

平面単位距離グラフの彩色について

Sakaé Fuchino (渕野 昌)

神戸大学大学院 システム情報学研究科

<http://fuchino.ddo.jp/index-j.html>

(April 21, 2018 (23:38 JST) version)

大阪府立大学 情報数理談話会での講演

July 20, 2011

This presentation is typeset by $\text{p}\text{L}\text{T}\text{E}\text{X}$ with beamer class.

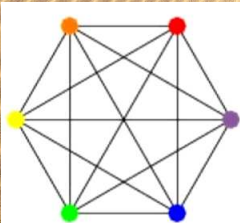
▶ ここでは、グラフとは無向で一重のグラフのこととする:

$G = \langle G, E \rangle$ がグラフとは, (1) $E \subseteq G^2 \setminus \{\langle x, x \rangle : x \in G\}$ で,
(2) E は symmetric, つまり,
すべての $x, y \in G$ に対し, $\langle x, y \rangle \in E \Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in E$
となることとする.

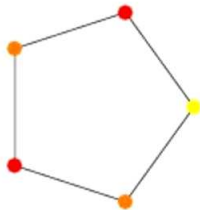
$\langle x, y \rangle \in E$ を xEy と書いて,
 x と y は (このグラフで) つながっていると解釈する.

空でない集合（色の集合） C に対して写像 $f : G \rightarrow C$ が proper coloring であるとは、すべての $x, y \in G$ に対し、 xEy なら $f(x) \neq f(y)$ となることとする。

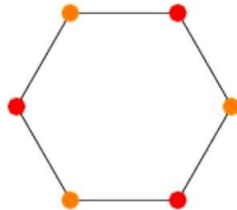
▶ G の chromatic number $\chi(G)$ を、次のように定義する：
 $\chi(G) = \min\{\kappa : G \text{ から基数 } \kappa \text{ への proper coloring が存在する}\}$



$$\chi(G) = 6$$



$$\chi(G) = 3$$



$$\chi(G) = 2$$

\mathbb{R}^2 上の関係 U を

$$U = \{(x, y) \in (\mathbb{R}^2)^2 : d(x, y) = 1\}$$

と定義して、グラフ (\mathbb{R}^2, U) を、unit distance graph of the plane (平面単位距離グラフ) とよぶ。

以下では、このグラフを \mathcal{U} とあらわすことにする。

$$\mathcal{U} = (\mathbb{R}^2, U)$$

である。

$\chi(\mathcal{U})$ は何か? (Hadwiger-Nelson Problem)

この問題は 50 年以上未解決である。

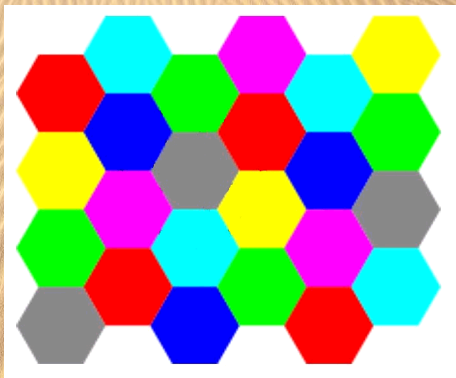
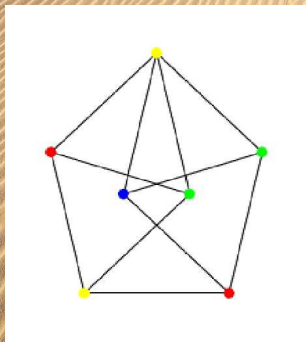
ただし、次の部分解が知られている:

$$4 \leq \chi(\mathcal{U}) \leq 7.$$

補題 1

$$4 \leq \chi(U) \leq 7.$$

証明.



[2018年04月の付記] 2018年4月に U に埋め込める位数が800以上のグラフ G で $\chi(G) = 5$ となるものが発見された。したがって、不等式 $5 \leq \chi(U) \leq 7$ が示せた。[1]を参照。

$\chi(U)$ の問題は、有限グラフの chromatic number の問題に還元できる。

定理 2 (De Bruijn-Erdős, 1951)

任意のグラフ $G = \langle G, E \rangle$ に対し、
 $k = \sup\{\chi(H) : H \text{ は } G \text{ の有限部分グラフ}\}$ が有限なら
 $\chi(G) = k$ が成り立つ。

系 3

$\chi(U) = \max\{\chi(H) : H \text{ は } U \text{ の有限部分グラフ}\}$ 。

系 3 の証明:

H を G の部分グラフとするととき、 $\chi(H) \leq \chi(G)$ である。

したがって、

$\sup\{\chi(H) : H \text{ は } U \text{ の有限部分グラフ}\} \leq \chi(U) \leq 7$

となるから、定理 2 を用いることができる。

□

定理 2 (De Bruijn-Erdős, 1951)

任意のグラフ $G = \langle G, E \rangle$ に対し,
 $k = \sup\{\chi(H) : H \text{ は } G \text{ の有限部分グラフ}\}$ が有限なら
 $\chi(G) = k$ が成り立つ.

証明.

$k = \max\{\chi(H) : H \text{ は } G \text{ の有限部分グラフ}\}$ とすると,
 $k \leq \chi(G)$ は明らかである.

有限な $x \subseteq G$ に対し, $G_x = \langle x, E_x \rangle$ を対応する G の部分グラフ
とし $f_x : x \rightarrow \{0, 1, \dots, k-1\}$ を proper coloring とする.

$X = \{x \subseteq G : x \text{ は有限}\}$ とする. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ を, すべての
 $a \in G$ に対し, $\{x \in X : a \in x\} \in \mathcal{F}$ となるような ultrafilter と
して, $\langle G^*, E^*, f^* \rangle$ を $\langle x, E_x, f_x \rangle, x \in X$ の \mathcal{F} による ultraproduct
とする.

$G \subseteq G^*$ と考えてよいが, $f^* \upharpoonright G : G \rightarrow \{0, 1, \dots, k-1\}$ は G の
proper coloring である. □

定理 2 (De Bruijn-Erdős, 1951)

任意のグラフ $G = \langle G, E \rangle$ に対し,
 $k = \sup\{\chi(H) : H \text{ は } G \text{ の有限部分グラフ}\}$ が有限なら
 $\chi(G) = k$ が成り立つ。

注意.

- ▶ Bruijn と Erdős による証明はここで示したものと異なる。
- ▶ ここで示した証明では選択公理が (ultrafilter の存在を保証するところで) 本質的に用いられている。
- ▶ 実際, 選択公理を仮定しないときには, 定理が成り立たない場合もある (Shelah-Soifer, 2003).
- ▶ $\chi(U) > \max\{\chi(H) : H \text{ は } U \text{ の有限部分グラフ}\}$ が (選択公理を仮定しない) 集合論と矛盾しない可能性は (今のところ) まだゼロではない。

グラフ G の list chromatic number $\chi_{\ell}(G)$ を, 以下の (*) を満たす最小の数 (基数) κ とする:

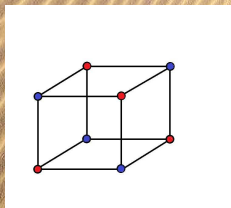
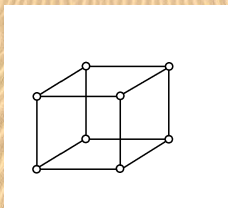
(*) G の各点に任意の κ 色からなる色のリストを対応させたとき, それらのリストから色を選ぶような proper coloring が必ず存在する.

Lemma 4

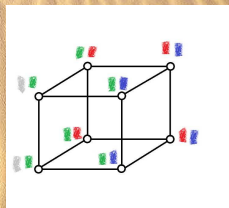
任意のグラフ G に対し, $\chi(G) \leq \chi_{\ell}(G)$ である.

証明. $\kappa = \chi_{\ell}(G)$ として, G の頂点に同一の κ 色の色のリストを対応させた場合を考えれば明らかである. \square

例: 立方体の頂点と辺からなるグラフを G とする:



$$\chi(G) = 2$$



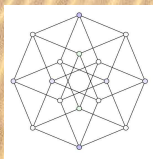
$$\chi_{el}(G) > 2$$

Lemma 5

G_n を n 次元立方体の頂点と辺からなるグラフとするととき $\chi_\ell(G_n) \geq n$ となる.

Lemma 6

n 次元立方体の頂点と辺からなるグラフ G_n は \mathcal{U} に埋め込める.



系 7

$$\chi(\mathcal{U}) \leq 7 < \aleph_0 \leq \chi_\ell(\mathcal{U}).$$

グラフ $G = \langle G, E \rangle$ の coloring number $col(G)$ を, 以下の (*) を満たす最小の基数 κ とする:

(*) G 上の整列順序 (well-ordering) \sqsubset で, すべての $a \in G$ に対し, $\{b \in G : bEa, b \sqsubset a\}$ のサイズが $< \kappa$ になるようなものが存在する.

Lemma 8

すべてのグラフ G に対し, $\chi_\ell(G) \leq col(G)$ が成り立つ.

証明. $\kappa = col(G)$ で, \sqsubset を対応する G 上の整列順序とする.

ℓ を G の各点に κ 個の要素からなる (色の) 集合を対応させる関数 (リスト) とする.

\sqsubset に関する帰納法で, G の proper coloring f を $f(a) \in \ell(a)$, ($a \in G$) となるように作れる:

f が $\{b \in G : b \sqsubset a\}$ 上で既に定義されたとき, $\ell(a) \setminus \{f(b) : b \in G, b \sqsubset a, bEa\}$ は空でないから, この要素の一つを $f(a)$ とすればよい. □

$$\text{col}(\mathcal{U}) = \aleph_0$$

定理 9 (S.F.(2011), Hiroshi Sakai (2009))

$$\text{col}(\mathcal{U}) \leq \aleph_0.$$

証明は elementary submodels による coloring number の特徴付けを用いると数行でできる.

詳細は:

S.Fuchino, Remarks on the coloring number of graphs,
RIMS Kôkyûroku, 1754 (2011), 6-16

を参照.

系 10 (Ardal, Mañuch, Rosenfeld, Shelah and Stacho (2011))

$$\chi_e(\mathcal{U}) = \aleph_0.$$

講演者 (瀧野) は、平面の chromatic number の問題 (Hadwiger-Nelson problem) について、2009 年秋に RIMS の集合論研究集会に参加した Lionel Nguyen Van Thé から教わった。



この直後、講演者からこの話を聞いた酒井拓史は $col(\mathcal{U}) \leq \aleph_0$ の直接証明を得た。この証明について Nguyen Van Thé と 3 人で議論したが、その後、酒井も瀧野もこの証明を忘れてしまった。

講演者は、2011 年の初めに coloring number の elementary submodels による特徴付けを発見して、この特徴付けを用いて $col(\mathcal{U}) \leq \aleph_0$ の証明の再現を含む、より一般的な結果を得た。この論文をさらに拡張したものを酒井との共著で準備中である。

[1] 英語版 wikipedia の “Hadwiger-Nelson problem” の項目
http://en.wikipedia.org/wiki/Hadwiger-Nelson_problem

[2] A. Soifer, The Mathematical Coloring Book: Mathematics of Coloring and the Colorful Life of its Creators, Springer (2008).

[3] S. Fuchino, Remarks on the coloring number of graphs, RIMS Kôkyûroku, 1754, (2011), 6-16.

[4] web ページ:

<http://fuchino.ddo.jp/index-j.html>

本スライドも、この web page にリンクする予定である。

fin

平面単位距離グラフの彩色 (15/15)

