom(f) \cap dom(g)$ で $f(x) \neq g(x)$ となるものが存在する．x_0 をそのようなもののうち最小のものとすると，x_0 の最小性から $f \restriction X_{<x_0} = g \restriction X_{<x_0}$ となるから，$\mathcal{F}$ の定義から，$f(x_0) = G(f \restriction X_{<x_0}) = G(g \restriction X_{<x_0}) = g(x_0)$ となってしまい矛盾である．$\dashv$

Claim 2.12.2 $F = \bigcup \mathcal{F}$ は X 上の関数で，$F \in \mathcal{F}$ である．とくに F は (2.10) を満たす．

$\vdash$ $F = \bigcup \mathcal{F}$ とすると，Claim 2.12.1 と補題 2.8 により，F は X の始片 $\bigcup_{f \in \mathcal{F}} dom(f)$ 上の関数となる[13)]．すべての $f \in \mathcal{F}$ は (2.10) を満たすから，F も (2.10) を満たす．したがって $F \in \mathcal{F}$ である．$\dashv$

もし $dom(F) = X$ でなかったとすると $X \setminus dom(F)$ の最小元 x_0 がとれる．x_0 の最小性と $dom(F)$ が X の始片であることから，$dom(F) = X_{<x_0}$ がわかる．ここで，

$$f^{**} = F \cup \{\langle x_0, G(F) \rangle\}$$

とすると，$f^{**} \in \mathcal{F}$ となるが，$F \subsetneqq f^{**}$ だから，これは F のとり方に矛盾である．(証明終わり)

定理 2.11 と同じように，上の定理に対しても，X 上の F が 場合分けをともなった再帰によって定義されているような形のヴァージョンが考えられる：

12) 関数の定義から，$\emptyset : \emptyset \to \emptyset$ だが，$\emptyset$ は $\emptyset$ 上の唯一の関数で，x_0 を X の最小元とするとき，$X_{<x_0} = \emptyset$ であることに注意すると，$\emptyset \in \mathcal{F}$ がわかる．

13) ここに，$\bigcup_{f \in \mathcal{F}} dom(f)$ は $\bigcup\{dom(f) : f \in \mathcal{F}\}$ のことである．この集合は，分出公理からその存在を保証される $\{dom(f) : f \in \mathcal{F}\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ に和集合の公理を適用して得られるものとなっている．脚注 11 は，G がクラスの場合には，対応する証明で，上の "$\subseteq \mathcal{P}(X)$" によるトリックが使えなくなるため，置換公理を使って $\bigcup\{dom(f) : f \in \mathcal{F}\}$ の存在を保証する必要が出てくることを指摘している．

定理 2.13　$\langle X, < \rangle$ を整列順序集合として，Y を集合とする．$H : Y \to Y$ とし，K を $\{ f : f$ は，ある X の真の始片から Y への関数 $\}$ から Y への写像として，$a \in Y$ とする．このとき，関数 $F : X \to Y$ で，

$$F(x) = \begin{cases} a & x \text{ が } X \text{ の最小元のとき} \\ H(F(z)) & x \text{ が } X \text{ の非極限点で } x = z' \text{ のとき} \\ K(F \restriction X_{<x}) & x \text{ が } X \text{ の極限点のとき} \end{cases} \tag{2.11}$$

となるものがただ一つ存在する．

集合 x が推移的とは，すべての $y \in x$ と $z \in y$ に対し $z \in x$ が成り立つことだった．

例 2.14　$\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ は推移的である．$\{\{\emptyset\}\}$ は推移的でない．
$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$ は推移的である．

補題 2.15　(1)　t が推移的なら $t \cup \{t\}$ も推移的である．

(2)　集合 $\mathcal{F}$ の元がすべて推移的なら，$\bigcup \mathcal{F}$ も推移的である．

証明　(1): $x \in y \in t \cup \{t\}$ とする．$y \in t$ なら，t は推移的だから，$x \in t$ である．また $y \in \{t\}$ なら $y = t$ となるから，このときも $x \in t$ となる．したがって，いずれの場合にも $x \in t \subseteq t \cup \{t\}$ である．

(2): $x \in y \in \bigcup \mathcal{F}$ なら，$u \in \mathcal{F}$ で $y \in u$ となるものがあるが，仮定から u は推移的だから，$x \in u$ となる．したがって，$x \in \bigcup \mathcal{F}$ である．

(証明終わり)

補題 2.16　T を推移的として，$\in$ は T 上の全順序となっているとする．このとき，

(0)　T が（$\in$ に関する）極小元 x を持てば，$x = \emptyset$ である．

(1)　すべての $x \in T$ は推移的となる．

(2)　$x, y \in T$, $x \in y$ で，y は（$\in$ の意味で）x の次の元になっているとする．このとき，$y = x \cup \{x\}$ である．

(3)　$U \subseteq T$ で，U は推移的で，最大元を持たないとする．$x \in T$ が U の（$\in$ の意味での）最小の上界になっているとき，$U = \bigcup U = x$ である．

証明　(0): $x \in T$ で $x \neq \emptyset$ とすれば，$y \in x$ がとれるが，T が推移的であることから，$y \in T$ となり，x は T の $\in$ に関する極小元でないことがわかる．

(1): $z \in y \in x$ なら，T が推移的により $y \in T, z \in T$ である．したがって，$\in$ が T 上の全順序であることから，$z \in x$ が結論できる．

(2): $x \in y$ と (1) により，$x \subseteq y$ である．したがって，$x \cup \{x\} \subseteq y$ だが，もし $x \cup \{x\} \neq y$ だったとすると，ある $z \in y \setminus (x \cup \{x\})$ がとれる．とくに $z \neq x$ である．T は推移的だから，$z \in T$ となるが，$z \notin x \cup \{x\}$ だから，$\in$ が T 上で全順序となっていることから，$x \in z$ となる．したがって，$x \in z \in y$ となるが，$\in$ は T 上全順序であることから $z \neq y$ である．これは y が x の次の元であることに矛盾する．

(3): x は U の上界だが U の最大元ではないから，$U \subseteq x$ となる．したがって，$U \neq x$ とすれば，$z \in x \setminus U$ がとれるが，すべての $u \in U$ に対し，$u \in z$ となる： もしそうでないなら，$\in$ が T 上全順序であることから，$u = z$ または，$z \in u$ となるが，U が推移的であることから，いずれの場合にも $z \in U$ となり z のとり方に矛盾である．したがって z は U の上界となるが，$z \in x$ だから，これは x が U の最小上界であることに矛盾である．

以上で $U = x$ が示せた．$U = \bigcup U$ であることは次のようにして見ることができる: $x \in U$ なら，U が最大元を持たないことと (2) から，$x \cup \{x\} \in U$ である．したがって，$x \in x \cup \{x\} \subseteq \bigcup U$ でる．逆に，$x \in \bigcup U$ なら，$x \in y \in U$ となる y が存在するが，U は推移的だから，このことから $x \in U$ となる．　(証明終わり)

定理 2.17 (モストフスキーの同型定理)
$\langle X, < \rangle$ を，整列順序集合とする．このとき，推移的な集合 T と同型写像

$$\pi : \langle X, < \rangle \xrightarrow{\cong} \langle T, \in \rangle$$

がとれる．とくに $\in$ は T 上の整列順序となっている．さらに，ここでの π と T は一意に決まる．

T は $\langle X, < \rangle$ のモストフスキー像とよばれ，π はモストフスキー同型写像とよばれる．

証明 (Step I): まず，このような T と π が存在するとすればその存在は一意であることを示す．そうでなかったとして，$\pi : \langle X, < \rangle \overset{\cong}{\to} \langle T, \in \rangle$ と $\pi' : \langle X, < \rangle \overset{\cong}{\to} \langle T', \in \rangle$ を異なる同型写像とする．このとき，

$$\{x \in X : \pi(x) \neq \pi'(x)\}$$

は空でないから，最小元 x_0 を持つ．

もし，x_0 が X の最小元なら，$\pi(x_0)$ も $\pi'(x_0)$ も T の最小元となるから，補題 2.16, (0) により， $\pi(x_0) = \emptyset = \pi'(x_0)$ となってしまい矛盾である．

もし，x_0 が，ある $y \in X$ の次の元なら，x_0 の最小性から，$\pi(y) = \pi'(y)$ となる．π は同型写像だから，$\pi(x_0)$ は $\pi(y)$ の T での次の元となる．したがって，補題 2.16, (2) により，$\pi(x_0) = \pi(y) \cup \{\pi(y)\}$ となることがわかる．同様に，$\pi'(x_0) = \pi'(y) \cup \{\pi'(y)\}$ となる．したがって，$\pi(x_0) = \pi'(x_0)$ となってしまい矛盾である．

もし x_0 が極限点なら，x_0 の最小性から，$\pi \restriction X_{<x_0} = \pi' \restriction X_{<x_0}$ となるが，x_0 は $X_{<x_0}$ の最小上界で，π が同型写像であることから，$\pi(x_0)$ も，$\pi''X_{<x_0}$ の最小上界である．また，$X_{<x_0}$ は X の始片だから，$\pi''X_{<x_0}$ も T の（$\in$ に関する）始片となり，したがって推移的である．よって，補題 2.16, (3) により $\pi''X_{<x_0} = \pi(x_0)$ である．同様に，$\pi'''X_{<x_0} = \pi'(x_0)$ となるから，$\pi(x_0) = \pi'(x_0)$ となり矛盾である．

(Step II): 次に，命題

(2.12) すべての $x \in X$ に対し，推移的な T_x と，

$$\pi_x : \langle X_{<x}, < \rangle \overset{\cong}{\to} \langle T_x, \in \rangle$$

となる写像 π_x が存在する．さらに，ここでの π_x と T_x は一意に決まる．

を $x \in X$ に関する帰納法で示す．一意性は (Step I) でと同様に証明できるので，命題の前半の帰納法による証明を与える：

(IIa): $x \in X$ が X の最小元であるときには，$X_{<x} = \emptyset$ だから $T_x = \emptyset$, $\pi = \emptyset$ とすればよい．

(IIb): ある $x \in X$ に対し，推移的な T_x と $\pi_x : \langle X_{<x}, < \rangle \xrightarrow{\cong} \langle T_x, \in \rangle$ となるような写像，π_x の組がとれない，とすると，そのような x のうちで最小のものがとれる．これを x_0 とすると，x_0 の最小性から，すべての $x < x_0$（つまり $x \in X_{<x_0}$）に対し，推移的な T_x と，写像 π_x で $\pi_x : \langle X_{<x}, < \rangle \xrightarrow{\cong} \langle T_x, \in \rangle$ となるものがとれる．(IIa) により，x_0 は X の最小元ではないから，$X_{<x_0} \neq \emptyset$ である．

(IIb1): x_0 がある $x^* \in T$ の次の元だとすると，$\pi_{x_0} = \pi_{x^*} \cup \{\langle x^*, T_{x^*} \rangle\}$ とすれば，

$$\pi_{x_0} : \langle X_{<x_0} \rangle \xrightarrow{\cong} \langle T_{x^*} \cup \{T_{x^*}\}, \in \rangle$$

となるが，補題 2.15, (1) により $T_{x^*} \cup \{T_{x^*}\}$ は推移的だから，これは x_0 のとり方に矛盾である．

(IIb2): x_0 が極限点だとすると，(Step I) を各 $x < x_0$ に対する T_x, π_x に適用すると，$x < y < x_0$ なら，$\pi_y \restriction X_{<x}$ が $\langle X_{<x}, < \rangle$ から，$\langle \pi_y{}'' X_{<x}, \in \rangle$ への同型写像となっていることから，$\pi_x \subseteq \pi_y$, $T_x = \{z \in T_y : z \in \pi_y(x)\}$ となることがわかる．したがって，$\pi_{x_0} = \bigcup\{\pi_x : x < x_0\}$ とすると，

$$\pi_{x_0} : \langle X_{<x_0}, < \rangle \xrightarrow{\cong} \bigcup\{T_x : x < x_0\}$$

となるが，補題 2.15, (2) により，$\bigcup\{T_x : x < x_0\}$ は推移的だから，これは，x_0 のとり方に矛盾である．

(Step III): (2.12) により，すべての $x \in X$ に対し，推移的な T_x と，写像 π_x で $\pi_x : \langle X_{<x}, < \rangle \xrightarrow{\cong} \langle T_x, \in \rangle$ となるものが存在して，一意性より，x, $y \in X$, $x < y$ なら，$\pi_x \subseteq \pi_y$, $T_x = \{z \in T_y : z \in \pi_y(x)\}$ となることがわかる．したがって，$\langle X, < \rangle$ が最大元 x^* を持つ場合には，$\pi = \pi_{x^*} \cup \{\langle x^*, T_{x^*} \rangle\}$, $T = T_{x^*} \cup \{T_{x^*}\}$ とすれば，(IIb1) と同様に，これらの π, T が求めているようなものであることが示せる．$\langle X, < \rangle$ が最大元を持たない場合には，$\pi = \bigcup_{x \in X} \pi_x$, $T = \bigcup_{x \in X} T_x$ とすると，(IIb2) でと同様に議論して，これらの π, T が求めているようなものであることが示せる． (証明終わり)

上の証明を詳しく調べてみると，いくつかの個所で置換公理が本質的に使われていることがわかる．実際，定理 3.13 の後で見るように，上の定理 2.17

は，置換公理なしでは証明できないことが示せる．

補題 2.18　$\langle X, <\rangle$ を整列順序集合として， Y を X の始片とする．（したがって $\langle Y, <\rangle$ も整列順序集合である．）$\pi_X : \langle X, <\rangle \to \langle T, \in\rangle$ と $\pi_Y : \langle Y, <\rangle \to (S, \in)$ をこれらに属するモストフスキー同型写像とする．このとき $\pi_Y = \pi_X \restriction Y$ となり，したがって $S \subseteq T$ で，S は T の $\in$ に関する始片となる．

証明　$\pi_X \restriction Y : \langle Y, <\rangle \xrightarrow{\cong} (\pi'' Y, \in)$ はモストフスキー同型写像となる．したがって，定理 2.17 でのモストフスキー同型写像の一意性から $\pi_Y = \pi_X \restriction Y$ である．よって，$S = \pi_Y{}'' Y = \pi_X{}'' Y \subseteq T$ で π_X は同型写像だから，S は T の $\in$ に関する始片となることがわかる．　(証明終わり)

2.3　順序数

順序数 (ordinals) のクラス On を導入する．次の性質を On が持つことがポイントとなる．

(2.13)　On は真のクラスで，推移的で[14)]，$\in$ に関し整列順序となっている[15)]．

(2.14)　各順序数 α は,（推移的な）集合で,（$\in$ により）整列されている．

(2.15)　任意の整列順序集合 $\langle X, <\rangle$ は，一意に決まる順序数 $\langle \alpha, \in\rangle$ と順序同型となる．

これらの性質，特に最後の (2.15) により，順序数の全体のクラスは，すべての整列順序集合のクラスの（順序同型に関する同値類の）自然な代表元を集めたクラスとみなせる．

14)　つまり，$\alpha \in On$ で $\beta \in \alpha$ なら $\beta \in On$ が成り立つ．
15)　つまり，$\in$ は On 上線型順序となり，On のどの部分クラスも，$\in$ に関する最小元を持つ．

この節での議論は，とくに別に指定しないかぎり，基礎の公理を用いないものとなっているが，順序数の理論を基礎の公理を用いずに導入しておくことで，基礎の公理の累積的階層による特徴付け（系 2.26）や，基礎の公理のそれ以外の ZF の公理上の無矛盾性の証明（定理 3.10）が可能となる．

推移的な集合 α が $\in$ により整列されているとき，α は順序数であるという．

$$On = \{\alpha : \alpha \text{ は順序数 }\}$$

として[16]，

(2.16)　$\alpha, \beta \in On$ に対し，$\alpha < \beta \;\Leftrightarrow\; \alpha \in \beta$

として On 上の関係 $<$ を定義する．以下の補題 2.20 で示されるように，$<$ は On 上の全順序となる．

補題 2.19　α が順序数となるのは，$\langle \alpha, \in \rangle$ が，ある整列順序集合のモストフスキー像となる，ちょうどそのときである．

証明　モストフスキー像の定義から，$\langle \alpha, \in \rangle$ が，ある整列順序集合のモストフスキー像となるなら，α が順序数となることは明らかである．逆に α が順序数なら，$\langle \alpha, \in \rangle$ は整列順序集合で，$\langle \alpha, \in \rangle$ は自分自身のモストフスキー像である．　(証明終わり)

任意の整列順序集合 $\langle X, <_X \rangle$ に対し，$\langle X, <_X \rangle \cong \langle \alpha, \in \rangle$ となる $\alpha \in On$ はモストフスキーの定理により一意に決まるが，このような α を $\langle X, <_X \rangle$ の順序型とよび，$otp(\langle X, <_X \rangle)$ で表わす．ただし，X 上の順序 $<_X$ が何かが文脈から明らかなときには，簡単のために $otp(X)$ と書くことにする．

補題 2.20　(1)　$\beta \in \alpha \in On$ なら $\beta \in On$ である．したがって，On は推移的なクラスである．

(2)　$\alpha \in On$ なら，$\alpha = \{\beta \in On : \beta < \alpha\}$ となる．

16)　順序数の全体をあらわす記号としては，“On” ではなく “Ord” が使われることもある．

(3)　$\alpha, \beta \in On$ に対し，$\alpha = \beta$ または，$\alpha \subsetneqq \beta$ または $\beta \subsetneqq \alpha$ のいずれかが成り立つ．

(4)　$\alpha \in On$ なら $\alpha \notin \alpha$ である．

(5)　$\alpha, \beta \in On$ に対し，$\beta < \alpha \ \Leftrightarrow\ \beta \subsetneqq \alpha$ が成り立つ．

(6)　M を順序数からなる集合とするとき，$\bigcup M \in On$ となり，さらに（上の (2.16) で定義した $<$ に関し）$\bigcup M = \sup M$ である．

(7)　$X \subseteq On$ が On で共終[17)]なら X は真のクラスである．とくに，On は真のクラスである．

証明　(1): $\beta \in \alpha \in On$ とすると，補題 2.16 (1) により，β は推移的で，二項関係 $\in$ は β 上の線形順序になっている．さらに，補題 2.1 により，$\in$ は β 上の整列順序でもある．

(2): $\alpha = \{x : x \in \alpha\}$ だから，(1) により，$\alpha = \{\beta \in On : \beta \in \alpha\}$ である．

(3): 定理 2.9 により，α と β は同型であるか，α は β の真の始片と同型であるか，β は α の真の始片と同型であるかのいずれかが成り立つ．ここで α と β が同型なら，α と β は両方とも α のモストフスキー像になるから，モストフスキー同型写像の一意性から $\alpha = \beta$ である．

もし α が β の真の始片 γ と同型なら，α と γ はともに α のモストフスキー像となるから，$\alpha = \gamma$ である．したがって $\alpha \subsetneqq \beta$ が成り立つ．

同様にして，β が α の真の始片と同型なら，$\beta \subsetneqq \alpha$ となることがわかる．

(4): もし $\alpha \in \alpha$ だったとすると，α の元 x で $x \in x$ となるものが存在することになるが（α 自身がそのようなものになっている），これは $\in$ が α 上の全順序になっていることに矛盾する．

(5): $\beta < \alpha$ つまり，$\beta \in \alpha$ なら，α の推移性から，$\beta \subseteq \alpha$ となる．(4) により，$\beta \in \alpha \setminus \beta$ だから，$\beta \subsetneqq \alpha$ である．

逆に，$\beta \subsetneqq \alpha$ だったとする．ξ を，$\alpha \setminus \beta$ の $\in$ に関する最小元とする．$\eta \in \xi$ なら $\eta \in \alpha$ だから，ξ の最小性から $\eta \in \beta$ である．したがって，$\xi \subseteq \beta$ で

17)　$\langle Y, < \rangle$ を半順序集合（またはクラス）とするとき，$Y' \subseteq Y$ が Y で共終とは，すべての $y \in Y$ に対し，$y' \in Y'$ で $y \leq y'$ となるものが存在することである．

ある．もし $\xi \neq \beta$ なら，$\in$ は α 上整列順序だから，$\xi \in \beta$ または $\beta \in \xi$ のどちらかが成立たなくてはならない．$\beta \in \xi$ なら，前のパラグラフにより，$\beta \subsetneqq \xi$ となるが，これは $\xi \subseteq \beta$ に矛盾である．一方 $\xi \in \beta$ とすると，これは ξ の選び方に矛盾である．したがって，$\beta = \xi < \alpha$ である．

(6): M を順序数からなる集合とするとき，$\bigcup M$ が推移的で $\in$ により整列されることは補題 2.15 (2) と本補題の (3),(5) から示せる．したがって，$\bigcup M \in On$ である．$\beta \in M$ なら，$\beta \subseteq \bigcup M$ だから，(5) により，$\bigcup M$ は，M の（$<$ に関する）上界になっている．これが M の最小上界となることも (5) により明らかである．

(7): $X \subseteq On$ が On で共終とすると，(2) により，$On = \bigcup X$ である．したがって，X が集合だったとすると，(6) により $On \in On$ となってしまうが，これは (4) に矛盾である．　(証明終わり)

補題 2.21

(1)　On 上の関係 $\in$（つまり (2.16) で定義した On 上の関係 $<$）は，On 上の全順序となる．

(2)　$<$ は On 上の整列順序である．つまり，任意の空でないクラス $C \subseteq On$ に対し，$\bigcap C \in On$ となり，$\bigcap C = \min C$ が成り立つ．

(3)　$0 = \emptyset$ は順序数で，$<$ に関して On の最小元となる．

(4)　$\alpha \in On$ なら，$\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\} \in On$ となり，$\alpha + 1$ は，$\langle On, < \rangle$ での α の次の元である．

証明　(1): 補題 2.20 (3), (5) によりよい．

(2): $\bigcap C$ は (1.21) での議論により集合となる．これが推移的で，$\in$ によって整列されることも容易に示せるから，$\bigcap C \in On$ である．補題 2.20, (5) により，$\bigcap C$ は C の最大下界である．

(3): $\emptyset$ が順序数であることはよい（順序数の定義は $\emptyset$ に対して vacantly に成り立つ）．補題 2.20, (5) により，$\emptyset$ は（ $<$ に関する） On の最小元である．

(4): $\alpha + 1$ は補題 2.15, (1) により推移的である．これが $\in$ によって整列されることも容易に確かめられるから，$\alpha + 1 \in On$ がわかる．補題 2.16, (2)

により，$\alpha+1$ は α の次の元である．(証明終わり)

補題 2.21 により，$0=\emptyset$, $1=0+1$, $2=1+1$, ... が On の元となる．$n=\{0,1,\dots,n-1\}$ である[18]．

$\alpha \in On$ は，$\alpha \neq \emptyset$ で最大元を持たないとき極限順序数であるという．α, $\beta \in On$ で，$\beta < \alpha$ のとき，β が極限順序数であることと，β が $\langle \alpha, < \rangle$ の極限点であることは同値である．順序数 α が極限順序数でないとき，後続順序数であるという．

極限順序数の概念を使って自然数の全体の集合 $\mathbb{N}$ を定義することができる： $n \in On$ が自然数であるとは，n は 0 または後続順序数で n のすべての要素も後続順序数であること，とできるからである．

補題 2.22 (1) 自然数の要素は自然数である．

(2) 集合 X を $\emptyset \in X$ ですべての $y \in X$ に対し $y \cup \{y\} \in X$ となるようなものとすると，X はすべての自然数を含む．

補題 2.22, (2) でのような X は無限公理により存在するから，分出公理により，

$$\mathbb{N} = \{n \in On : n \text{ は自然数 }\}$$

は集合になる．また，補題 2.22, (2) により，p.10 で導入した 0, 1, 2,... は $\mathbb{N}$ の最初の方の要素になっていることがわかる．自然数の定義から $\mathbb{N} \subseteq On$ で補題 2.22, (1) により，$\bigcup \mathbb{N} = \mathbb{N}$ となるから，補題 2.20, (6) により，$\mathbb{N} \in On$ となる．集合論では，$\mathbb{N}$ が順序数であることを強調するときには，“$\mathbb{N}$” でなく，“ω” で自然数の全体をあらわすことが多い．

補題 2.22 の証明は，以下に述べる On 上の帰納法の説明の後まで保留する．

補題 2.20, (7) で見たように，On は真のクラスであるが，On 上でも定理 2.10 や，定理 2.12 でのような帰納法による証明や，関数[19]の帰納的定義が

18) ここでの $n-1$ は数表記としての $n-1$ である！

19) 定義域がクラスであるような関数は，英語では “functional” とよばれることある．たとえば，クラス X が $X=\{x : \varphi(x)\}$ として導入されているときには，X 上の関数とは，$\forall x\,(\varphi(x) \rightarrow \exists! y\,(\psi(x,y)))$ が ZFC （ないし，そこで問題となっている ZFC の部分あるいは拡張）から証明できるような，$\mathcal{L}_\in$ の論理式 $\psi(x,y)$ のこと，あるいは，これに対

可能である[20].

定理 2.23　(1)　$\varphi(x)$ を（パラメタを持つ）$\mathcal{L}_\in$ の論理式として，

(2.17)　$(\forall\alpha \in On)((\forall\beta < \alpha)\varphi(\beta) \ \rightarrow\ \varphi(\alpha))$

が成り立つなら，$(\forall\alpha \in On)\varphi(\alpha)$ が成り立つ．

(2)　クラス D を，

$$D = \{f \,:\, f \text{ は，ある } \alpha \in On \text{ に対し } dom(f) = \alpha \text{ となる関数}\}$$

と定義して，G を D 上の関数[21]とするとき，On 上の関数 F で，すべての $\alpha \in On$ に対し，

(2.18)　$F(\alpha) = G(F\restriction\alpha)$ となるようなものが一意に存在する[22].

証明　(1): そうでないとすると，$\alpha \in On$ で，$\varphi(\alpha)$ とならないようなものが存在する．したがって，補題 2.21, (2) により，そのようなもののうちで最小なもの α_0 が存在する．α_0 の最小性から，$\forall\beta < \alpha_0\varphi(\beta)$ となるから，(2.17) により，$\varphi(\alpha_0)$ が成り立つが，これは，α_0 のとり方に矛盾である．

(2): 一意性は定理 2.17 と同様に示せるから，F の存在を示せばよい．

まず，置換公理を用いれば，定理 2.12 を次の形に変更しても，定理 2.12 と全く同じ証明で示せることを確認しておく（註 13 を参照）:

定理 2.12' $\langle X, <\rangle$ を整列順序集合として，クラス G を，

応するクラス $\{\langle x, y\rangle \,:\, \varphi(x) \ \wedge\ \psi(x, y)\}$ のこと，とする．ただし，$\varphi(x)$ も $\psi(x, y)$ も，x と y 以外の自由変数をパラメタとして含んでいることもありえる．また，"$\exists! x$" という記法については，p.20 の脚注を参照されたい．本稿では定義域が真のクラスとなっていて，したがって自分自身も真のクラスとなっているような関数のことをクラス関数とよぶことにする．

20)　帰納的関数論の用語では，これは「関数の再帰的定義」と言うべきであろう．しかし，集合論では，このような文脈でも「帰納的定義」という言いかたをすることが多い．(クラス）関数の存在定理としては以下の (2.18) のような再帰的な規定となっても，実際の運用では，たとえば以下での $V(\alpha)$, $\alpha \in On$ の導入 (2.22)〜(2.24) でのような超限帰納法による帰納的構成の形をとることが多い，ということが，その背景である．

21)　ここでの "関数" は，脚注 19 の意味である．

22)　置換公理により，$F''\alpha$ は集合になるから，$F\restriction\alpha \subseteq \alpha \times F''\alpha$ も集合となることに注意する．

$$dom(G) = \{f : f \text{ は，ある } X \text{ の真の始片上の関数 } \}$$

となるような関数とする．このとき，X 上の関数 F で，すべての $x \in X$ に対し，

(2.19)　$F(x) = G(F \restriction X_{<x})$

となるようなものが，ちょうど一つ存在する．

(2) の証明を続ける．各 $\alpha \in On$ に対し，

$$D_\alpha = \{f : f \text{ は，ある } \beta \in \alpha \text{ に対し } dom(f) = \beta \text{ となる関数 } \}$$

として，$G \restriction D_\alpha$ に対し，定理 2.12' を適用すると，すべての $\beta < \alpha$ に対し，$F'(\beta) = G(F' \restriction \beta)$ となるような α 上の関数 F' が一意に存在することがわかる．したがって，

(2.20)　$F = \{\langle \beta, F'(\beta) \rangle : F' \text{ は，ある } \alpha \in On, \beta < \alpha \text{ 上の関数で}$
$\text{すべての } \xi < \alpha \text{ に対し } F'(\xi) = G(F' \restriction \xi)\}$

とすれば，F は求めるようなものとなる．

(証明終わり)

ここで，保留にしてあった補題 2.22 の証明を見てみることにする．

補題 2.22, (1) は自然数の定義から明らかである．

補題 2.22, (2) は $\mathbb{N}$ が集合となることの議論の前に証明される必要があるので，整列集合上の帰納法による証明ではなく，定理 2.23, (1) のタイプの帰納法で示す必要がある．このために，X を補題 2.22, (2) でのようなものとして，

(2.21)　$\alpha \in On$ に対し，α が自然数なら $\alpha \in X$ となる．

を $\alpha \in On$ に関する帰納法で示す[23]．$\alpha = 0$ のときは，主張は明らかである．$\alpha \neq 0$ で，すべての $\beta < \alpha$ に対し主張が成りたったとする．α が自然

23)　これは定理 2.23, (1) との関係で言うと，そこでの $\varphi(\alpha)$ を “α は自然数 $\rightarrow \alpha \in X$” としたとき，(2.17) が成り立つことを示す，ということである．

数でないときには主張が成り立つことは自明である．α が自然数なら， α は後続順序数だから，$\alpha = \alpha^- + 1$ となる α^- がとれるが，補題 2.22, (1) により，α^- も自然数である．したがって，帰納法の仮定から $\alpha^- \in X$ となり，X に対する仮定から，$\alpha = \alpha^- + 1 = \alpha^- \cup \{\alpha^-\} \in X$ となる．したがって，補題 2.22, (2) が示せた．

定理 2.23 の応用の 1 つとして，集合の累積的階層の定義を見ることにする．On 上のクラス関数 $V(\alpha)$ を，

(2.22)　$V(0) = \emptyset$;

(2.23)　$V(\alpha+1) = \mathcal{P}(V(\alpha))$;

(2.24)　γ が極限順序数のとき， $V(\gamma) = \bigcup_{\alpha<\gamma} V(\alpha)$

によって定義する[24)]．$V(\alpha)$ を V_α とも書くことにする． $\alpha \mapsto V_\alpha, \alpha \in On$ を V の累積的階層とよぶ[25)]．実際，次の補題 2.24 で示すように $\alpha \mapsto V_\alpha$, $\alpha \in On$ は増加的で，基礎の公理のもとでは，V_α, $\alpha \in On$ は V の被覆となる．

ZF から基礎の公理を除いてできる体系を ZF^- と表わすことにする．本節のここまでの部分で順序数の定義や基本的な性質の証明では基礎の公理は用いられていなかったことを再度注意しておく．

補題 2.24　 ZF^- で議論する．

(1)　すべての $\alpha \in On$ に対し， V_α は推移的である．

(2)　すべての $\alpha, \beta \in On$, $\beta < \alpha$ に対し，$V_\beta \subseteq V_\alpha$ である．

(3)　すべての $\alpha \in On$ に対し，$V_\alpha \cap On = \alpha$ である．

(4)　基礎の公理が成り立つとき，$V = \bigcup_{\alpha \in On} V_\alpha$ となる．

---

24)　定理 2.23, (2) との対応では，$F = \{\langle \alpha, V(\alpha)\rangle : \alpha \in On\}$ は，

(2.25)　$G_0 = \{\{\langle \emptyset, \emptyset \rangle\}\}$;

(2.26)　$G_1 = \{\langle f, \mathcal{P}(f(\alpha))\rangle : \alpha \in On,\ f$ は $\alpha+1$ 上の関数 $\}$;

(2.27)　$G_2 = \{\langle f, \bigcup f''\gamma \rangle : \gamma$ は極限順序数で f は γ 上の関数 $\}$

として，$G = G_0 \cup G_1 \cup G_2$ として，この G に定理 2.23, (2) を適用することで得られる．(2.25), (2.26), (2.27) はそれぞれ，(2.22), (2.23), (2.24) に対応していることに注意する．

25)　V は，ここではすべての集合からなるクラス $\{x : x = x\}$ を表している（第 1.3 節の初めの議論を参照）．

証明　(1), (2), (3) は α に関する帰納法により示せる．(4)　: $V \neq \bigcup_{\alpha \in On} V_\alpha$ だったとして，x を $V \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in On} V_\alpha\right)$ の元のうち $\in$ に関して極小なものとする[26]．このとき，x の極小性から，すべての $y \in x$ に対し $y \in \bigcup_{\alpha \in On} V_\alpha$ となる．したがって $x \subseteq \bigcup_{\alpha \in On} V_\alpha$ である．x は集合だから，(2) により，十分に大きな $\alpha \in On$ をとると $x \subseteq V_\alpha$ となる．したがって，(2.23) により $x \in V_{\alpha+1}$ となるが，これは x の選び方に矛盾である．　(証明終わり)

集合 X 上の二項関係 R は,

$$(2.28)\quad (\forall Y \subseteq X)\Big(Y \neq \emptyset \ \rightarrow\ (\exists y \in Y)(\neg \exists z \in Y(z\, R\, y))\Big)$$

を満たすとき，整順的であるという．(2.28) でのような y のことを Y の R に関する極小元とよぶことにする．

この用語を使うと，基礎の公理は，すべての集合 x に対し，関係 $\in$ が x 上で整順的である[27]，という主張としてとらえることができる．

補題 2.25　ZF^- で議論する．

(1)　$x \in V_\alpha$ で $y \in x$ なら，$y \in V_\beta$ となる $\beta < \alpha$ が存在する．

(2)　任意の $\alpha \in On$ に対し，$\in$ はすべての $x \in V_\alpha$ 上で整順的である．

証明　(1): α が極限順序数なら，(2.24) により，$\beta < \alpha$ で $x \in V_\beta$ となるものがとれる．補題 2.24, (1) により，$x \subseteq V_\beta$ だから，$y \in V_\beta$ となる．α が極限順序数でないなら，$\alpha = \beta + 1$ となる順序数 β をとると，(2.23) により，$x \subseteq V_\beta$ である．したがってこの場合にも $y \in V_\beta$ がわかる．

(2): $x \in V_\alpha$ とする．$y \subseteq x$ を空でないとすると，補題 2.24, (1) により $y \cap V_\alpha = y \neq \emptyset$ だから，$\alpha_0 = \min\{\beta \leq \alpha : y \cap V_\beta \neq \emptyset\}$ がとれる．$z \in y \cap V_{\alpha_0}$ とすると，z は y の $\in$ に関する極小元である： $w \in z$ とすると，(1) により，ある $\beta < \alpha_0$ に対し $w \in V_\beta$ となるから，α_0 の最小性から $w \notin y$ である．　(証明終わり)

系 2.26　ZF^- 上，基礎の公理と $V = \bigcup_{\alpha \in On} V_\alpha$ は同値である．

26)　(1.22) を参照.
27)　つまり，$\in \cap\, x^2$ は x 上で整順的である.

証明　補題 2.24, (4) と補題 2.25, (2) による．　(証明終わり)

定理 2.10, 定理 2.12, 定理 2.17 は，それぞれ整順的な関係に関する定理に一般化できる．

集合 X 上の二項関係 E と $x \in X$ に対し，

$$ext_E(x) = \{y \in X : y \; E \; x\} \tag{2.29}$$

とする．$ext_E(x)$ は x の E に関する外延とよばれる．E が外延的とは，すべての $x, y \in X$ に対し，

$$x = y \;\Leftrightarrow\; ext_E(x) = ext_E(y) \tag{2.30}$$

が成り立つこととする．X 上で $\in$ が外延的になるとき，X は外延的であるということにする[28]．

定理 2.27 (整順的な関係上の帰納法)　E を集合 X 上の整順的な関係とする．Φ を （パラメタを含む）$\mathcal{L}_\in$-論理式として，

(2.31)　X の E に関する極小元は Φ を満たし;

(2.32)　すべての $x \in X$ に対し，$ext_E(x)$ の元がすべて Φ を満たすなら x も Φ を満たす

が成り立つとする．このとき，すべての $x \in X$ は Φ を満たす．

証明　定理 2.10 の証明の変形により示せる．　(証明終わり)

定理 2.28 (関数の再帰的定義)　E を集合 X 上の整順的関係として，G を $V \times V$ 上のクラス関数とする．このとき，このとき X 上の関数で，

$$F(x) = G(x, F \restriction ext_E(x)) \tag{2.33}$$

がすべての $x \in X$ に対し成り立つようなものが一意に存在する．

証明　定理 2.12 の証明の変形により示せる．　(証明終わり)

28)　3.3 節で導入することになるモデル理論の用語を用いると，X が外延的とは，$\langle X, \in \rangle$ が外延性公理を満たすことに他ならない．

定理 2.29 (モストフスキーの崩壊補題)　E を集合 X 上の外延的な整順的関係とする．このとき，推移的な集合 M と写像 $\pi : X \to M$ で，

$$\pi : \langle X, E\rangle \overset{\cong}{\to} \langle M, \in\rangle$$

となるものが一意に存在する．

証明　定理 2.17 の証明の変形により示せる．　(証明終わり)

定理 2.29 での M （または π）を $\langle X, E\rangle$ のモストフスキー崩壊とよぶ．

補題 2.30　X を集合として X は外延的であるとする．$x \in X$ で $tcl(x) \subseteq X$ とする．このとき π を $\langle X, \in\rangle$ のモストフスキー崩壊とすると，$\pi \restriction tcl(x)$ は $tcl(x)$ 上の恒等写像となる．

証明　$tcl(x)$ は推移的だから，$id_{tcl(x)} : tcl(x) \to tcl(x)$ は $\langle tcl(x), \in\rangle$ のモストフスキー崩壊になっている．一方，$\pi \restriction tcl(x)$ も $tcl(x)$ のモストフスキー崩壊だから，モストフスキー崩壊の一意性により，$\pi \restriction tcl(x) = id_{tcl(x)}$ である．　(証明終わり)

定理 2.27, 定理 2.28, 定理 2.29 はそれぞれ X がクラスである場合に拡張できるが，この場合には，整順的な関係の定義を次のように補正しておく必要がある：

クラス X 上の二項関係 R が整順的とは，

(2.34)　(2.28) の条件を満たし，

(2.35)　すべての $x \in X$ に対し $ext_E(x)$ が集合になる

こととする．もちろん，(2.35) は X が集合の場合には無条件に成り立つ．

2.4　基数

この章では基数の全体のクラス $Card$ を順序数の全体のクラスの部分クラスとして導入する．自然数 n に対し，$n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ だったことを思

い出すと，集合 E が n 個の要素を持つ有限集合である（記号：$|E|=n$），という概念を

$$(2.36)\quad |E|=n \;\Leftrightarrow\; E \text{ から } n \text{ への全単射が存在する}$$

により定義してよいであろう．基数の概念はこの有限集合の要素の個数の定義の拡張から自然に導入されるものになっている．

“整列可能性定理” として知られる次の命題は,（集合論の他の公理の仮定のもとで）選択公理と同値になる．

定理 2.31 (整列可能性定理)　ZFC のもとで，すべての集合 X に対し，$\langle X,<\rangle$ が整列順序となるような X 上の二項関係 $<$ が存在する．

ZF 上で整列可能性定理の命題を仮定すると，AC が示せることは容易に見ることができる：整列可能性定理を仮定すると，x が空集合を要素として含まない集合とするとき，$\bigcup x$ 上の整列順序 $<$ が存在するが,

$$f=\{\langle y,z\rangle : y\in x,\ z \text{ は } y \text{ の } < \text{ に関する最小元}\}$$

とすると，f は x 上の選択関数となる．整列可能性定理の ZFC からの証明は次のようにして行なうことができる：

定理 2.31 の証明　x を任意の集合とする．$x\neq\emptyset$ としてよい．f を $\mathcal{P}(x)\setminus\{\emptyset\}$ 上の選択関数として，定理 2.23, (2) を用いて，On 上のクラス関数 g を,

$$(2.37)\quad g(\alpha)=\begin{cases} f(x\setminus\{g(\beta):\beta<\alpha\}), & x\setminus\{g(\beta):\beta<\alpha\}\neq\emptyset \text{ のとき}\\ x, & \text{それ以外のとき}\end{cases}$$

とする．このとき，$\{\alpha\in On : g(\alpha)=x\}$ が空だとすると，g は On から x への 1 対 1 写像となってしまい x が集合であることに矛盾である．$\alpha=\min\{\alpha\in On : g(\alpha)=x\}$ とすると，$g_0=g\restriction\alpha$ は α から x への全単射となるから，すべての $u\in x$ に対し，$\beta_u<\alpha$ で $g_0(\beta_u)=u$ となるものが一意に存在する．ここで $u_0, u_1\in x$ に対し

$$u_0\leq u_1 \quad\Leftrightarrow\quad \beta_{u_0}\leq\beta_{u_1}$$

として x 上の二項関係 $\leq$ を定義すれば，$\leq$ は x 上の整列順序となる．

(証明終わり)

整列可能性定理のもとで（したがって選択公理のもとで），任意の集合 X の濃度 $|X|$ を次のように定義することができる：

(2.38)　$|X| = \min\{\alpha \in On : X$ から α への全単射が存在する $\}$.

$|X| = \kappa$ のとき，X は濃度 κ を持つ，あるいは X は濃度 κ である，などという．整列可能性定理により，$\langle X, < \rangle$ が整列順序になるような，X 上の二項関係 $<$ が存在するが，$\langle X, < \rangle$ のモストフスキー像を α とすると，$\alpha \in On$ で，モストフスキー同型写像は，X から α への全単射である．したがって，$\{\alpha \in On : X$ から α への全単射が存在する $\}$ は空集合でなく，上の $|X|$ はすべての集合に対し，うまく定義できる．集合の濃度となるような On の元 κ は,

(2.39)　すべての $\alpha < \kappa$ に対し，α から κ への全単射は存在しない

という性質を満たすが，このような κ のことを基数とよぶ[29]．

(2.40)　$Card = \{\kappa : \kappa$ は基数 $\}$

とする．以下で述べるカントル・ベルンシュタインの定理（定理 2.33）により，κ が基数であることと，すべての $\alpha < \kappa$ に対し，α から κ への上射が存在しないことは同値である．

次の 2 つの命題は，集合の濃度や基数に関する基本的な性質である．補題 2.32 で x を可算集合としたものは，カントルにより 1873 年に発見された[30]．この発見によって集合論が数学の研究分野として確立された，とする数学史における解釈も可能である（[Kanamori 1994/2003] を参照）.

29)　この基数の定義自体は選択公理の仮定に依存していないことを注意しておく．

30)　x が可算なときには，$\mathcal{P}(x)$ から $\mathbb{R}$ への自然な単射により，$\mathcal{P}(x)$ と実数体 $\mathbb{R}$ が同一視できることに注意する．

補題 2.32　x を集合とするとき，単射 $f : x \to \mathcal{P}(x)$ や全単射 $g : \mathcal{P}(x) \to {}^{x}2$ が存在するが[31]，上射 $h : x \to \mathcal{P}(x)$ は存在しない（したがって，もちろん全単射も存在しない）.

証明　$f : x \to \mathcal{P}(x); a \mapsto \{a\}$ は単射である．$g : \mathcal{P}(x) \to {}^{x}2; y \mapsto ch_y$ は全単射である．ただし，$ch_y : x \to 2$ は，y の特性関数とする．つまり，$a \in x$ に対し，

$$ch_y(a) = \begin{cases} 1 & a \in y \text{ のとき} \\ 0 & a \notin y \text{ のとき} \end{cases}$$

で定義される関数である.

最後に $h : x \to \mathcal{P}(x)$ が上射だったとして矛盾を導く.

$$y = \{a \in x \,:\, a \notin h(a)\}$$

とする．$y \in \mathcal{P}(x)$ である．h は上射だから，$a^* \in x$ で，$h(a^*) = y$ となるものが存在する.

もし，$a^* \in y$ とすれば，y の定義から，$a^* \notin h(a^*) = y$ となり矛盾である.

一方 $a^* \notin y$ としても，y の定義から，$a^* \in h(a^*) = y$ となってしまい矛盾である.　(証明終わり)

定理 2.33 (カントル・ベルンシュタインの同値定理)　A と C を集合として，$g : A \to C$ と $h : C \to A$ を単射とする．このとき，A から C への全単射が存在する.

証明　この定理は選択公理を用いずに証明できるが，まず，選択公理を用いた証明を見ておくことにする[32].

$C' = g''A$ として，R' を C' 上の整列順序とする[33].

31)　$2 = \{0, 1\}$ で ${}^{x}2 = \{f \,:\, f : x \to 2\}$ だった.

32)　ゲーデルは，[Gödel 1947/64] で「新しい公理なしでも証明できる緒帰結のうちに，新しい公理の助けを借りた方がずっと簡単に証明でき，証明自体はるかに発見しやすくなり，さらには多くの別証明をひとつの証明へと簡略化できるようになるものものがある」ことは，その公理の実証的な正しさに対する保証ととらえることが可能である場合もありえる，と論じている（本書第 II 部の第 1 章を参照.）．この定理の証明や，補題 2.36 の証明は，この意味での選択公理の正しさに関する実証的な保証の一例と見ることもできるであろう.

R'' を $C\setminus C'$ 上の整列順序として[33]，

$$< \;=\; R' \cup R'' \cup \{\langle c', c''\rangle : c' \in C',\, c'' \in C\setminus C'\}$$

とすると，$<$ は C 上の整列順序になり，C' は $<$ に関して C の始片となる．したがって，$\pi : \langle C, <\rangle \xrightarrow{\cong} \langle \alpha, \in\rangle$ をモストフスキー写像とすると，$\beta = \pi''C'$ は α の始片となるから，$\beta \leq \alpha$ である．$\pi \circ g : A \to \beta$ は全単射だから，$|\,A\,| \leq \beta$ となる．したがって，$|\,A\,| \leq |\,C\,|$ である．h を用いて同様に議論すると $|\,C\,| \leq |\,A\,|$ がわかるから，$|\,A\,| = |\,C\,|$ である[34]．したがって，$j : A \to |\,A\,|$ と，$k : C \to |\,C\,|$ をそれぞれ全単射とすると，$f = k^{-1} \circ j$ は A から C への全単射となる．

選択公理を用いない定理 2.33 の証明は，上のものより構成的だが，いくぶん複雑なものになる．以下でこの証明のスケッチを与える： まず，A と $C' = g''A$ を同一視することにより，$A \subseteq C$ で $g = id_A$ としてよい．$C'' = h''C$ とすると，h は C から C'' への全単射で，$C'' \subseteq A \subseteq C$ となる．$n \in \omega$ に関する帰納法で，$D_0 = C \setminus A$, $D_{n+1} = h''D_n$ とする．このとき， $C \setminus \bigcup_{n\in\omega} D_n \subseteq C \setminus D_0 \subseteq A$ で，$n > 0$ なら，D_n は C の部分集合の h による像であるから，$D_n \subseteq A$ となることに注意して，$f : C \to A$ を，$x \in C$ に対し，

$$f(x) = \begin{cases} h(x), & \text{ある } n \in \omega \text{ に対し } x \in D_n \text{ のとき} \\ x, & \text{そうでないとき} \end{cases} \tag{2.41}$$

とすると，f は全単射となる．したがって f^{-1} が求めるようなものとなっている． (証明終わり)

補題 2.34　(1)　自然数はすべて基数である．最小の無限順序数 ω は基数である．

(2)　すべての無限基数は，極限順序数である．

(3)　M が基数の集合なら，$\sup M$ $(= \bigcup M)$ は基数である．

---

33)　R' と R'' の存在を保証するために選択公理が用いられていることに注意する．

34)　ここで "$\leq$" は $Card$ 上の線型順序となっていることが用いられている．

証明　(1): 基数でない自然数があったとして，そのようなもののうち最小な n をとる．このとき $m < n$ で上射 $f : m \to n$ の存在するものがとれる．$m < n$ により $n \neq 0$ だから，$n = n^* \cup \{n^*\}$ となる $n^* < n$ がとれる．また，上射 $f : m \to n$ の存在により，$m \neq 0$ だから，同様に $m = m^* \cup \{m^*\}$ となる $m^* < m$ がとれる．必要なら f の 2 個所での値を変更することで，$f(m^*) = n^*$ となっているとしてよい．このとき，$f' : m^* \to n^*$ を

$$f'(k) = \begin{cases} f(k) & f(k) < m^* \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

と定義すると，f' は m^* から n^* への上射となるが，$m^* < n^* < n$ だから，これは n の最小性に矛盾である．

もしも ω が基数でなかったとすれば，ある自然数 n で上射 $f : n \to \omega$ の存在するようなものがとれる．$\ell < n$ に対し，$f'(\ell) = \min\{n, f(\ell)\}$ として $f' : n \to n+1$ を定義すると f' は上射となるが，カントル・ベルンシュタインの同値定理により，これは，ここでの証明の前半に矛盾する．

(2): α を無限順序数とする（つまり $\omega \leq \alpha$）．このとき α から $\alpha + 1$ への写像 f を

$$f(\beta) = \begin{cases} \beta - 1 & 0 < \beta < \omega \text{ のとき} \\ \beta & \omega \leq \beta < \alpha \text{ のとき} \\ 0 & \beta = \alpha \text{ のとき} \end{cases}$$

と定義すると，f は全単射となる．したがって $\alpha + 1$ は基数ではない．

(3): M が最大元 κ^* を持つときは $\bigcup M = \kappa^*$ となるから，主張は明らかに成り立つ．M が最大元を持たないとする．$\bigcup M$ が順序数であることは補題 2.20, (7) によりよい．したがって，$\bigcup M$ が基数でなかったとすると，ある基数 $\kappa < \bigcup M$ で，上射 $f : \kappa \to \bigcup M$ の存在するものがある．$\kappa < \lambda$ となる $\lambda \in M$ をとると $\lambda \leq \bigcup M$ だから，$f' : \kappa \to \lambda$ を $\alpha \in \kappa$ に対し，

$$f'(\alpha) = \begin{cases} f(\alpha) & f(\alpha) < \lambda \text{ のとき} \\ 0 & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

として定義すると，f' は κ から λ への上射となる．ところが $\lambda \in M$ により λ は基数だから，カントル・ベルンシュタインの同値定理により，これは矛盾である． (証明終わり)

選択公理の下で，次の補題は基数の定義から明らかである：

補題 2.35 (AC[35]) x, y を集合とするとき，

(1) $|x| = |y|$ となるのは，全単射 $f : x \to y$ が存在する，ちょうどそのときである．

(2) $x \neq \emptyset$ のとき，以下の (i)〜(iii) は同値である：

(i) $|x| \leq |y|$;

(ii) 単射 $f : x \to y$ が存在する；

(iii) 上射 $g : y \to x$ が存在する．

補題 2.36 すべての基数 κ に対し，基数 μ で $\kappa < \mu$ となるものが存在する．とくに，$Card$ は真のクラスである．

証明 この補題も選択公理を用いる証明と，選択公理を仮定しない ZF での証明の両方を見ることにする．

選択公理を仮定したときには，補題の前半は次のように証明できる：x を $|x| = \kappa$ となる集合とする（たとえば $x = \kappa$ とすればよい）．補題 2.32 と補題 2.35 により，$\kappa = |x| < |\mathcal{P}(x)|$ となる．

これを選択公理を用いずに証明するには次のようにすればよい：α を κ と同じ濃度の順序数とするとき，κ 上の二項関係 R で，$\langle \alpha, \in \rangle \cong \langle \kappa, R \rangle$ となるものが存在する．さらに，モストフスキーの定理により，このような R に対し α は一意に決まる．したがって，置換公理により，

$$X = \{\alpha \in On : \text{ある } \kappa \text{ 上の二項関係 } R \text{ に対し } \langle \alpha, \in \rangle \cong \langle \kappa, R \rangle\} \tag{2.42}$$

35) ここで AC が仮定されているのは，AC を仮定しなかったときには，$|x|$ の定義されない集合が存在してしまうからである．

は集合となる．したがって 補題 2.20, (7) により $\mu = \bigcup X \in On$ となる．X の定義から，κ から μ への上射は存在しない[36)]．さらに X の定義から μ はそのようなもののうち最小なものとなるから，$\mu \in Card$ となり，この μ が求めるようなものであることがわかる．

補題の後半の主張は，上で示したことと，補題 2.20, (7) によりよい．

(証明終わり)

補題 2.36 により，すべての基数に対し，κ の次の基数が

(2.43) $\kappa^+ = \min\{\mu \in Card : \kappa < \mu\}$

として定義できる．補題 2.34 により，自然数における演算 $n \mapsto n+1$ は，ここで導入した $n \mapsto n^+$ と一致する．

次で定義される関数 $\aleph : On \to Card$ は[37)]無限基数を小さい順に枚挙する．

(2.44) $\aleph(0) = \omega$;

(2.45) $\aleph(\alpha+1) = (\aleph(\alpha))^+$;

(2.46) $\aleph(\gamma) = \bigcup\{\aleph(\alpha) : \alpha < \gamma\}$ （γ が極限順序数のとき）．

補題 2.34, (3) により，すべての $\alpha \in On$ に対し，$\aleph(\alpha)$ は基数となる．通常は $\aleph(\alpha)$ のことを $\aleph_\alpha$ と書く．$\aleph_\alpha$ が順序数でもあることを強調したいときには，ω_α という書き方もすることにする．$\aleph_\alpha$ の列は真に増加的である．すべての無限基数 κ は $\aleph_\alpha$ という形をしていて，このような $\alpha \in On$ は一意に決まる： 一意性は， $\alpha \mapsto \aleph_\alpha$ が定義から真に増加的であることからよい．

無限基数で $\aleph_\alpha$ の形に表わせないものが存在するとすると，$Card \setminus (\{\aleph_\alpha : \alpha \in On\} \cup \omega)$．の最小元 μ がとれる．このとき，$\aleph_\alpha$, $\alpha \in On$ の定義から，すべての α に対し $\aleph_\alpha < \mu$ が成り立つことが帰納法によって示せるから，$\{\xi \in On : \xi < \mu\} \supseteq \{\aleph_\alpha : \alpha \in On\}$ は集合となってしまうが，このこ

36) もしそのようなものが存在するとすれば，κ から $\mu+1$ への上射も存在するから，$\mu+1 \in X$ となり，したがって $\mu \in \mu+1 \subseteq \mu$ となるが，これは，補題 2.20, (4) に矛盾である．

37) $\aleph$ （アレフ）はヘブライ語のアルファベットの最初の文字である．

とから，置換公理により，On も集合であることが結論できてしまい，補題 2.20, (7) に矛盾である．よって，

$$Card \setminus \omega = \{\aleph_\alpha : \alpha \in On\}$$

である．

$|X| \leq \aleph_0$ となるような集合を可算集合とよぶ．$|X| = \aleph_0$ のとき，X が無限集合であることを強調したいときには，X は可算無限である，という言い方をすることもある．$|X| > \aleph_0$ のとき X は不可算である[38)]という．

α が後続順序数で，$\kappa = \aleph_\alpha$ のとき，（つまり，$\alpha = \beta + 1$ となる β があり，$\kappa = (\aleph_\beta)^+$ となるとき）κ を後続基数とよぶ．また α が極限順序数で，$\kappa = \aleph_\alpha$ となるとき，κ を極限基数とよぶ．

2.5　基数算術

κ と λ を基数とするとき，$\kappa + \lambda$, $\kappa \cdot \lambda$, κ^λ を次のように定義する．集合 A, B を $|A| = \kappa$, $|B| = \lambda$ となるようにとる．ただし $A \cap B = \emptyset$ となるようにしておく[39)]．このとき，

$$\kappa + \lambda = |A \cup B|, \quad \kappa \cdot \lambda = |A \times B|, \quad \kappa^\lambda = |{}^B A|$$

とする[40)]．これらの定義は A と B のとりかたに依存しない：つまり，$|A| = |A'|$, $|B| = |B'|$ なら，$|A \cup B| = |A' \cup B'|$（ただし，この場合には，と

38)　日本語の文献では,「非可算」という言い方の方が普通である.「不可算」という言い方は，愛媛大学の藤田博司氏の提唱による．

39)　たとえば，必要なら，A と B をそれぞれ $A \times \{0\}$ と $B \times \{1\}$ で置き換えればよい．

40)　A と B の整列順序が与えられたとき（$|A| = \kappa$, $|B| = \lambda$ の仮定から A 上にも B 上にも整列順序が存在する），後出の補題 4.5 のようにして，ZF で $A \cup B$ と $A \times B$ 上の整列順序を構成することができる．したがって，$\kappa + \lambda$ や $\kappa \cdot \lambda$ は ZF で定義でき，次の補題 2.37, (1)～(3), (7) も選択公理を用いずに ZF で証明できている．また，補題 2.40～補題 2.41 と定理 2.42, (1) も選択公理なしに ZF で証明されていることは容易に確かめることができる．これに対して，${}^B A$ や $\bigcup A$ 上の整列順序，したがって，これらの集合の濃度の存在を示すためには，一般には選択公理が必要となる．

くに $A \cap B = A' \cap B' = \emptyset$ となっているとする)，$|A \times B| = |A' \times B'|$, $|{}^{B}A| = |{}^{B'}A'|$ の成り立つことが容易に示せる．

λ を基数とするとき，$f \in {}^{\lambda}2$ に $f^{-1}{}''\{1\} \in \mathcal{P}(\lambda)$ を対応させる写像は全単射となる．したがって $|\mathcal{P}(\lambda)| = |{}^{\lambda}2| = 2^{\lambda}$ となる．

次は上の定義からただちに導ける：

補題 2.37　κ, λ, μ を基数とする．このとき次が成り立つ:

(1)　$\kappa + \lambda = \lambda + \kappa, \quad \kappa \cdot \lambda = \lambda \cdot \kappa$

(2)　$(\kappa + \lambda) + \mu = \kappa + (\lambda + \mu), \quad (\kappa \cdot \lambda) \cdot \mu = \kappa \cdot (\lambda \cdot \mu)$

(3)　$\kappa \cdot (\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu$

(4)　$(\kappa \cdot \lambda)^{\mu} = \kappa^{\mu} \cdot \lambda^{\mu}$

(5)　$\kappa^{\lambda + \mu} = \kappa^{\lambda} \cdot \kappa^{\mu}$

(6)　$(\kappa^{\lambda})^{\mu} = \kappa^{\lambda \cdot \mu}$

(7)　$\kappa \leq \kappa', \lambda \leq \lambda'$;（$\kappa', \lambda'$ は基数），とするとき,

$$\kappa + \lambda \leq \kappa' + \lambda', \quad \kappa \cdot \lambda \leq \kappa' \cdot \lambda', \quad \kappa^{\lambda} \leq \kappa'^{\lambda'}$$

$On^2 = On \times On$ 上の半順序 $<$ を次のように定義する：

$$\begin{aligned}\langle \alpha, \beta \rangle < \langle \gamma, \delta \rangle \;\Leftrightarrow\; & \max\{\alpha, \beta\} < \max\{\gamma, \delta\} \\ & \text{または } (\max\{\alpha, \beta\} = \max\{\gamma, \delta\} \;\text{ かつ }\; \alpha < \gamma) \\ & \text{または } (\max\{\alpha, \beta\} = \max\{\gamma, \delta\} \;\text{ かつ }\; \alpha = \gamma \;\text{ かつ }\; \beta < \delta).\end{aligned}$$

次は $<$ の定義から容易に示せる：

補題 2.38　$<$ は On^2 上の線型順序である．

補題 2.39　すべての $\nu \in On$ に対し，$\nu \times \nu$ は On^2 の $<$ に関する真の始片で，$\nu \times \nu = \{(\alpha, \beta) : (\alpha, \beta) < (0, \nu)\}$ となる．

証明　$\langle \alpha, \beta \rangle \in \nu \times \nu$ で $\langle \xi, \eta \rangle < \langle \alpha, \beta \rangle$ とすると，$\max\{\xi, \eta\} \leq \max\{\alpha, \beta\} < \nu$ だから，$\langle \xi, \eta \rangle \in \nu \times \nu$ となる．したがって，$\nu \times \nu$ は On^2 の $<$ に関する真の始片である．$<$ の定義から，$\langle 0, \nu \rangle$ が $On^2 \setminus \nu \times \nu$ の最小元となることは明らかである．　(証明終わり)

補題 2.40　$<$ は On^2 上の整列順序となる[41)].

証明　すべての $\langle\alpha,\beta\rangle \in On^2$ に対し，$\langle\alpha,\beta\rangle$ の定める On^2 の $<$ に関する始片が集合となっていることは補題 2.39 によりよい．

$X \subseteq On^2$ が空でないなら，X は $<$ に関する最小元を持つことを示す．まず，$\alpha_1 = \min\{\max\{\alpha,\beta\} : \langle\alpha,\beta\rangle \in X\}$ として $X_1 = \{\langle\alpha,\beta\rangle \in X : \max\{\alpha,\beta\} = \alpha_1\}$ とする．$\alpha_2 = \min\{\alpha :$ ある β に対し $\langle\alpha,\beta\rangle \in X_1\}$ として，$X_2 = \{\langle\alpha,\beta\rangle \in X_1 : \alpha = \alpha_2\}$ とする．さらに，$\alpha_3 = \min\{\beta : \langle\alpha_2,\beta\rangle \in X_2\}$ とする．このとき，$<$ の定義から，$\langle\alpha_2,\alpha_3\rangle$ は X の最小元となる．　(証明終わり)

$(On^2,<)$ は整列順序だから，とくに外延的である．したがって，定理 2.29 のクラスへの拡張により，$(On^2,<)$ のモストフスキ崩壊が存在するが[42)]，それは推移的なクラスで $\in$ で整列されるから，On に他ならない．したがって，

$$K : (On^2,<) \to (On,\in)$$

となる順序同型 K が一意に存在することがわかる．補題 2.39 により，$K''\nu\times\nu$ は $(On,\in)$ の真の始片となり，したがって，On の元となる．

補題 2.41　(1)　すべての $n, m \in \omega$ に対し，$K(\langle m,n\rangle) < \omega$ となる．

(2)　すべての無限基数 κ に対し $K(\langle 0,\kappa\rangle) = \kappa$ となる．

(3)　すべての無限基数 κ に対し $\kappa\cdot\kappa = \kappa$ が成り立つ．

証明　(1): $k = \max\{m,n\}+1$ とすると，$\langle m,n\rangle < \langle 0,k\rangle$ となる．補題 2.39 により，$\{\langle\alpha,\beta\rangle : \langle\alpha,\beta\rangle < \langle 0,k\rangle\} = k\times k$ となるから，$|\,k\times k\,| < \omega$ により，$K(\langle m,n\rangle) < K(\langle 0,k\rangle) < \omega$ である．

(2) と (3): $\kappa \in Card$, $\kappa \geq \aleph_0$ に関する帰納法により示す．$\kappa = \aleph_0$ のときには，補題 2.39 と (1) により $K(\langle 0,\omega\rangle) = \{K(\langle m,n\rangle) : m,n \in \omega\} = \omega$ となるから，(2) が成り立つことがわかる．したがって，$K \restriction \omega\times\omega$ は $\omega\times\omega$ から ω への全単射となる．よって $\aleph_0\cdot\aleph_0 = \aleph_0$ がわかる．

41)　つまり，$<$ は，(2.34) と (2.35) の意味で整順的な On^2 上の全順序である．
42)　補題 2.30 の後を参照

すべての基数 $\lambda<\kappa$ に対し，(2) と (3) が成り立つと仮定して，κ に対しても (2) と (3) が成り立つことを示す．$|\kappa\times\kappa|\geq\kappa$ だから，$K(\langle 0,\kappa\rangle)=K''\kappa\times\kappa\geq\kappa$ である．一方，帰納法の仮定から，すべての $\alpha<\kappa$ に対し，$|\alpha\times\alpha|=|\alpha|<\kappa$ となる．したがって，$K(\langle 0,\alpha\rangle)<\kappa$ である．$\langle 0,\kappa\rangle$ は $\langle 0,\alpha\rangle$, $\alpha<\kappa$ の極限となっているから，$K(\langle 0,\kappa\rangle)\leq\kappa$ がわかる．したがって，$\kappa\times\kappa=K(\langle 0,\kappa\rangle)=\kappa$ となり，$K\restriction\kappa\times\kappa$ は $\kappa\times\kappa$ から κ への全単射となることがわかるから，$\kappa\cdot\kappa=\kappa$ が帰結される．　(証明終わり)

定理 2.42　(1)　κ,λ を $\kappa\geq\omega$ または $\lambda\geq\omega$ となるような基数とする．このとき，$\kappa+\lambda=\max\{\kappa,\lambda\}$ となる．もし $\kappa,\lambda\neq 0$ なら，$\kappa\cdot\lambda=\max\{\kappa,\lambda\}$ である．

(2)　κ, λ を無限基数とする．$|X|\leq\kappa$ で，すべての $x\in X$ に対して $|x|\leq\lambda$ となるとき，$|\bigcup X|\leq\max\{\kappa,\lambda\}$ が成り立つ．

証明　(1): κ か λ のどちらかが 0 のときは，定理の前半は明らかである．そこで $\kappa\neq 0$, $\lambda\neq 0$ とする．このとき $(\kappa\times\{0\})\cup(\lambda\times\{1\})$ から $\kappa\times\lambda$ への単射が容易に定義できるから，$\kappa+\lambda\leq\kappa\cdot\lambda$ となることがわかる．ところが，$\mu=\max\{\kappa,\lambda\}$ とすると，補題 2.41 により，

$$\mu\leq\kappa+\lambda\leq\kappa\cdot\lambda\leq\mu\cdot\mu=\mu$$

となるから定理の主張が実際に成り立つことがわかる．

(2): $X=\emptyset$ のときには，主張は明らかである．そうでないときには，$|X|\leq\kappa$ により，$X=\{x_\alpha:\alpha<\kappa\}$ と枚挙できる[43)]．一般性を失うことなく．すべての x_α は空でない，としてよい．すべての $\alpha<\kappa$ に対し，$|x_\alpha|\leq\lambda$ により，$x_\alpha=\{a_{\alpha,\beta}:\beta<\lambda\}$ と枚挙できる．ここで $g:\kappa\times\lambda\to\bigcup X$ を $g(\langle\alpha,\beta\rangle)=a_{\alpha,\beta}$ により定義すると g は上射となるから，補題 2.35, (2) と (1) により $|\bigcup X|\leq\kappa\cdot\lambda=\max\{\kappa,\lambda\}$ である．　(証明終わり)

系 2.43　κ, μ を $2\leq\mu\leq 2^\kappa$, $\omega\leq\kappa$ となるような基数とするとき，$\mu^\kappa=2^\kappa$ となる．とくに，$\kappa^\kappa=2^\kappa$ である．

43)　補題 2.35, (2) により κ から X への上射 f が存在するから，$x_\alpha=f(\alpha)$ とすればよい．

証明　$2^\kappa \leq \mu^\kappa \leq (2^\kappa)^\kappa = |\,{}^{\kappa\times\kappa}2\,| = 2^{\kappa\cdot\kappa} = 2^\kappa$ によりよい．最後の等式は補題 2.41, (3) による．　(証明終わり)

以上の結果により，無限基数の足し算とかけ算 $\kappa+\lambda$, $\kappa\cdot\lambda$ の構造は完全に解明されたと言えるが，基数の冪乗 κ^λ については，多くの問題が残されている．これについては，連続体仮説（2.7 節 を参照）のように，普通の集合論の範囲では決定できない問題も数多く存在する．

なお，基数算術に関しては，シェラハ (Saharon Shelah) による最近の研究により，多くの深い結果が得られている．シェラハ自身の [Shelah 1994] は，初学者向けとは言いがたいので，シェラハの基数算術を勉強するなら，この分野の入門書のひとつである [Holz et al 1999] から入るのがよいであろう．

2.6　共終数

$\alpha \in On$ として，$X \subseteq \alpha$ が α で共終とは，すべての $\beta < \alpha$ に対し，$\gamma \in X$ で $\beta \leq \gamma$ となるものが存在することである．α の共終数 $cf(\alpha)$ を，

$$cf(\alpha) = \min\{|\,X\,| : X \subseteq \alpha,\ X \text{ は } \alpha \text{ で共終 }\}$$

と定義する．

補題 2.44　すべての $\kappa \in Card$ に対し，$cf(\kappa^+) = \kappa^+$ となる．

証明　$X \subseteq \kappa^+$ が κ^+ で共終とすると，すべての $\beta \in X$ に対し，$|\,\beta\,| \leq \kappa$ となるから，もし $|\,X\,| \leq \kappa$ とすると，定理 2.42, (2) により，$\kappa^+ = |\,\kappa^+\,| = |\bigcup X\,| \leq \kappa\times\kappa = \kappa$ となり矛盾である．　(証明終わり)

κ が，$cf(\kappa) = \kappa$ を満たすとき κ は基数となるが，このような κ を正則基数とよぶ．補題 2.44 により，非極限基数はすべて正則基数である．これに対し，正則な極限基数の存在は ZFC では証明できない（定理 4.11 を参照）．

たとえば，$cf(\aleph_\omega) = \omega$ である：$\{\aleph_n : n \in \omega\}$ が $\aleph_\omega$ で共終になるからである．とくに $\aleph_\omega$ は正則でない．

基数 κ が正則である，という条件は，次のように言いかえることもできる：

補題 2.45　基数 κ が正則であることと次は同値である：

(2.47)　$\lambda < \kappa$ で，各 $\alpha < \lambda$ に対し，$|X_\alpha| < \kappa$ とするとき，$|\bigcup_{\alpha<\lambda} X_\alpha| < \kappa$ となる．

証明　X_α, $\alpha < \lambda$ を (2.47) のようなものとする．もし，$|\bigcup_{\alpha<\lambda} X_\alpha| = \kappa$ だったとすると，$X = \{|\bigcup_{\beta<\alpha} X_\beta| : \alpha < \lambda\}$ は $\kappa = |\bigcup_{\alpha<\lambda} X_\alpha|$ で共終となるが，$|X| \leq \lambda < \kappa$ だから，κ は正則でない．

逆に κ が正則でなければ，κ で共終な $X \subseteq \kappa$ で $|X| < \kappa$ となるものがあるが，$|X| = \lambda$ として，$f : \lambda \to X$ を上射とし，$\alpha < \lambda$ に対し，$X_\alpha = f(\alpha)$ とすれば，X_α, $\alpha < \lambda$ は (2.47) の反例となる．　(証明終わり)

次の定理はカントルの定理（補題 2.32 の後半）の拡張となっている：

定理 2.46 (ケゥニッヒの定理)　κ を任意の無限基数とするとき，$\kappa^{cf(\kappa)} > \kappa$ が成り立つ．

証明　$\{f_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq {}^{cf(\kappa)}\kappa$ とするとき，つねに $f \in {}^{cf(\kappa)}\kappa \setminus \{f_\alpha : \alpha < \kappa\}$ がとれることを示せばよい．

$\{\alpha_\xi : \xi < cf(\kappa)\} \subseteq \kappa$ を κ で共終とする．このとき，$f : cf(\kappa) \to \kappa$ を，

$$f(\xi) = \min(\kappa \setminus \{f_\alpha(\xi) : \alpha < \alpha_\xi\})$$

で定義する．$|\{f_\alpha(\xi) : \alpha < \alpha_\xi\}| < \kappa$ だから，$\kappa \setminus \{f_\alpha(\xi) : \alpha < \alpha_\xi\} \neq \emptyset$ となり，この定義は可能である．すべての $\alpha < \kappa$ に対し，$f \neq f_\alpha$ である：$\alpha < \alpha_\xi$ となる $\xi < cf(\kappa)$ がとれるが，f の定義から $f(\xi) \neq f_\alpha(\xi)$ となるからである．したがって証明が完了した．　(証明終わり)

定理 2.47　すべての無限基数 κ に対し，$cf(2^\kappa) > \kappa$ が成り立つ．

証明　$cf(2^\kappa) \leq \kappa$ だったとすると，定理 2.46 により，

$$2^\kappa = 2^{\kappa\cdot\kappa} = (2^\kappa)^\kappa \geq (2^\kappa)^{cf(2^\kappa)} > 2^\kappa$$

となり矛盾である．　(証明終わり)