科学基礎論研究 Vol.41, No.1 (2013)　63〜80

[[[不完全性定理に挑む] に挑む] に挑む]

— ゲーデル (著), 林 晋, 八杉 満利子 (解説, 翻訳): ゲーデル 不完全性定理 田中 一之 (著): ゲーデルに挑む　証明不可能なことの証明

書評

渕　野　　　昌*

Sakaé FUCHINO*

1.　2 つの不完全性定理本

この書評で評者が取り上げようとしているのは以下の二冊である:

〚林・八杉〛:
ゲーデル (著), 林 晋，八杉 満利子 (解説，翻訳): ゲーデル 不完全性定理 (岩波文庫), 岩波書店 (2006).

〚田中〛:
田中 一之 (著): ゲーデルに挑む　証明不可能なことの証明，東京大学出版会 (2012).

日本語で書かれた書籍で，ゲーデル，特に，ゲーデルの不完全性定理に関するものは少なくない．しかし，これらのうち，読むに値するもの，と言えるものは驚くほど少ない．上に挙げたものは，最近の 5〜6 年に出版されたゲーデルの不完全性定理に関連する日本語で書かれた書籍で，批評に十分に堪えると言うことのできるほんの数冊の中の二つである．

ちなみに，評者は，両方の本の解説者／翻訳者，著者を個人的に知っているし，二冊目のものについては，編集者も個人的によく知っている．この書評が必要以上に辛めのものになってしまっているとしたら，それは，このような個人的な背景のもとでフェアな書評を書こうと努力した結果にすぎない．

〚林・八杉〛も〚田中〛も，ゲーデルの不完全性定理についての論文 [Gödel[6)]] の日本語訳を中心としてそれを解説する，という形をとっている．やはりそのような形になっている，もう少し古い本には，[廣瀬-横田[17)]] もある．しかし，これらの本は想定された読者も，ゲーデルの不完全性定理の捉え方も，それぞれ全く違うものになっていると言えるだろう．ただし，ここでは，〚林・八杉〛や〚田中〛よりずっと古く，また，これらの本に比べると，ごく無難で表面的な記述に終始しているようにも見える [廣瀬-横田[17)]] については，これ以上は言及しないことにする．

〚林・八杉〛が主に不完全性定理の数学史的ないし数学思想史的な背景を訳者らの立場から解説する，というスタンスで書かれているのに対し，〚田中〛は，ゲーデルの不完全性定理についての主論文である [Gödel[6)]] と，ゲーデル全集 [Gödel[13)]] に収録されたその補筆版と英訳 (の数学的内容) を，そこで必要となる数学の予備知識をほとんど持っていない読者に理解してもらう，ということを主な目標として書かれている．両方とも (文章，内容とも) しっかりとした，著者らの主張のはっきりした個性的かつ本格的な本である．

この二冊の本はお互いに独立で，特に後に書かれた〚田中〛では〚林・八杉〛は文献として引用もされていない．しかし，まさにそのような独立性から，二冊は，ある種の緊張感を持って互いの内容を相補している，とも言えるような対になっている．そしてそのような状況ゆえに，ゲーデルの不完全性定理の総合的理解を目指す人にとって，この二冊を読みあげることはリーズナブルな目標の 1 つであると言っていいだろう．

ただし，二冊が互いを参照していないため，“正しい” 予備知識を持っていなければ，読者はこの二冊の

* 神戸大学 システム情報学研究科
fuchino@diamond.kobe-u.ac.jp

特別な組合せになかなか気付かないかもしれない．

書籍の覆面宣伝のような書評としては，以上のような記述で十分であろう．しかし，〚田中〛と〚林・八杉〛の両方の通読のみから得られると思われる「不完全性定理の総合的理解」を考えると，そこでまだ欠落している事項や，理解がアンバランストになってしまう恐れのある点も少なくないようにも思える．以下で，それらについて，各々の本についてのもう少し詳しいコメントを加えながら見てゆきたいと思う．

なお，江田勝哉氏 (早稲田大学)，松原洋氏 (名古屋大学)， および匿名の二人の査読者の方には，本項の原稿に丁寧に目を通していただき，多くの有益なコメントをいただいた．ここに感謝の意を表す．本項は，これらのコメントに基いて，何度か大きく書きなおされている．

2. 「消え行く数学の塔」と平家物語

まず，〚林・八杉〛であるが，この本は，ゲーデル [Gödel[6)]] の翻訳を中心に据えて，ゲーデルの不完全性定理成立の前後の数学史，数理論理学史の中での不完全性定理の意味や，その成立の背景に迫っている．

『ゲーデル(著)，林 晋，八杉 満利子 (解説，翻訳)』と言いながら，手元にある第 1 刷では，翻訳が 48 ページで，解説が 220 ページという，日本でよくある，おまけつきの菓子の，菓子と「おまけ」の関係のようなものが成立してしまっている．特に，この解説では，ゲーデルについてではなく，ヒルベルトについて，またヒルベルトとブラウアーとの確執についてなどの記述が延々と続いているように見える．

実際，〚林・八杉〛に批判的な人の意見をよく聞いてみると，「ゲーデルの不完全性定理の訳本と称してヒルベルトのことばかりを書いた」というものが多いようである．しかし，ゲーデルの不完全性定理の理解には，その成立の数学的／数学史的／哲学的背景を知る必要がある，ということ自体には反論の余地はないだろう．そして，この場合の背景には，当然のことながら，ヒルベルトによる「数学基礎論」と彼の学派による数学の体系の無矛盾性の証明の研究が大きな割合をしめることにならざるを得ない．

数理論理学の言葉が第二次世界大戦を境としてドイツ語から完全に英語に移ったことで，不完全性定理の成立の前後にドイツ語でなされていた多くの研究に関する事実や経緯が，その後，忘れられたり，間違った認識をされてしまっている可能性があり，特に現代の日本では，数理論理学の基礎やその歴史については，多くの場合英語の文献からの孫引きのみに頼っていることが多い，というような事情も勘案すると，〚林・八杉〛の解説で細説されている内容は，ゲーデルの不完全性定理の理解との関連で，日本語の文献のどこかで書かれる必要があった，と言ってよいだろう．ゲーデルの不完全性定理が，ヒルベルトが彼のプログラムの大きな流れの中で定式化した数学の無矛盾性，完全性を確立する，という問題に否定的な解答を与えるものであった限りにおいて，〚林・八杉〛にヒルベルトに関する長い記述が含まれているのも必然的である．

このような事情を念頭に置くと，〚林・八杉〛がヒルベルトやヒルベルトの「数学基礎論」の研究に関して多くの紙数をさいていること自体は，まったく批判の対象にはならないと考えるべきだろう．

日本では “数学史” と称するものが茶飲み話のようなものになってしまいがちな傾向が強いが，〚林・八杉〛での数学史／数学思想史に関する部分はそのようなものでは全くなく，そこで述べられている多くの事実に対しては (おおむね) 出典が明らかにされており，記述も綿密になされている．著者らが，記述の正確を期すために多大な努力をはらっていることは，林氏の web page にある本書の膨大な正誤表 [林[14)]] からも見てとれる．

〚林・八杉〛で述べられているような，半ば忘れられてしまっていた数学史／数学思想史の文脈の探求は，英語圏では，近年，〚林・八杉〛の文献表にも名前の見られる W. Sieg や R. Zach をはじめとする，数学史と数学の哲学の中間領域での仕事をしている人たちによって精力的に行なわれており，〚林・八杉〛も，これらの最新の研究から影響を受けているところも少なくないようである．

しかし，〚林・八杉〛のヒルベルトと数学の基礎をめぐる数学史の記述を読み進んでゆくと，ある意図的な演出，ないし歪曲と思われるものが徐々に強く感じられてくる．

〚林・八杉〛では，(無矛盾性と完全性の証明を通じて数学の救済を目指した) ヒルベルトのプログラムは

a) ゲーデル後も，ゲンツェンの新たな参加などにより継続はされたが，⋯ (中略) ⋯ やがてナチスによりベルナイスを含むユダヤ人が追放され，「数学がなくなってしまった」ゲッチンゲンで，ヒル

ベルト計画も静かに消えていったのである．

— 〚林・八杉〛, 第 II 部 5.17 『終焉』 の結び

として，『平家物語』の終りを起想させるような (アンタイ?) クライマックスが強調されていて，それまでの記述がすべてここに収斂するよう演出されているため，読者に不当に否定的な印象を与えてしまう可能性が大であるように思われるのである．

『ヒルベルト計画も静かに消えていったのである』というキャッチフレーズで「数学は終った」とか，「数理論理学は終った」とか，「数学基礎論は終った」などと勘違いする，あるいは勘違いしたがる人が山のように出てくるのではないか，という危惧が頭をかすめる．もちろんそういう勘違いをする人が出るとしたら，それは勘違いする人自身の責任だろうが，少なくとも「岩波文庫」というメディアの性質上，「勘違いするのは勘違いする人の責任」というスタンスは許されないだろうし，またそのようなスタンスを批判せざるを得ない状況も生じているのだと思う．

なお本節のタイトルにある『消え行く数学の塔』という表現は，〚林・八杉〛, 第 II 部，5.2 の題の引用である．これは，直観主義から距離をとるようになった 1927 年の時点での Hermann Weyl の次のような言葉からとられたもののようである．独語のテキストが手元に見当らないので英語版の方であるが，

> b) Mathematics with Brouwer gains its highest intuitive clarity.
>
> ...
>
> It cannot be denied, however, that in advancing to higher and more general theories the inapplicability of the simple laws of classical logic eventually results in an almost unbearable awkwardness. And the mathematician watches with pain the greater part of his towering edifice which he believed to be built of concrete blocks dissolve into mist before his eyes.
>
> — Hermann Weyl, [Weyl[32)]]

このような文脈から『消え行く数学の塔』という表現を抽出する仕方には，〚林・八杉〛の日本語の使い方の特徴の一つがよくあらわれているように思える．原文の「塔」はもちろん「象牙の塔」(Elfenbeinturm) という表現を意識したものだろう．しかも，これは学生運動の頃からの考え方によって，ネガティヴなニュアンスがこの表現に付加されるよりずっと前の良き時代 (belle époque) の，純粋学問の行なわれる理想的空間というポジティヴな意味での「象牙の塔」である．そういった背景の説明はないまま，原文の魔法にでもかかって忽然と消滅する，というイメージを表現している文章を「消え行く」という日本的なパトスの感じられる表現で置き換えることで，前出の引用文 a) での『「数学がなくなってしまった」ゲッチンゲンで，ヒルベルト計画も静かに消えていったのである』に呼応して，この壇ノ浦の段への伏線の一つように見える文章ができあがってしまっている．

もちろん，この『消え行く数学の塔』のもとの文章でワイルが言っている消滅は，ヒルベルト計画のそれではなく，〚林・八杉〛にも解説してあるように，ブラウアーの提唱した直観主義上に構築すべき数学のそれである．しかし，ここで滅びの美学の表現が重ねられることで得られている精妙な否定的文学的効果は見逃すことはできないだろう．

3. 終ったところから始まる

〚林・八杉〛 では，この “クライマックス” の記述の後，『不完全性定理のその後』 と題された第 II 部 6 章で，

> c) これまでの解説では，ゲーデルの不完全性定理を「終焉」として扱ったが，それですべてが終ってしまったわけではない．
>
> — 〚林・八杉〛, 第 II 部 6 章の初め

として「その後」についても論じられている．しかし，読み進むと，この章は，単に上のような批判をかわすために書き足されたにすぎないのではないかと疑いたくなってくる．というのは，「すべてが終ってしまったわけではない」として終っていない部分に対してなされているこの章の記述や，この章への伏線となっているそれより前の場所での記述にも，否定的なコノーテションや意味のあいまいな否定的な比喩などが満ちているように思えるからである[1]．

上で，「数学は終った」，「数学基礎論は終った」などと勘違いする，あるいは勘違いしたがる人が山のように出てくるのではないかと恐れる，と書いたが，実

[1] 〚林・八杉〛 からの例を沢山あげることは控えるが，例えば，引用文 d) とそれに関するコメントや，脚注 16 の引用文 j) なども参照されたい．

は，著者らが読者に伝えたかった本当のメッセージはまさにこの「数学は終った」や，「数学基礎論は終った」などだったのではないかという気さえしてくる．

20 世紀後半になされた数理論理学や不完全性定理と関連する数学の発展について書いてある文献は本文にも巻末の文献表にも掲載されていないし，そのため，この章で述べられていることの出典は多くの場合明らかにされておらず，上で述べた，「記述は，非常に綿密なものになっている」という評価は，この章に対しては当てはまらない部分もあるように思える．

評者はむしろ，不完全性定理によって，数学は大変にスリリングな学問に変容したと思っている．我々が通常盲点を意識しないように[2]，不完全性定理以降も，「普通の」数学は，数学の不完全性や，ひょっとすると数学が孕んでいるかもしれない矛盾を全く意識せずに，過去の未解決問題を楽々と解決したり，新しい理論を次々と作りだしたりしてきている．

一方で，そのようなごく普通の数学で考察されてもおかしくないように見える多くの命題が，数学から独立である (つまりその命題も，またその命題の否定も証明できない) ことも証明されてきている．もちろん，不完全性定理の制限のために，ここでの独立性として言えるのは，「通常の範囲の数学が無矛盾と仮定すれば」という前提を伴った相対性の枠組の中ででではあるが，その条件の下では，これらの独立性の証明は厳格な有限の立場で実行されている[3]．これは，我々は日常生活では，盲点に気付きもしないし，あたかも盲点がないように振る舞ってもいられるのに，野球の試合を見にいって売り子からジュースを買うことに気をとられている間に，死角の方向から飛んできたフライの流れだまのボールにあたって眼鏡が割れて怪我をしてしまったりすることがある，というような事態にも似ている，とも言えなくもないかもしれない．実際，旧来の数学を研究している数学者の独立命題に対する反応は往々にして，この割れた眼鏡の不条理に対する驚きや怒りのようなものであることが多いように思える．

しかし，数学から独立な命題の発見やその独立性の証明は，病理学的状況の暴露というような悪趣味とは全く関係なく，むしろ数学の体系の更なる拡張についての議論の踏台というような積極的な意味合いを持っているものである．もっと数学的ないし集合論的には，これは数学的無限の様相の理解の深化にむけての研究である，と言うこともできるであろう．

現代の数学のスリリングでエキサイティングな現在進行形での発展の様相を認める視点から眺めたとき，〚林・八杉〛の第 II 部 6 章での不完全性定理以降の数学に対する〚林・八杉〛の解説者／翻訳者らの否定的な記述は大変に残念な気がするのである．

〚林・八杉〛の第 II 部 5.16 の終りには，

d) しかしフォン・ノイマンは，このニュース[5]をヒルベルトに伝えなかったらしい，⋯ (中略) ⋯ 彼は，パリ講演でのイグノラビムス批判を繰り返した後，こう結んだのである．「我々は知らねばならない．我々は知るであろう」

— 〚林・八杉〛, 第 II 部，5.16
『1930 年ケーニヒスベルク』の結び

とある．ここの文章は，フォン・ノイマンが教えてあげなかったために，ヒルベルトは的外れになってしまったこの「我々は知らねばならない．⋯」を彼の講演の結語として選んでしまった，と言っているようにも読める[6]．しかし，このヒルベルトの講演の結語が，不完全性定理によって数学に対する有効性や文化的な適切性を失なってしまった，という見方の方こそ，全く

[2] 実際，我々の認識の中での視覚的映像には，盲点のぼやけた黒い点が 2 つ入ってはいないし，テレビの画面の縁のような視界の縁が入っているわけでもない．

[3] 通常，このような独立性証明の数学の「現場」では，議論は有限の立場での証明に翻案できることを意識せずに，もっとずっと「数学的」な枠組の中で行なわれることが殆どである: このあたりの事情については，例えば [Kunen[20)]] の第 VII 章 §1 を参照されたい．なお，これらの独立性証明は，特に巨大基数公理が関与しない場合には，その証明の技術面では不完全性定理とは直接の関係を持たないが，不完全性定理は，そのような独立性命題が無尽蔵に存在することを保証してくれている，という意味で，基本となっている．なお，この「無尽蔵性」((独) Unerschöpflichkeit, (英) inexhaustibility) はゲーデル自身の表明にも現れる，ゲーデルの不完全性定理を語るときの重要なキーワードの 1 つと思われるが[4]，〚林・八杉〛も，〚田中〛も，このキーワードに関連する事項にはほとんど触れていないように思える．

[4] “Inexhaustibility” に関するゲーデル自身の言及は，例えば [Gödel[12)]] に見られる．これに関しては [Feferman[4)]] も参照されたい．

[5] [評者註]: 第 1 不完全性定理がゲーデルによって証明されたこと．

[6] 日本語の訳語の「我々は知るであろう」は，待っているとそのうち知識が得られる，というような受身の表明のようにも読めてしまうが，原語での „Wir müssen wissen, wir werden wissen.“ の „wir werden wissen“ はもっと積極的に知ろうとする意志をもって行動した結果知ることになる，というニュアンスが感じられる表現である．

的外れというか，それこそ Ignorabimus 論者のさしがね的発言でしかないであろう．

数学のすべての仮説は数学的思考の集中により必ず解決できる，という数学者[7]の信念は，不完全性定理によっていささかもゆるいではいないし，この信念の“正しさ”は，とどまることを知らない数学の進歩が保証してくれていると言っていいだろう[8]．数学から独立な命題が沢山見つかっているではないか，という反論があるかもしれないが，数学から独立な命題を研究している数学者は，(数学からの独立性が疑われる) どの数学の命題も，その命題かその命題の否定の証明が見つかることで，それが独立でないことが反駁されるのでなければ，その命題の独立性は必ず証明できる，という信念を持っていると思うし，この信念の妥当性を裏付ける数学の結果も数えきれないほどあり，現在，爆発的な進展の中で，さらに得られつつもある．

4.　計算機科学，ビショップ流構成数学，逆数学

〚林・八杉〛の第 II 部, 6 章では，不完全性定理にまつわる展開からの肯定的な産物として，計算機科学と，ビショップの折衷的直観主義のみが無批判に取り上げられていることの不均衡さも気になる[9]．

逆数学がビショップの考察をさらに進めたものである，と読むことのできる記述 (後出の引用 g) を参照) も，特にビショップ流の構成数学が，形式的体系に関する考察の必然性や必要性を意識的に無視したものである点や，逆数学が，ビショップ流の構成数学でのような擬似直観論理をベースにするものではないことを考えると，多分に問題があるように思える．

なお，この逆数学に関しては，〚林・八杉〛の執筆の時点で既に参照することもできた〚田中〛の著者による [田中[28)]] が，日本語で読むことができるコンサイスな入門書の 1 つである．しかし，前にも述べたように，この本を含め，〚林・八杉〛には数学的内容を補足するような文献の示唆は何もされていない．主に英語で発表された数学史，数学思想史に関連する文献を含む文献表が巻末にあげられているのみである．一般向けの本で欧文の文献しかあげない，ということなら，そのスタンスの自然な延長としては，むしろ，本文もすべて英語で書いてしまう，というもっとずっとストレートなやり方もあったような気がする (ただし，もちろんそうすると岩波文庫に収録してもらうことはできないという問題は生じることになるのだろうが)．

この〚林・八杉〛での逆数学に対する言及は，後でももう一度触れることになる [Gödel[8)]] の初めの部分の引用が枕になっている:

e)　この講義でゲーデルは，ヒルベルトの無矛盾性証明の目的を，(A) 数学の全体を，その極く小さい一部分に還元することと，(B) 数学理論をより堅固だと皆が納得する基礎に還元すること，の二つからなると主張した．

— 〚林・八杉〛, 第 II 部，6.2

ところが，ゲーデル全集 [Gödel[13)]] に収録された [Gödel[8)]] を見てみると，対応する部分は，

f)　Befriedigend 〚ist〛 ein Beweis 〚nur〛, wenn er

A. auf einen echten Teil reduziert 〚oder〛

B. auf etwas zurückführt, was zwar nicht Teil, aber was evidenter, zuverlässiger, etc. ist, so daß dadurch die Überzeugung gestärkt wird.　— [Gödel[8)]]

(〚· · ·〛は全集の編集者らによる補筆)．となっている．これを， e) と比べてみると，以下の (0), (1), (2) で述べることが指摘できる．

(0) e) で引用した文では，ゲーデルが (A), (B) を「ヒルベルトの無矛盾性証明の目的」として挙げていると書いているが，[Gödel[8)]] では直接ヒルベルトの名前はあがっていない．これは後でも議論することになる点であるが，ヒルベルト自身の対応する言明では (A) に相当する議論のみが内容的には (B) の一部も含むようなものとして述べられている ([Hilbert[15)]], [Hilbert[16)]] — もちろんヒルベルトのこれらの論文はゲーデルの不完全性定理以前の認識のもとで書かれて

[7] ここで言っている “数学者” は単に tax declaration の職業欄に mathematician と書くような人という意味でなく，数学の創造に加担している人，あるいは加担できる人，という意味である．

[8] もし数学の進歩が頭打ちになる時がくるとすると，その理由は不完全性定理ではなく，むしろ人間の知力の限界と発展しきった数学の複雑さの兼ね合いにあることになる可能性が高いように思える．しかしそのような飽和状態は，コンピュータが思索の補助装置としてより積極的に使われるようになれば，かなりの程度先送りされることになるだろうと思うし，ひょっとすると，人類の歴史の有限性のために最後まで逃げきれてしまう可能性も低くはないような気もする．

[9] 〚林・八杉〛では，少なくともこの 2 つのトピックスに関しては否定的に読めるコメントは何も書かれていないように思える．

いるものである）．これに対して (B) は不完全性定理の後になって初めて見えるようになった“修正された”ヒルベルト計画である．

(1) f) で列挙をつないでいる „oder“ はゲーデルのもとのノートにはないものだが，引用した文章の少し前に出てくる絶対的無矛盾性と相対的矛盾性の同様の列挙が内容から確実に „oder“ になっていることから，ここでもその意味になっていることは確かだと思っていいだろう．そうすると，e) での“かつ”と読める書き方は誤訳ということになる．また，

(2) ゲーデルの „evidenter, zuverlässiger, etc.“ (より真実性があり，より信頼性 etc. のある) という表現に対応する e) での訳文の「皆が納得する」は，この „evidenter, zuverlässiger, etc.“ からの可能な帰結の 1 つとしてはあるかもしれないが，原文の表現自身にそのような日和見主義的な含意があるわけではない．

このような不確かな翻訳から出発しているために，これに続く議論は部分的に破綻したものになっており，断定的に述べられているいくつかの見解に狂いが出てしまっている．

ここでは，すべてにわたって議論する余裕はないので，逆数学に関連した〚林・八杉〛の見解について限定して，「部分的に破綻」していると言った評者の判断の所以を見てみることにしたい[10]．少し長い引用になるが，以下は〚林・八杉〛の第 II 部，6.5 からの逆数学に関する記述である:

g) 1970 年代には，このアイデア[11]をさらに進める**逆数学**という分野が登場し，PRA と本質的には同じだけの安全性を持つ第 2 階算術の部分体系の中で，極めて多くの数学が再現されることまで証明されている (逆数学の体系では排中律を許容し，集合の公理や数学的帰納法に制限をもうける)．つまり，数学のかなりの部分が，最も厳密な意味での有限の立場と同等の数学の部分体系で実行可能なのである．例えば，解析学の定理でこの範囲で証明できるものも少なくない．

このため逆数学の研究者たちは，これをヒルベルト計画の部分的達成と称している．実際のヒルベルト計画は，数学が十分実行できる形式系を構築し，それの矛盾性を有限の立場で証明することだった．逆数学の場合は，この体系が PRA と同等の第 2 階算術の部分体系やその拡張となるのだが，その無矛盾性は，第 2 不完全性定理により，PRA つまり，有限の立場では証明することができない．したがって，逆数学の研究者たちの主張には誇張が入っている．それでもこの結果はゲーデルが議論したヒルベルト計画の条件 (A), (B) のうち[12]，第 2 不完全性定理により放棄されたはずの (A) の条件が，数学の相当大きな部分で半ば達成可能だという重要な事実を示しているのである． —〚林・八杉〛, 第 II 部，6.2

ビショップの構成的数学との関連に関して上の g) で述べられていることの問題点については既に述べた．

PRA の定義の記述の仕方も気になるが，これはここでの論点とは直接には関係しない[13]．

g) で，「逆数学の研究者たちは，これをヒルベルト計画の部分的達成と称している」と言われているのは，

[Simpson[26)]] のことであろう．

ここで，〚林・八杉〛の解説者／翻訳者らは，「PRA では第 2 不完全性定理により PRA 自身の無矛盾性の証明ができないので，誇張が入っている」，と言っているのだが，〚林・八杉〛の Ackermann の学位論文について述べているところ (〚林・八杉〛, 第 II 部，5.12) で触れられている結果からもわかるように，(1 階の論理での) PRA の無矛盾性はペアノの公理系の無矛盾性に必要な ε_0 よりずっと小さい順序数の (構成的な) 整列性の仮定から証明できることが知られている[14]．

[10] この「数学理論をより堅固だと皆が納得する基礎に還元すること」という意識的な誤訳から派生したもう一つのぶれの例については，脚注 21 とその前後を参照されたい．

[11] [評者註]: 「ビショップの構成的数学のアイデア」のこと．

[12] [評者註]: ここでの (A), (B) は，引用文 e) での (A), (B) のことである．

[13]〚林・八杉〛(の第 1 刷？) には，

> h) これは式としては等式のみを持ち，すべての原始帰納的関数の定義と数学的帰納法を持つ理論で，それを形式系にしたものが，現在 PRA (原始帰納的算術) と呼ばれているものである． —〚林・八杉〛, 第 II 部，5.11

とある．「式としては等式のみを持ち」が微妙である．「等式だけからなる公理と等式の論理結合だけを含む推論図式としての帰納法を用いて定式化できる」という解釈をすればいいのだろうが，これは PRA が何かを既に知っている人が善意に解釈したときにのみ意味が通る説明でしかないように思える．

[14] (1 階の論理での) PRA の無矛盾性は ω^ω 以下の順序数

(B) は，確かに e) でのように考えると，〚林・八杉〛の解説者／翻訳者ら自身がその反例になっているように見えるので，「皆が納得する」としては成立しないことになる．しかし，上の PRA の無矛盾性の強さに関する結果は，〚林・八杉〛での解釈 (引用文 e)) ではなく [Gödel[8]] の意味 (引用文 f)) で考えたときには，(B) はここでは十分に成立している，と解釈することもできることを示しており，そう考えると， e) での「誇張が入っている」は，むしろ〚林・八杉〛の解説者／翻訳者らの主張の方であろう．解説者／翻訳者らの言う誇張があるとすれば，それは，むしろ PRA と equiconsistent な体系で処理のできる数学の範囲についての評価であろう．しかし，これについても，ここで初等的な解析学の基礎的な部分が展開できることが確かめられているので，その意味の範囲では，ひどく大きな誇張はない，と考えていいように思える．

5. 偽象牙の塔（Pseudoelfenbeinturm）の崩壊

これまでの部分で述べた評者の〚林・八杉〛に対する評は，以下のような意味では，少し言いすぎになっているかもしれない:

〚林・八杉〛の第 II 部，9.『あとがき』には，4. で既に触れた，主に 20 世紀中期くらいまでの数学史に関する英語で書かれた文献を収めた文献表の前に書かれた文章は次のように終っている:

i)　… こういう専門的文献は，20 世紀の終わり頃までは，大学などの専門家集団に属さない限り手に入れにくかった．しかし現代では Web の発達などにより，語学などの能力とわずかな資金さえあれば，専門家集団に属さなくとも容易に手に入れることができる時代となっている．研究論文にいたっては，専門的であればあるほど，読者を求めて Web 上でフリーに公開される傾向さえある．例えば一昔前までは学位論文は研究者であっても手に入れにくかったが，今では多くの著者が自分のホームページ上で公開している．研究者・学生でない読者諸氏でも，これらの文献のほとんどを容易に手に入れることができるのである．

これは，〚林・八杉〛の読者が，〚林・八杉〛をきっかけとして，文献を読みすすんで自分の不完全性定理像や，不完全性定理に関する哲学的思索を深めてゆくことを示唆，奨励している，というようにも読める．

もし〚林・八杉〛がそのような「きっかけ」として機能することを想定して書かれていたのなら，評者はこれまでに書いた否定的な評価を放棄して〚林・八杉〛を手ばなしで評価する用意がある．もし〚林・八杉〛がそのような「きっかけ」を意図して書かれた本だとすれば，評者の書いたようなことは，むしろ読者一人一人が自分で考えることに属し，これを書いてしまうことは，上級者向けの数学の教科書の演習問題に答をつけてしまうことと同じような，やるべきではない余計なことであったと言わなければならなくなるだろう．しかし，これにはいくつかの保留案件や懸念もある．

まず，〚林・八杉〛が収録されている文庫が日本でのスタンダードとしての格を持っていることが，〚林・八杉〛をこのような「きっかけ」としてより，ある種の権威としての役割を自動的に与えてしまうのではないか，という懸念である．そして，「権威」としてだったら，評者が，本書評で述べつつある，いくつかの深刻な問題は当然指摘すべきだろう．

Web 上で手に入るのは，考察に値する文献だけでなく，ありとあらゆるものが含まれている，ということも懸念の材料の一つである．Web 上で入手できる文献を正しく評価できるためにはかなりの教養が必要なことは，もしあなたが大学教員なら，自由レポートのような課題を出したときに，多くの学生がネットからとってきてつなぎ合せて捏ち上げてくる驚くべき文書を思い出してみると，納得できるはずである．それを考えると，「ここでは自分の言いたいことを強引に書いたが文句があるならネットで調べて自分の考えをまとめてくれ」というのは啓蒙としての役割を求められている本を書くときの態度としては，あるべきではないのではないかと思えてくるのである．

もちろん自分の意見を書くなと言っているのではない．しかし，〚林・八杉〛のような歴史や哲学を検証するような性格の本，しかも一般向けのメディアで出版されていて「権威」としての格を収得してしまう可能性のあるものを書くのなら，自分の意見を言うにしても，少なくとも自分の意見にそぐわない文献や視点ももっと積極的に引用し，公平な評価を与える努力をすべきだろう．

評者のもう一つの懸念は，引用文 i) にある「語学などの能力とわずかな資金さえあれば」という条件である．この場合の資金は比較の対象によっては確かに微々たるもの，と言えるかもしれない．しかし，「語

の整列性から証明できる．

学」の方はもっと深刻な問題をかかえているように思える．

評者の子供の頃には，アメリカに渡る日本人の第一線の科学者が後をたたず「頭脳流出」という言葉が危機感をもって語られていた．その後，この頭脳流出をくいとめるための英語教育の改革が行なわれて，というのはもちろん考えすぎだろうが，もしそうだったとしたら，文部科学省は大変な成果をおさめたことになる，と言えるだろう．評者の周りを見渡しても，英語がある程度以上読める学生は皆無に等しいように思える．学生でもそうなのだから,「研究者・学生でない読者諸氏」全般にこれを期待するのはなかなか厳しいところがあるように思える．逆に，読者の英語力が期待できるのなら，本の想定している主な読者が日本人でも，英語で書いてしまった方がいいであろう．

ドイツでの学術書や学術的教科書の出版は 1995 年くらいを境に，ほとんど英語に移行したと言える．ドイツ語で数学の本を書くということは，ごく初等的な教科書を別とすれば，現在ではほとんどない，と言っていいと思う．上で,「読者の英語力が期待できるのなら，想定される主な読者が日本人でも」と書いたが，評者は，なにも日本の英語教育の尻拭いをする必要もないのではないかと思いはじめていて，日本語で数学の本を書くことに対して否定的になってきている．特に，不完全性定理関連に限っても，ここでとりあげる気もおこらなかった，日本語での近刊書の数々を思いうかべると，そのような本と一緒に書店の棚に並ぶことになる本を書くということに対して大変な気後れを感じてしまっている．

引用文 i) に話を戻すと，数学史に関連する思索で必要となる「語学などの能力」は英語でのそれに限ったものではないだろう．また，もちろん語学以外の能力も必要だろうが，何か国語かが文章の細かいニュアンスも含めて読みとれる，という能力は，Web 上の情報を取捨するときの大きな助けにもなる．たとえば，色々な種類のゴミ情報が交じりこんでしまっている可能性が常にゼロとは言いきれない Wikipedia でも，同様の項目を複数の言語で批判的に読み比べてみることにより，不確かな，あるいは間違った情報を信じたり学習してしまったりする確率をかなり下げることができるだろう．しかし，既に述べたように日本での平均的な語学力の現状は英語だけでも惨憺たるものなので，これは高望みと言わざるを得ないかもしれない．

昔の日本の “学者” は欧米 (もっと古くは中国や和蘭など) の稀少な専門文献を手に入れて秘蔵することで「権威」になることができたりしたようである．インターネットの普及は，そのような僞学者の成立を難しくした，と言うことはできるだろう．しかし，インターネットの普及そのことが，直ちに知識／知性の解放ということに繋がるわけではないことは十分に注意をしておくべきだろう．

6. 〚田中〛と kawaii[15]

〚田中〛はゲーデルの 1931 年の論文 [Gödel[6)]] を (数学的に) 読み解く，ということが主眼になっている本である．〚林・八杉〛ではゲーデルの不完全性定理の論文の出版された 1931 年の前後の数学史，数学思想史での文脈が問題となっているため，そこで訳出されているのは，[Gödel[6)]] であったのに対し，〚田中〛ではこのような数学史のコンテキストは問題とされておらず，後にゲーデル自身や編集者らによって手の加えられている全集 [Gödel[13)]] でのテキストが主に参照されている．これにより，ショパンのエチュードを原典版で弾くか，コルトー版で弾くか，というのと同じくらいの違いは出てくる可能性があるだろう[16]．

[15] 英語版ウィキペディアの kawaii の項目 [Wikipedia[33)]] には，日本の現代民衆文化キーワードとしての kawaii の記述があり，対応するドイツ語版 [Wikipedia[34)]] には「kawaii はヨーロッパ言語で，日本的な「かわいい」美意識から影響を受けた価値観を指す単語として定着した」という記述がある．一方フランス語のページ [Wikipedia[35)]] では，より文化人類学的な切りこみの鋭い文章になっていて，ここには「kawaii は日本だけでなく，中国，シンガポール，台湾，韓国でも同じようにポピュラーである」という指摘がある．

[16] この音楽に関する比喩は蛇足だが[17]，〚林・八杉〛の第 II 部第 6 章の

> j) すでに説明したように，歴史研究の成果によれば，ヒルベルトたちの有限の立場に対する見解は，ジェット・コースターのように乱高下していたのであり，… — 〚林・八杉〛, 第 II 部，6.1

は，本稿の第 2 節で述べたような “演出” に寄与するかもしれない，その意味では蛇足ではない比喩と言えるだろう．

[17] もちろん，この「蛇足」は言葉の綾にすぎない．読者の読む楽しみを奪ってしまう種明かしをしてしまうと，以降に散見される，音楽の比喩は，一つには，n) で引用することになる〚田中〛の著者の姿勢への批判の伏線となっている．

本稿での，以下の「脱線」で問題にしている「音楽」は，n) で言っていると思われるような種類のものではなく，後に出てくる G. Ligeti の名前が示唆しているように，通常の商業音楽としては耳にすることのない西洋

⟦田中⟧ では数学史的または数学思想史的な考察はほとんどなされていないが，当時の用語と現代の用語の違いに関する注意や，一口小話のような形での歴史や背景に対する註釈／蘊蓄は，たくさん挿入されている．しかし，そのような註釈はあくまで数学的な内容の理解の助けになるような種類のもので，⟦林・八杉⟧ でのような歴史検証のための正確さを目指しているものではないようである．

たとえば，⟦田中⟧ の『序・ゲーデルと不完全性定理』では，「不完全性定理」という名称や概念が比較的最近になって用いられるようになったものであることを主張している場所では，

> k) しかしながら，いくつか定番の教科書を振り返ると，ヒルベルトとベルナイス (第 2 巻，1939) [1] では「ゲーデルの導出不能定理」，クリーネ (1952) [19] は単に「ゲーデルの定理」，そしてシェーンフィールド (1967) [21] で「不完全性定理」というように呼び名が変っています．
>
> — ⟦田中⟧，『序 ゲーデルと不完全性定理』

とある．こう書いてあると，1960 年代終りの [Shoenfield[25)]] で初めて「不完全性定理」の名称が確立した，と言われているような印象を，読者は受けてしまうのではないだろうか． しかし，実は，上に [19] として引用されている 1952 年の [Kleene[18)]] でも，本文では不完全性定理に対する名称としては，確かに Gödel's Theorem という表現のみが用いらえれているが，索引には "Gödel's (incompleteness, undecidability) theorem" いう記載がある．また 1956 年の [Church[3)]] の目次の後には，第 II 巻で計画されている章立てとして載っているリストがあって，ここには "Gödel's Incompleteness Theorems" という計画されている章の名前が見出せる．したがって，「不完全性定理」あるいは Incompleteness Theorem という名称は，少なくともアメリカでは，遅くとも 1950 年代の半ばには確立していた，と考えてよさそうである[18]．

しかし，ここで言いたかった歴史的な事実に関する議論の精度についての指摘を別にすれば，「不完全性定理」という名称がいつ使われだしたか，ということの水かけ論争自体はいかにも不毛に思える．ゲーデル自身は「不完全性定理」という名称を意識的に避けていた形跡もある．「不完全」という形容詞の持つ不必要に否定的な含意をさけたい，というのがその裏にあったことだったかもしれない．ここではむしろ，その可能性や，それ以外の可能性，またそれらからの帰結などについて論じてほしかった，という気がする．

⟦林・八杉⟧ が，「学問は啓蒙ではない，理解したいなら自力で理解せよ」とでも言いたげな，読者を突き放したスタンスやスタイルで書かれているのに対し，⟦田中⟧ では，書籍の Verkaufsstrategie（はんばいせんりゃく）としては，もう少し現実的な，読者の想定の絞り込みがなされているようにも思える．しかし，⟦田中⟧ の前書きには，

> m) 正直にいうと，毎年 10 人くらいの人に本書を完読していただけるならば，私のミッションは成功だと考えています．何万人もの人に気楽に読んでいただけるような書き方はしていませんので，一読してわかった気になりたい人には他書をお薦めします．
>
> — ⟦田中⟧，『はじめに』

とも書いてある．しかし，これは毎年 10 冊売れれば

のクラシック音楽 (商業音楽としてのクラシック音楽のことでもない) の延長線上の (純粋) 音楽のことである．数学 (これについてもここで言っているのは応用数学ではなく純粋数学である) と，そのような音楽の間には，それを理解できる人がごく限られていることや，その美学や，それをとりまく (ここで触れた "アマチュア" の現象を含む) 社会構造や，歴史的な変遷に，単なるアナロジー以上の密接な類似性が見られる，という点を指摘しておく必要があるだろう．評者は，この類似性を論じることは数学論を論じるとき避けることのできない論点の一つとなると思っているのだが，もちろん本稿はこれについて更に議論をすることが適当な場所ではない．

[18] ちなみに，ゲーデル全集 [Gödel[13)]] の第 III 巻の未出版の講演のノートで見ると，日付の分らない 1930 年代のノートには，"my paper about undecidable proposition" という表現が見られ，1951 年の Gibs Lecture の講演ノート [Gödel[12)]] には，"incompletability of mathematics" という表現が見られる．また，定理の名称としてではないが，1932 年に書かれている不完全性定理の結果の要約 [Gödel[7)]] では，既に，第 1 不完全性定理を

> l) „Jedes Z umfassende formale System S mit endlich vielen Axiomen und der Einsetzung- und Implikationsregel als einzigen Schlußprinzipien ist unvollständig, d.h. . . . "
>
> — [Gödel[7)]]

と表現している (下線は評者による)．特に，[Gödel[7)]] の上で引用した箇所から，ゲーデルは既に 1930 年代初め頃に第 1 不完全性定理を，公理系の „Unvollständigkeit" (不完全性) としてもとらえていたことがわかる．なお，評者は，l) を，早稲田大学の江田勝哉先生から教えていただいた．ここに感謝の意を表す．

いいことを目指している，ということではないようである．装丁や挿絵に kawaii 挿絵のイラストが沢山挿入されていて，学習参考書のようなかこみや網掛けでの色分けまでされている本書を見て，「こんな本ならちょっと読んでみてもいいかな」という思いを抱いた，この 10 人以外の，割と沢山の人が本書を完読できないことが期待されているように思える．しかし，そうだとすると，⟦田中⟧ のコンセプト自体に問題があるような気がしてくる．

⟦田中⟧ の『おわりに』にあるように，この本はアマチュアの数学愛好家のための勉強会で行なった講義の講義録がもとになっているということである．

アマチュア数学者で，原典を読む，ということに対する強い憧れを抱く人は少なくないようである．評者も昔まだ日本の大学で数学の学生をしていたころ，知人のアマチュアの数学者に頼まれて，広中平祐のフィールズ賞受賞の電話帳のような厚さの原論文をコピーしてあげたことがあった．原典を読破した，原典を理解した，という達成感は心地よいものだろうし，オタク的に自慢のできることでもあるかもしれない．ここにはアマチュア・ピアニストがリストのソナタやリゲティーのエチュードを弾きたがるのと同じような心理構造が隠れているのかもしれない，とも思う．

アマチュア・ピアニストがリストのソナタを無理矢理つっかえながら弾いてもあまり音楽的な意味がないのと同じように，原典を無理をして読むこと自身は必ずしも深い理解を得ることへの近道ではないだろう．もちろん，深い理解に到達できるなら，そこで読んだのが ⟦田中⟧ のような原典を解説した本であっても，もう少し近代的な翻案のほどこされた教科書であっても，どちらでもかまわないだろう．しかし，原典を読んで理解することに挫折した場合と，証明のアイデアの記述がもっとずっと整理された教科書を読んで全体を読みきれなかった場合とでは，そこで得られている不完全な理解については，後者の方が格段にダメージが少ない可能性が高いのではないだろうか？

⟦林・八杉⟧ にもあるように，少なくとも [Gödel[6)]] の執筆の初期の段階では，ゲーデルはアッカーマンによって初等数論の無矛盾性が既に証明されている，ということを前提に思索を進めていた可能性が高く，だから，高階の数論で議論をすることが本質的だと信じていた可能性もある．フォン・ノイマンに促されて，彼の議論が 1 階の数論で実行可能であることを確かめたが，この段階でアッカーマンの結果の証明をよく知らなかったか，あるいは知っていたとしても，この証明のどこで有限の立場を越える議論がなされていたのかを絞り込むことができないでいたため，いくばくかの逡巡が残っていたのではないだろうか．⟦林・八杉⟧ の第 II 部 6.1 節には，「ゲーデルが，1931 年から 1933 年までの間に，ヒルベルトたちの文献を分析したらしいことが，1933 年の講演の発言から判る．」と書かれているが，ゲーデルが実際この期間にヒルベルト・スクールの研究結果を集中的に分析していたのだとしたら，そのことは，[Gödel[6)]] の執筆の後に，ここで言ったような凝りが残っていたためだと考えると納得ができる．

また，[Gödel[6)]] の執筆では，ゲーデルは当時の論文の読者から感情的な反発や攻撃を受けることをさけるための書き方を工夫した可能性があるようにも思える．

⟦田中⟧ の著者は，前書きで，

> n) ゲーデルの原論文 (日本語訳ですが) を読む醍醐味はこの青年数学者が奏でる論理の旋律をライブ感覚で賞翫(しょうがん)することにあると思います．
>
> — ⟦田中⟧，『はじめに』

と書いている．だが，この旋律の賞翫には，上のような事情に由来すると思われる，かすかな旋律のゆらぎも，そのようなものとしてライブに聴きとる (追体験する) ということも含まれているべきであろう．しかし，そのような高度な聴取は，すでにモダンなやりかたで不完全性定理を含む数理論理学の基礎をしっかりと勉強している，という意味でのソルフェージュの訓練を十分に受けた耳にのみ可能なのではないかと思われるのである．

誤解のないように，言っておくが，評者は，現代でも読んでみることに大きな意味のある数学の古典的作品としての，[Gödel[6)]] の価値に対して異論をはさんでいるわけでは全くない．評者が問題にしているのは，読み進むためにイラストの癒しが必要だったり，文部省検定済教科書や受験参考書のようなレイアウトの醸し出す安心が必要だったりする人たちにとって，[Gödel[6)]] の数学的内容を原典で，あるいはその日本語訳で読み解こうと試みることが必ずしも妥当とは思えない，ということである．

ちなみに，[Gödel[6)]] の現代の古典としての素晴しさは，これまでにも多くの人が語っているところである．たとえば，S. Feferman は，アメリカ数学会の会員雑誌に掲載された記事で，

o) Gödel's incompleteness paper (1931) is a classic of its kind; elegantly organized and clearly presented, it progresses steadily and efficiently from start to finish, with no wasted energy. The reader can find it in the German original along with a convenient facing English translation in Vol. I of his Collected Works (1986). I recommend it highly to all who are interested in this landmark in the history of our subject.
— [Feferman[4)]]

と書いている．しかし，ここでの "to all who are interested in this landmark ..." で想定されている，このメッセージの受け手はアメリカ数学会の会員であり，たとえば，[Gödel[6)]] で用いられている初等数論の議論の行間を自力で埋めることが困難である，というような種類の読者はこの想定にはそもそも含まれてはいないだろう．

なお，ここでは著者のコンセプトや，『補遺』での不完全性定理の捉え方を主に問題として議論したため，⟦田中⟧ での，この勉強会での講義の内容を再現した本文の部分についてはほとんど触れることができなかったが，この部分については，大筋として，ごまかしのない誠実な書き方になっていることを言い添えておく．ゲーデルの論文の日本語への訳文がパラグラフごとに網掛けで提示されて，それに著者の解説が続く，という形式になっていて，読み進むと教会のバイブル・クラスに出席しているような厳粛な気分になってくる．

7.　Reale und ideale Mathematik

⟦田中⟧ の『原論文第 2 節 (その 1)』,『原論文第 2 節 (その 2)』 の各々の章の初めには，イデアールな世界／レアールな世界，イデアールな数学／レアールな数学という対比をあらわす図式が挿入されていて，このイデアールとレアールについての説明がなされている．

イデアールとレアールという言葉は，英語の対応する単語と同じスペルで意味もほとんど等しいドイツ語の形容詞 ideal と real のカタカナ読みのようである．この 2 つの形容詞を用いた議論は，たとえば [Hilbert[15)]], [Hilbert[16)]] などに見ることができるが，これらの論文でヒルベルトが real/ideal という形容詞の対を使って表現しているのは，⟦林・八杉⟧ の表現を借りると，むしろ「可解性の思想」である．つまり，強い ideal な数学でなされた非構成的な証明により得られた定理は必ず，この強い数学が，その (一種の) conservative extension となっているような sub-theory としての real な数学で，構成的な言葉で証明しなおすことができる，というような信念と関連している[19]．このことは，もちろん強い理論の無矛盾性を弱い理論の無矛盾性で保証できるということでもあるので，その意味では超数学での無矛盾性証明による数学の基礎の研究とも関連があり，[Hilbert[15)]] や [Hilbert[16)]] でも，数学の基礎とその無矛盾性証明に関する議論とも微妙に交錯した書き方になっている．

しかも，ヒルベルト自身のこれらの言葉の使い方では，記号列などの real な個々のオブジェクトについては論じているが，die reale Welt あるいは die reale Mathematik というようなとらえ方はしていないように思える．

一方，ゲーデルの不完全性定理がすでに前提になっている我々の持つことのできる世界像としては，⟦田中⟧ での「イデアールな世界／レアールな世界」による説明は 1 つの自然な見方を提示している，と言っていいかもしれない．しかし，これがゲーデル自身の (たとえば彼が不完全性定理を証明した時点での) 世界像と考えてもいいかどうか，については，簡単には断言できないように思える[20]．

ところが，⟦田中⟧ では，この二分律を表現している図式にゲーデルと思われる人物が望遠鏡で「イデアールな世界」をあらわしている雲をながめているイラストが添えられており，41 ページではゲーデルは同様な図式の「イデアールな世界」の雲 (この雲の中にはここでは「レアールな世界」の暗雲のコピーの黒雲が埋め込まれている) の中から下界の「レアールな世界」をながめている．しかも，69 ページにある，イデアールな数学の雲の中の Bew(...) (Beweisbarkeitsprädikat) と証明可能性の対応の柱体の中をゲーデル (?) が落下傘をつけて降りているという絵には首をかしげざるを得ない．

イラストについては目をつぶることにすべきかもしれないが， 評者が問題としているのは，(ゲーデルの

19 この ideal/real という用語と，ヒルベルトの可解性の思想の関係については，たとえば，Stanford Encyclopedia of Philosophy に含まれている [Zach[36)]] の分析も参照されたい．

20 これに関しては，以下の 9. でのゲーデルのプラトニズムに関する議論も参照されたい．

不完全性定理がまだ夢想だにされていなかった時点での) ヒルベルトの「可解性」の思想ないし信念に由来する，と思われる ideal/real という表現をわざわざドイツ語風の発音のカタカナ語になおし，それを何の註釈もなくゲーデルの不完全性定理の説明で使っている，という点である．

この数学史に由来するコノーテーションをちらつかせるような言葉の使い方と，それでいて数学史や数学思想，数学思想史に対する考察や思慮への努力が十分にはらわれていないように見えることのアンバランストな組合せは，⟦田中⟧ 以外の他の著者による著書でも何度も見たことがあるような気がする．このようなアンバランスは著者の知性の躓きを示唆するようにも見え，そのためにグロテスクな印象を受ける．さらに，ここには，6 節で言った「原典を読んで理解することに挫折した場合」の人たちの陥る可能性のある，ある種の衒学趣味のお手本のようなものが示されてさえいるように思える．

いずれにしても，ここでの書き方は，状況の歴史的な把握にも，数学的な把握にも不正確さを残すものになっているし，色々な意味での読者の誤解を招きやすいものであるとしか思えないのである．

8. 不完全性定理と初等的数学

第 2 不完全性定理の主張するところにもかかわらず，拡張された有限の立場からのペアノ算術の無矛盾性の証明が複数知られている．これについては，⟦林・八杉⟧ の第 II 部 6.2 で触れられられていて，そこでは，ゲーデルの [Gödel[8)]] が引用されている．

ゲーデルは，このもともとはガベルスベルガー速記法で書かれた講演の原稿 [Gödel[8)]] の結語で，これらの無矛盾性証明のうち，(ゲーデル自身による) 高階関数によるものと，(Genzen による) 超限順序数によるものについては，より明確な基礎 (konkretere Basis) への帰着，とよべるものになっていることを述べた後，

p) Auf jeden Fall scheint mir, daß die erkenntnistheoretische Bedeutung, im Sinn einer besseren Fundierung, dadurch daß sie ⟦die verschiedenen Systeme⟧ nicht in der finiten Zahlentheorie enthalten sind, sehr vermindert wird. ⟦Davon⟧ ganz unbeschadet ⟦ist⟧ die mathematische Bedeutung dieser Untersuchung.

— [Gödel[8)]]

と主張している (文中の ⟦· · ·⟧ は全集の編集者らによる補筆である)．この表明は，この引用文の前の文脈と繋げて読むと，「これらの矛盾性証明の認識論的な意味がない」，と言っているわけではなくて，有限的な数論に諸体系が帰着できるという意味で，ヒルベルトの計画が肯定的に実現できていたと仮定したときに比べて，哲学的なインパクトは非常に低減したものになっているが，そのことによってこれらの無矛盾性証明の研究の数学的重要性がそこなわれるわけではない，と言っていて，むしろ「数学的重要性」を強調した主張になっていることがわかる．

しかし，⟦林・八杉⟧ では，解説者／翻訳者らは，ここでの文脈を「これらの矛盾性証明の認識論的な意味がない」に近い読み方で解釈してしまっているようである:

q) 1938 年の講義ではこの期待[21]も後退しているように見える． — ⟦林・八杉⟧, 第 II 部, 6.2

これは解説者／翻訳者ら自身の思想の反映なのかもしれないが，ひょっとすると，単に上の引用文 p) の直前にある Konjunktiv (接続法) で書かれている部分を読み違えただけだったのかもしれない[22]．

一方 ⟦田中⟧ では，著者は無矛盾性証明については一言も触れていない．この姿勢は，⟦田中⟧ での Paris-Harrington の定理など，ペアノ算術から独立だが (集合論では) 正しいことが証明できる数学的な命題に関する結果の評価にも影響を与えているように思える．⟦田中⟧ では，Paris-Harrington の定理について，

r) ゲーデル以降，数学的に自然な意味をもつ算術命

[21] [評者註]: 「数学理論をより堅固だと皆が納得する基礎に還元することができることの期待」のこと — ここでも ⟦林・八杉⟧ では 4. で指摘した「皆が納得する基礎」という誤訳が足を引っ張っているように見える．

[22] ちなみに ⟦林・八杉⟧ には，表現の不自然さが気になって原典にあたってみるとそれが (おそらくは意図的な) 誤訳になっている，という箇所が少なからずある (たとえば，本稿第 2 節の終りに書いた指摘を参照)．また誤訳というより表記の問題というべきかもしれないが，„Modul“ が「モズル」という怪獣の名前のようなカタカナ表記になっているのは非常に気になる．ただし，これは明治初期の「ポトガラヒー」や，昭和中期まで使われていた「ビルジング」のような，日本語の歴史的カタカナ使いに属す表現なのかもしれず，高等数学を日本語で勉強していない評者の無知をさらけ出しているだけなのかもしれないが．

題で，ペアノ算術などから独立になるものをみつけることが懸案でしたが，パリスとハーリントンが 1977 年にその最初の例を与えました．これは，ラムジーの定理を少し変形させたものです．
— 〚田中〛,『補遺』, A.3

と書かれている．これは，Paris と Harrington がこの定理を証明した 1970 年代後半の視点での評価と言えるだろうが，現代から見たときには，もう少し別の角度からの評価がより自然ではないだろうか．

現在，広い意味での科学で応用されている数学のほとんどすべてが，ペアノ算術の conservative extension の中に展開できることが，逆数学の研究の進歩によって見えてきている[23,24]．

このことと，ある意味での無矛盾性証明がペアノ算術に対して存在することを合せて考えると，どのような数学理論がペアノ算術の無矛盾性の強さの枠を越える前提を必要とするのかを明らかにしてゆくことの意義が見えてくる．この視点からは，Paris-Harington の定理での命題をはじめとする，ペアノ算術上で独立だが集合論では容易に証明できるような一連の数学的命題は，そのような考察に関連する指標のひとつとしてみることもできるはずなのである．

不完全性定理現象のもっとも鮮烈な体現は，ペアノ算術上の独立性であるより，むしろ全数学を包含していると考えられる集合論の上での独立性であろう[25]．

ペアノ算術上の独立な命題が，多くの場合まだ，集合論で成り立つかどうか，という真偽の判定を持っているのに対し，集合論の上で独立な命題はすでに引力圏を越えていて，もはやその真偽について普通には議論できないものになっている．しかし，ゲーデルは [Gödel[10)]] で，後に 9. で議論することになるようなプラトニズムの立場から，そのような命題についても，(数学的な意味のあるものについては) その真偽を判定する手立てがある，と主張している．21 世紀の初め前後から，まさにこのような視点から議論のできるような数学的な結果が得られはじめていて，これに呼応する数学の哲学での議論も活発になってきている (たとえば，[Arrigoni-Friedman[1)]], [Koellner-Woodin[19)]] などを参照．)．

〚林・八杉〛でも〚田中〛でも，このような状況については，連続体仮説の集合論の上での独立性のような古典的な結果も含めて，全く何も触れられてはいない．

〚田中〛の，A.3 は，Harvey Friedman による，その証明の成立に巨大基数の存在が必要となるような有限組合せ論的な命題に関する研究結果などが，仄めかされている，と思われる，次のような文章で終っている:

s) フリードマンはクルスカルの定理 (1982) や，グラフ理論のロバートソン-シーモアの定理 (1987) が 2 階算術のある体系から独立であることを示し，さらに集合論に対しても様々の独立命題を発見しています ([5][6] を参照). — 〚田中〛,『補遺』, A.3

フリードマンの「集合論に対しての様々の独立命題」の結果の意義は，一見ごく普通に見える有限組合せ論的な命題で，その成立に強い集合論的な仮定が必要になるようなものの発見，という点にあり，集合論から独立な数学的な命題ということだけなら，連続体仮説をはじめとして，このフリードマンのこの結果よりずっと前から多くの興味深い結果が得られてきているし，強い集合論的な仮定が関連した結果にも，射影的決定性など “普通の” 数学にインパクトを与える可能性を持つ命題の独立性も多く知られているのである．

しかし，このような集合論での独立命題に関する研究についての全般的な言及が全くないところで書かれている[26]この最後のリマークは，予備知識のない読者には，「フリードマン」が集合論に対して独立命題を発見した (定冠詞つきの) 最初の人である，とさえ読めてしまうのではないかと危惧するものである．

9. ω-無矛盾性とロッサーの定理

これまでに挙げた例のいくつかでも見えてくるように，「ゲーデル」が著者名／書名に入っていることに比して，これらの二冊の解説者／翻訳者，著者は，ゲーデル自身の思想的立場についての，ある種の無関心が感じられる．このことは，以下で触れておきたいと思っている第 1 不完全性定理での ω-無矛盾性と Rosser による第 1 不完全性定理の拡張に関する扱いでも顕著に

[23] これについては，引用文 g) に続く議論も参照されたい．

[24] この事実を，短絡的に「ペアノ算術の conservative extension の中で展開できる数学だけが重要である」というような主張と取りちがえてしまう人が出てくる前に，これがそのような主張とはまったく関係がないことを注意しておかなくてはいけないだろう．

[25] 脚注 3 の前後のコメントも参照されたい．

[26] たとえば，コーエンの名前もソロヴェイの名前も〚田中〛の索引には見出せない．

現れているように思える．

〚林・八杉〛や〚田中〛でも注意されているように，第 1 不完全性定理のゲーデルのオリジナルな証明では，ペアノの公理系や，この公理系を拡張する確定的 (再帰的) な理論 T の不完全性の証明に，ω-無矛盾性の仮定が必要なものとなっている．

念のため復習しておくと，自然数の全体を underlying set とするカノニカルな構造が想定するモデルとなっているような理論 T が ω-無矛盾である，とは，

> 自由変数を 1 つ持つ任意の論理式 $\varphi(x)$ について，もし $\varphi(\underline{0}), \varphi(\underline{1}), \ldots$ がすべて T から証明できれば，$\exists x \neg\varphi(x)$ は T から証明できない

ことである．ただし，$\underline{0}, \underline{1}, \ldots$ は，数 $0, 1, \ldots$ をあらわす T の言語での項である[27]．

ゲーデルの証明の後，ロッサーは [Rosser[23)]] でゲーデルの証明を修正して，無矛盾性の仮定だけから，第 1 不完全性定理が証明できることを示している．しかし，ゲーデルはこの結果をそれほど評価していなかったように思える．ゲーデル全集 [Gödel[13)]] でロッサーの定理についての，ゲーデルの単なる文献の引用を越える言及が確認できるのは，未発表の [Gödel[12)]] にある次のような脚注のみである:

t) This hypothesis[28] can be replaced by consistency (as shown by Rosser in ...), but the undecidable propositions then have a slightly more complicated structure. Moreover, the hypothesis must be added that the axioms imply the primitive properties of addition, multiplication and $<$. — [Gödel[12)]]

〚林・八杉〛の解説者／翻訳者らは，第 II 部 7.5 の終りで，

u) ω-無矛盾という条件は，ゲーデルの論文以後，ほとんど使われることはなかった．これは過剰に強い前提であり，また，便宜的と言われても仕方がないものだったのである．それにもかかわらず，この点はほとんど問題にされることがなかった．その理由は，P の無矛盾性を疑う人がほとんどいなかったからだろう． —〚林・八杉〛, 第 II 部, 7.5

と書いているが，それに続くゲーデルの定理とロッサーの定理についての評価は，上に引用したゲーデルの表明に準じるものである．

〚田中〛では，ロッサーの定理の証明のスケッチも与えられおり，(ロッサーの拡張を含まない) ゲーデルの第 1 不完全性定理と言うときに現代で普通に用いられる ω-無矛盾性を弱めた Σ_1-健全性などについての事柄を含む現代的な視点から見た不完全性定理についても『補遺』の章で触れられている．しかし，ここでは，「数学」についてのみ語られていて，関連する “哲学的” な考察ないし評価については何も書かれていない．

以上で見たように〚林・八杉〛でも〚田中〛でも，ゲーデルのロッサーの定理に対する姿勢については分析的なコメントは何もない，と言っていいだろう．このことをわざわざ確認したのは，次のような事情からである．

ヒルベルトの有限の立場で可能な議論は PRA での証明に対応するものである，という説があり，この説は割合広く認められているようである[29]．しかし，これは「PRA の言語で記述可能な表明がすべて有限の立場で relevant なものになる」，という主張ではないし，後者の主張自身，全く正しくないように思える．そして，上に書いた ω-無矛盾性の定義を思い出すと，「数論の理論 T が ω-無矛盾なら，…」という形の表明は，有限の立場では扱いえないものになっていると判断するのが妥当に思える．

この判断が正しいとすると，ヒルベルト計画での数学理論の完全性に対しての否定的な最終通告を与えているのは，ゲーデルの第 1 不完全性定理ではなく，拡張されたゲーデル・ロッサーの第 1 不完全性定理であることになる．

ロッサーの拡張の重要性に関する，これとは少し異なる視点からの指摘としては次のようのなものもある: T が十分に強い[30] ω-無矛盾な (具体的に与えられて

[27] たとえば，集合論などのように，その想定されるカノニカルなモデルの underlying set が自然数の全体ではないような理論 T に対しても，自然数の全体をあらわす述語 $N(\cdot)$ や，その上の自然数の基本演算が，そこで定義できるなら，上の ω-無矛盾性の定義での “$\exists x \neg\varphi(x)$ は T から証明できない” を，“$\exists x(N(x) \wedge \neg\varphi(x))$ は T から証明できない” で置き換えることで，その ω-無矛盾性を考えることが可能である．

[28] [評者註]: ω-無矛盾性のこと．

[29] 〚林・八杉〛には，このことに関する少し踏み込んだ言及もある (第 II 部, 5.11, 6.5 など)．

[30] たとえば T がペアノ算術を含んでいれば十分であるが，

いる) 理論だとすると，拡張された第 2 不完全性定理により，$T' = T \cup \{\neg consis(T)\}$ は無矛盾だが，ω-無矛盾ではありえない (T の矛盾の証明のゲーデル数が ω-無矛盾性の反例になってしまう[31])．したがって，ゲーデルのオリジナルな形の第 1 不完全性定理は T' にはもはや適用できなくなってしまう．

プラトニストとしてのゲーデル，特に晩年のゲーデルについての論考が数学の哲学の分野で多くなされている (たとえば，[戸田山[31)]] とそこに引用されている文献を参照)．

そのような議論で多く注目されているのは，[Gödel [10)]] やその 1983 年の補筆版また，[Gödel[11)]] などであるが，ゲーデルの他のもっと早い時期の数学的内容が中心となっている仕事の中にも，彼のプラトニスティックな数学の捉え方が様々な形で反映されている可能性がある．

ロッサーの仕事をゲーデルがそれほど評価していなかったように見えることは，上の考察とあわせて考えるとき，ゲーデルの比較的早い段階でのプラトニスティックな立ち位置の反映と解釈することができるのではないかとも思われるのである．

ただし，このことをゲーデルの全論文にあたって再確認することは，ゲーデルの論文数がそれほど大きくないとしても，一筋縄ではゆかない難しい仕事になるだろう．プラトニスティックな思想背景の疑われる表明があった場合，それが，(α) そのような思想背景を反映しているのか，(β) 読者の理解のためにそのような書き方をしたのか，あるいはまた，(γ) 数学的なアイデアを前に進めるためのその場かぎりのプラグマティックなプラトニズムとしてそれが採用されているのか[32]，は区別をすることが非常に難しいはずだからである．

このような困難は，たとえばゲーデルが [Gödel[9)]] でとっている可能性のあるプラトニスティックな立場に関する分析を試みようとするとき，明らかになるだろう．

[Gödel[9)]] では，ZF + $V = L$ の ZF 上の相対的無矛盾性が証明されており，このことから，選択公理の ZF 上の相対的無矛盾性や，一般連続体仮説の ZF 上の相対的無矛盾性が証明されている．この相対的無矛盾性の証明は，厳格な有限の立場で行なうことのできるもので，そのことは，普通の数学の書き方になっているゲーデルの証明で現れる，1 階の論理の証明の体系での，ZFC + $V = L$ からの個々の命題 φ の証明を，(有限の立場で許されるような操作による変更によって) φ^L の ZF からの証明に書き直すことができることを示すことによって見ることができる[33]．しかし [Gödel[9)]] の記述の仕方を見ると，ゲーデルはこのことをあまり気にかけていないように見える．ここにゲーデルのプラトニスティックな立ち位置から来るバイアスがかかっていることが想像できるわけである．

このモノグラフより前に発表されたゲーデルの論文では，相対的無矛盾性の証明は，Löwenheim-Skolem の定理と Mostowski 崩壊を用いて Condensation Lemma を証明する，という現代の教科書によくみるような方法に近い形でなされているが，[Gödel[9)]] では，基本関数に関する closure property を用いて地道に計算を重ねるという，R. Jensen の fine structure の理論の先駆と言えるような方法に書きなおされている．この書きかえは，1 つには数理論理学の知識をそれほど持たない読者に配慮してのことだろう．しかし，このような配慮がなされていることは，まさに (β) のタイプのプラトニスティックな記述がなされる素地も十分に認められる，ということでもある．また，ここでの議論は，当時の集合論の議論のスタンダードと比べて破格に複雑だったので，(γ) のタイプの理由からのプラトニスティックな記述が紛れ込んでくる素地も十分にあると考えられる．

このような状況で，ここでの (α) のタイプの本来のプラトニズムが何なのかを分析するのは至難の技となるしかなさそうである．

先に述べたように，〚林・八杉〛も〚田中〛もこのような点については踏み込んだ議論をしようとはしていないのであるが，上で挙げた例などを考えてみると，そのこと自体は，まあ賢明な選択だったとは言えるかもしれない．しかし，ゲーデルの数学思想の数学，数理論理学に対して持ちうる意味，彼の数学思想と完全性定理，不完全性定理との関係など，もっと考えてみる価値の十分にあるテーマがここにはまだいくつも残ってい

もう少し正確には〚田中〛の補遺，A.3 での拡張された第 2 不完全性定理での条件が成り立っていること，という条件を考えればよい．

31 この事実は，[Gödel[6)]] で既に示されている (〚田中〛,『原論文第 2 節 (その 3)』, [2-52] を参照)．

32 この (γ) の種類のプラトニズムについては，[Bernays[2)]] に優れた解説がある．

33 評者は，卒業論文 [Fuchino[5)]] で，このことがゲンツェンの体系 LK の上で実行可能であることを確認している．

るようにも思えるし，そのようなことが，〚林・八杉〛や〚田中〛で少しも触れられることがなかったのは，いささか残念にも思える[34].

10. 不完全性定理と数学

終りに，〚林・八杉〛でも〚田中〛でも十分に論じられていないと思われるもう一つの問題について，議論や考察の糸口を示唆しておきたい[35].

不完全性定理はその後の数学に決定的な影響を与えたと言われる．確かに，通常の集合論 (ツェルメロ・フレンケルの集合論 ZFC) や，それを拡張する体系などからの，数学的命題の証明不可能性や独立性の証明を含む数学の可能性は，不完全性定理によってはじめて理解されるものである．そして，現代の集合論やその応用の大きな部分は，この数学的命題の証明不可能性や独立性の証明なしには考えられないものになっている．また〚田中〛の s) で引用した文章の前後でも述べられているように，1 階の算術の体系や高階の算術の体系の部分体系からの独立性の研究は，不完全性定理の証明のアイデアや不完全性定理への還元がその証明の基礎になっていることすら多い.

しかし，旧来の数学の現代への継承では，不完全性定理はほとんど何の影響も及ぼしていないようにも見えるし，そのような数学を研究している数学者が，不完全性定理について，まったく気にかけていなかったり，この定理やその証明の細部を知らなかったりすることさえ珍しくない.

〚林・八杉〛の第 II 部 6.5 は次のように結ばれている:

v) つまり，決定不能な命題は存在するものの，数学者の多くが興味を持つような数体系の構造については，決定不能なものは比較的稀なのかもしれないのである．もちろん，これには，「数学者の多くが興味を持つ」という嗜好に関わるような主観的条件が入っている．しかし，この条件を「ある種の代数的命題」という条件に変えることができれば，この主張は，案外自然なものかもしれない．いずれにせよ，筆者たちには，数学基礎論に残された大きな問題は，数学の不完全性を声高に叫ぶことではなく，「ゲーデルの不完全性定理にもかかわらず，なぜ現実の数学はこうも完全なのか」という逆説的な経験的事実への問いかけであるように思えてならない.

— 〚林・八杉〛, 第 II 部 6.4 の終り.

たとえば，初等幾何に制限した数学については，そのような数学が完全に見えることに対しては，この「初等幾何」ということの範囲をうまく設定すると，本当に完全な公理系で，そこでの定理の決定の効率的なアルゴリズムさえ存在するものが作れるから，という理由があるわけなので[36]，もう少し広い範囲の数学に対しても，見かけの完全性に対する体系的な説明ができる望みはゼロではないかもしれない.

しかし，もっと広範囲にわたる数学の見かけ上の完全性 (つまりどんな命題も証明できるか反駁できるかのどちらかであるように思える状況のこと) に関しては，上の引用の最初のところで述べられているような，“嗜好の問題” としての「数学」の範囲についての調節が常に無意識に行なわれている，ということが大きなファクターになっているのではないかと考えられる．つまり，前に述べたような，我々の視野の認識に盲点が黒い点として存在しないのと類似のメカニズムが働いていると言えるのではないだろうか: 実際には，コーエンによって 1960 年代に発明されて，その後，手法としての洗練を重ねている強制法や，それより前のゲーデルの [Gödel[9)]] にその起源を持つ内部モデルの手法などにより，多くの “数学的” な命題の，数学，あるいは集合論からの独立の証明が得られてきているわけであるが，それらの命題の独立性が証明されると，即座に “これは集合論の問題であり，数学の問題でない”，という評価が与えられて，旧来からの数学では問題にされなくなる，という対応のパターンが繰り返されてきている，ということが，この数学の見かけ上の完全性の実体なのではないだろうか.

旧来の数学の現代への継承で不完全性定理が問題となることがほとんどないことのもう一つの理由に，ブルバキが，数学を，置換公理の含まれないツェルメロの集合論で展開されるもの，として規定したことがあ

[34] 〚田中〛は数学的な内容の理解に特化しているので，このようなテーマを取り上げることには少し無理があったかもしれないが，解説者／翻訳者らの哲学的指向と思われるものとの非整合性に目をつぶることにすれば，ここで言ったようなテーマは十分に〚林・八杉〛のスコープには入っていたと思われる.

[35] この節で述べることは，さらに詳細な議論が必要な重要性を持つものと信じるが，ここでは「議論や考察の糸口の示唆」にとどめ，関連のより本格的な議論は別の機会にゆずることにする.

[36] たとえば [Tarski[30)]] を参照.

げられるだろう[37]．この結果として，それをフルに展開するためにツェルメロ・フレンケルの集合論が必要となる超限帰納法[38]は，ブルバキの強い影響下にあった西欧諸国ではスタンダードな数学から追放されてしまった．このため，超限帰納法を用いる数学の研究が行なわれてきたのは，ブルバキの影響下になかった東欧や，かつての東欧の数学者の移住先であったアメリカやイスラエルなどのごく一部の場所に限定されてしまっていた．

もちろん，ツェルメロの集合論で展開される数学といえども，不完全性定理現象と無関係ではありえないわけだが，ここでは，ツェルメロ・フレンケルの集合論で超限帰納法をフルに活用して議論をするときのようには，すぐに独立性命題の壁につきあたってしまう，という実感を持たなくてすむため，今日に至るまで不完全性定理を意識せずに数学の研究が行なえてきた，という説明もできるのではないか．

上記のように，集合論の研究者の多くは，ツェルメロ・フレンケルの集合論で超限帰納法をフルに活用して議論すると，すぐに独立性命題の壁につきあたってしまう，という感覚を強く持っていると思う．しかし，シェラハは，この常識の壁を打ち破り，[Shelah[24)]] での結果や，それに続く研究で，超限帰納法をフルに活用して，しかもツェルメロ・フレンケルの集合論の範囲内で構築できる数学に関する大きな成果をあげてきている．

旧来の数学が，不完全性定理とその影響下で生れた数学とは没交渉に (主に) ツェルメロ集合論内での安全な水域での議論を続けているのとは対照的に，シェラハのこの研究では，独立性証明によって得られた知見や，そこで開発されたテクニックを最大限に活用して，ツェルメロ・フレンケルの集合論で行なうことのできる議論の可能性ぎりぎりのところでの証明を展開している．

その意味で，シェラハがここで構築している理論は，不完全性定理以降の数学の可能な姿の一つを示唆するものになっている，と言えるのではないだろうか．

11. 結語

〚林・八杉〛と〚田中〛は，ともにゲーデルの不完全性定理に関する，たいへんに個性的で，本格的な書物である．二冊の性格は大きく異なっているため，逆に，この二冊をともに批判的に (つまり自分で考えながら) 完読することで，ゲーデルの不完全性定理に対する，より大きな視野が開けることが期待できるであろう．

しかし，この二冊を合せて考えても，不完全性定理やそれに関連する事柄で，カバーしきれていなかったり，もっと別の観点からも考察すべきであるような事項も多く残っているように思える．

両方の書物，特に〚林・八杉〛に強く感じられる現代の数学やその意義に対する否定的な発言も気になる．〚田中〛では，旧来のタイプの現代数学に対する直接的な否定的発言は含まれていないように思われるが，10. で述べたような不完全性定理以降の (たとえば独立性命題の議論を介して) 不完全性定理と関連するような数学については，それに対する言及を範疇的に避けることで，否定的としか解釈のしようのない強い意図が感じられるものになっている．

また，これは一般書の範疇からは外れてしまうかもしれないが，もっと純粋に現代の数学の視点から数学の定理としての不完全性定理やその現代における様々な改良や関連する他の結果などをエレガントに細説する日本語の本があってもいいようにも思える．

そのようなことも含めて，これらの二冊の批判的な補足ともなるような，第三，第四の不完全性定理に関する本格的な書籍が，近い将来に書かれることを期待するものである．

[37] これに関連した分析や批判については [Mathias[21)]] を参照されたい

[38] この点に関しては [Mathias[22)]] を参照されたい．

参照文献

[1] Tatiana Arrigoni and Sy D. Friedman, Foundational implications of the Inner Model Hypothesis, to appear in Annals of Pure and Applied Logic.

[2] Paul Bernays, Sur le platonisme dans les mathématiques, L'Enseignement Mathématique, Vol.34 (1935), 52–69.

[3] Alonzo Church, Introduction to Mathematical Logic, volume I, Princeton University Press, (1956).

[4] Solomon Feferman, The Impact of the Incompleteness Theorems on Mathematics, Notices of the AMS Vol.53, No.4, (2006), 434–439.

[5] Sakaé Fuchino, On Gödel's consistency proof of AC and GCH, bachelor thesis (1979).

[6] Kurt Gödel, Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, I. Monatshefte für Mathematik und Physik 38

(1931), 173–198.

[7] Kurt Gödel, Über Vollständigkeit und Widerspruchsfreiheit, Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums 3, (1932) 12–13.

[8] Kurt Gödel, A note (originally written in Gabelsberger stenography) for a lecture in Edgar Zilsel's seminar, in: [Gödel[13)]], Vol.III.

[9] Kurt Gödel, The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory. Annals of Mathematics Studies #3. Princeton, Princeton University Press (1940).

[10] Kurt Gödel, What is Cantor's Continuum Problem?, The American Mathematical Monthly Vol.54, No.9 (1947), 515–525.

[11] Kurt Gödel, Is mathematics syntax of language?, in [Gödel[13)]], Vol.III (1953/9).

[12] Kurt Gödel, Some basic theorems on the foundations of mathematics and their implications, unpublished lecture note of twenty-fifth Josiah Willard Gibbs Lecture, in: [Gödel[13)]] Vol.III, (1951).

[13] Kurt Gödel, Solomon Feferman (ed.), Kurt Gödel Collected works, Vol.I, Oxford University Press (1986).

[14] 林晋,「不完全性定理」 K. ゲーデル著、林晋・八杉満利子訳と解説、平成 18 年 9 月 15 日、岩波書店、岩波文庫正誤表
http://www.shayashi.jp/correction-jp.html

[15] David Hilbert, Über das Unendliche, Mathematische Annalen 95 (1926), 161–90.

[16] David Hilbert, Die Grundlagen der Mathematik, Abhandlungen aus dem Seminar der Hamburgischen Universität 6 (1928), 65-85.

[17] 廣瀬健 横田一正, ゲーデルの世界 完全性定理と不完全性定理 海鳴社 (1985).

[18] Stephen Cole Kleene, Introduction to Metamathematics, D.van Nostrand Company, Inc., (1952).

[19] Peter Koellner and Hugh Woodin, Incompatible Ω -Complete Theories, Journal of Symbolic Logic, Vol.74, No.4, (2009), 1155–1170.

[20] Kenneth Kunen, Set Theory – An Introduction To Independence Proofs, North Holland (1983). (日本語訳: ケネス キューネン (著) 藤田 博司 (訳), 集合論 – 独立性証明への案内, 日本評論社 (2008).

[21] Adrian Mathias, The Ignorance of Bourbaki, Mathematical Intelligencer 14, No.3 (1992), 4–13.

[22] Adrian Mathias, Slim Models of Zermelo Set Theory, The Journal of Symbolic Logic, Vol. 66, No. 2 (2001), 487–496.

[23] Barkley Rosser, Extensions of Some Theorems of Gödel and Church, The Journal of Symbolic Logic, Vol.1, No.3 (1936), 87–91.

[24] Saharon Shelah, Cardinal Arithmetic, Vol. 29 of Oxford Logic Guides, Clarendon Press (1994).

[25] Joseph R. Shoenfield, Mathemaitcal Logic, Addison-Wesley Publishing Company, (1967).

[26] Stephen G. Simpson, Partial Realizations of Hilbert's Program, The Journal of Symbolic Logic Vol.53, No.2 (1988), 349–363.

[27] Gaishi Takeuti, Two Applications of Logic to Mathematics, Kanô Memorial Lectures, Vol.3, Publications of the Mathematical Society of Japan, No.13, Iwanami Shoten Publishers, Tokyo; Princeton University Press, Princeton, N.J., (1978).

[28] 田中一之, 逆数学と 2 階算術, 河合文化教育研究所 (1997/08).

[29] 田中一之 (編), ゲーデルと 20 世紀の 論理学 (ロジック), 東京大学出版会, (2006-2007).

[30] Alfred Tarski, What is elementary geometry?, in: Leon Henkin, Patrick Suppes and Alfred Tarski (ed.), Proceedings of an International Symposium held at the University of California, Berkeley, December 26, 1957 – January 4, 1958, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Amsterdam: North-Holland (1959), 16–29.

[31] 戸田山和久, ゲーデルのプラトニズムと数学的直観, in: [田中[29)]], 第 4 巻 (2007).

[32] Hermann Weyl, Philosophy of Mathematics and Natural Science, 2nd edition, Princeton University Press, (1950): An expanded English version of „Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft“, München, Leibniz Verlag (1927).

[33] (英語版) Wikipedia (16 July 2012 at 23:39), Kawaii, http://en.wikipedia.org/wiki/Kawaii

[34] (ドイツ語版) Wikipedia (18. Juni 2012 um 17:18), Kawaii, http://de.wikipedia.org/wiki/Kawaii

[35] (ブランス語版) Wikipedia (le 2 mars 2012 à 12:14), Kawaii, http://fr.wikipedia.org/wiki/Kawaii

[36] Richard Zach, Hilbert's Program, The Stanford Encyclopedia of Philosophy, Edward N. Zalta (ed.), (2003).
http://plato.stanford.edu/entries/hilbert-program/