ゲーデルの不完全性定理と無限の研究としての集合論

淵野 昌 (Sakaé Fuchino)

神戸大学大学院 情報システム学研究科

fuchino@diamond.kobe-u.ac.jp

http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/

(May 17, 2010 (02:02 JST) version)

（於）神戸大学生活共同組合
和風レストラン さくら

サイエンス・カフェー神戸

May 15, 2010

This presentation is typeset by LaTeX with beamer class.

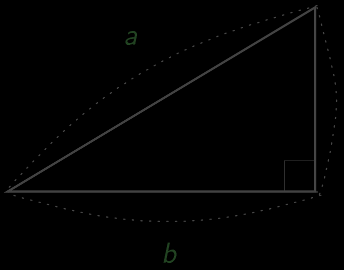
数学と無限 — ピタゴラスの定理

- 数学では無限が重要な役割をはたすことが多い.

このことの，初等的な数学での例を，いくつか見てみる.

定理 1 (ピタゴラスの定理 (三平方の定理), 紀元前 6 世紀ごろ ?)

直角三角形の斜辺の長さの二乗は他の辺の長さの二乗の和に等しい.



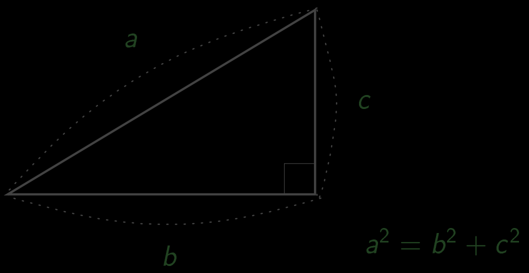
$$a^2 = b^2 + c^2$$

- 数学では無限が重要な役割をはたすことが多い.

このことの，初等的な数学での例を，いくつか見てみる.

定理 1 (ピタゴラスの定理 (三平方の定理), 紀元前 6 世紀ころ ?)

直角三角形の斜辺の長さの二乗は他の辺の長さの二乗の和に等しい.

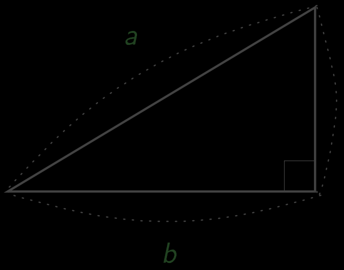


- 数学では無限が重要な役割をはたすことが多い.

このことの，初等的な数学での例を，いくつか見てみる.

定理 1 (ピタゴラスの定理 (三平方の定理), 紀元前 6 世紀ごろ ?)

直角三角形の斜辺の長さの二乗は他の辺の長さの二乗の和に等しい.



$$a^2 = b^2 + c^2$$

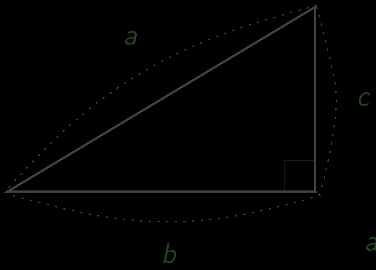
数学と無限 — ピタゴラスの定理

- 数学では無限が重要な役割をはたすことが多い.

このことの, 初等的な数学での例を, いくつか見てみる.

定理 1 (ピタゴラスの定理 (三平方の定理), 紀元前 6 世紀ごろ ?)

直角三角形の斜辺の長さの二乗は他の辺の長さの二乗の和に等しい.



$$a^2 = b^2 + c^2$$

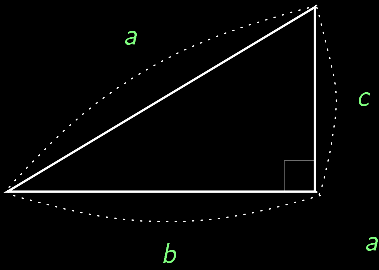
数学と無限 — ピタゴラスの定理

- 数学では無限が重要な役割をはたすことが多い.

このことの, 初等的な数学での例を, いくつか見てみる.

定理 1 (ピタゴラスの定理 (三平方の定理), 紀元前 6 世紀ごろ ?)

直角三角形の斜辺の長さの二乗は他の辺の長さの二乗の和に等しい.



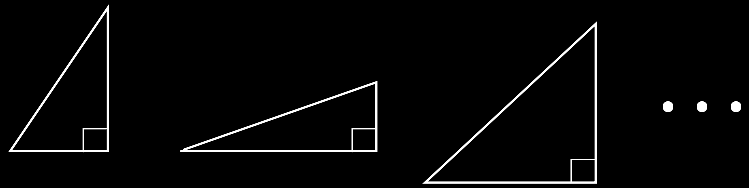
$$a^2 = b^2 + c^2$$

- 数学では無限が重要な役割をはたすことが多い.

このことの, 初等的な数学での例を, いくつか見てみる.

定理 1 (ピタゴラスの定理 (三平方の定理), 紀元前 6 世紀ごろ ?)

直角三角形の斜辺の長さの二乗は他の辺の長さの二乗の和に等しい.



互いに相似でない直角三角形は 無限に存在する !!

ピタゴラスの定理は, それらのすべてに対して, $a^2 = b^2 + c^2$ が成り立つことを主張している.

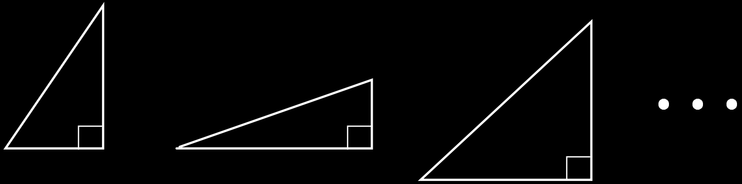
数学と無限 — ピタゴラスの定理

- 数学では無限が重要な役割をはたすことが多い.

このことの, 初等的な数学での例を, いくつか見てみる.

定理 1 (ピタゴラスの定理 (三平方の定理), 紀元前 6 世紀ごろ ?)

直角三角形の斜辺の長さの二乗は他の辺の長さの二乗の和に等しい.



互いに相似でない直角三角形は 無限に存在する !!

ピタゴラスの定理は, それらのすべてに対して, $a^2 = b^2 + c^2$ が成り立つことを主張している.

- 1 より大きい自然数 n（つまり，n は 2, 3, 4, 5, ... のような "きりのいい" 数）が 素数 であるとは，n が 1 と n 自身以外の数で割りきれないこと．
- 2, 3 は素数だが，$4 = 2 \times 2$ は素数でない．5 は素数だが，$6 = 2 \times 3$ は素数でない．
- すべての自然数は素数の積の形に書ける（素因数分解）．たとえば，$125457 = 3 \times 19 \times 31 \times 71$．しかもこの積は順序を除くと一意に決まる．

定理 2 (ユークリッド，紀元前 4 世紀ごろ?)

素数は無限に存在する．

- 上の主張は，数学的には「無限」という言葉を使わずに，次のように表現することもできる:

『どんな自然数 n に対しても，n より大きな素数が存在する』

数学と無限 — ユークリッドの素数存在定理

- 1 より大きい自然数 n（つまり，n は 2, 3, 4, 5, . . . のような "きりのいい" 数）が **素数** であるとは，n が 1 と n 自身以外の数で割りきれないこと.
- 2, 3 は素数だが，$4 = 2 \times 2$ は素数でない． 5 は素数だが，$6 = 2 \times 3$ は素数でない.
- すべての自然数は素数の積の形に書ける（素因数分解）．たとえば，$125457 = 3 \times 19 \times 31 \times 71$. しかもこの積は順序を除くと一意に決まる.

定理 2 (ユークリッド，紀元前 4 世紀ごろ?)

素数は無限に存在する.

- 上の主張は，数学的には「無限」という言葉を使わずに，次のように表現することもできる:

『どんな自然数 n に対しても，n より大きな素数が存在する』

- 1 より大きい自然数 n（つまり，n は 2, 3, 4, 5, . . . のような“きりのいい”数）が **素数** であるとは，n が 1 と n 自身以外の数で割りきれないこと．
- 2, 3 は素数だが，$4 = 2 \times 2$ は素数でない．5 は素数だが，$6 = 2 \times 3$ は素数でない．
- すべての自然数は素数の積の形に書ける（素因数分解）．たとえば，$125457 = 3 \times 19 \times 31 \times 71$．しかもこの積は順序を除くと一意に決まる．

定理 2 (ユークリッド，紀元前 4 世紀ごろ?)

素数は無限に存在する．

- 上の主張は，数学的には「無限」という言葉を使わずに，次のように表現することもできる:

  『どんな自然数 n に対しても，n より大きな素数が存在する』

- 1 より大きい自然数 n（つまり，n は $2, 3, 4, 5, \ldots$ のような“きりのいい”数）が **素数** であるとは，n が 1 と n 自身以外の数で割りきれないこと．
- $2, 3$ は素数だが，$4 = 2 \times 2$ は素数でない．5 は素数だが，$6 = 2 \times 3$ は素数でない．
- すべての自然数は素数の積の形に書ける（素因数分解）．たとえば，$125457 = 3 \times 19 \times 31 \times 71$．しかもこの積は順序を除くと一意に決まる．

定理 2 (ユークリッド，紀元前 4 世紀ごろ?)

素数は無限に存在する．

- 上の主張は，数学的には「無限」という言葉を使わずに，次のように表現することもできる:

『どんな自然数 n に対しても，n より大きな素数が存在する』

数学と無限 — ユークリッドの素数存在定理

- 1 より大きい自然数 n （つまり，n は $2, 3, 4, 5, \ldots$ のような“きりのいい”数）が **素数** であるとは，n が 1 と n 自身以外の数で割りきれないこと．
- $2, 3$ は素数だが，$4 = 2 \times 2$ は素数でない．5 は素数だが，$6 = 2 \times 3$ は素数でない．
- すべての自然数は素数の積の形に書ける（**素因数分解**）．たとえば，$125457 = 3 \times 19 \times 31 \times 71$. しかもこの積は順序を除くと一意に決まる．

定理 2 (ユークリッド，紀元前 4 世紀ごろ?)

素数は無限に存在する．

- 上の主張は，数学的には「無限」という言葉を使わずに，次のように表現することもできる:

『どんな自然数 n に対しても，n より大きな素数が存在する』

- 1 より大きい自然数 n （つまり，n は 2, 3, 4, 5, . . . のような “きりのいい” 数） が 素数 であるとは，n が 1 と n 自身以外の数で割りきれないこと．
- 2, 3 は素数だが，$4 = 2 \times 2$ は素数でない． 5 は素数だが，$6 = 2 \times 3$ は素数でない．
- すべての自然数は素数の積の形に書ける （素因数分解）． たとえば，$125457 = 3 \times 19 \times 31 \times 71$．しかもこの積は順序を除くと一意に決まる．

定理 2 (ユークリッド，紀元前 4 世紀ごろ?)

素数は無限に存在する．

- 上の主張は，数学的には「無限」という言葉を使わずに，次のように表現することもできる:

『どんな自然数 n に対しても，n より大きな素数が存在する』

数学と無限 — ユークリッドの素数存在定理

- 1 より大きい自然数 n （つまり，n は $2, 3, 4, 5, \ldots$ のような“きりのいい”数） が **素数** であるとは，n が 1 と n 自身以外の数で割りきれないこと．
- $2, 3$ は素数だが，$4 = 2 \times 2$ は素数でない． 5 は素数だが，$6 = 2 \times 3$ は素数でない．
- すべての自然数は素数の積の形に書ける （素因数分解）． たとえば，$125457 = 3 \times 19 \times 31 \times 71$. しかもこの積は順序を除くと一意に決まる．

定理 2 (ユークリッド，紀元前 4 世紀ごろ?)

素数は無限に存在する．

- 上の主張は，数学的には「無限」という言葉を使わずに，次のように表現することもできる:

『どんな自然数 n に対しても，n より大きな素数が存在する』

定理 2 (ユークリッド, 紀元前 4 世紀ころ?)

素数は無限に存在する.

証明. 背理法で示す.
定理が成立たないと仮定すると, 素数は有限個しか存在しないから, それらを $p_1, p_2, \ldots, p_n$ とする. ここで,
$q = p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_n + 1$ という数を考える.

q は $p_1, p_2, \ldots, p_n$ のどれで割っても 1 があまる. つまり $p_1, p_2, \ldots, p_n$ のどれで割っても割切れない. したがって, q を素因数分解したとき, そこに現れる素数は $p_1, \ldots, p_n$ のどれとも異なる. これは, 素数が $p_1, \ldots, p_n$ だけだとした仮定に矛盾である.

この矛盾は「素数は有限個しか存在しない」という仮定に起因するのだから, この仮定は正しくない. つまり, 素数は無限個存在する ことが帰結される.

□ (定理 2)

定理 2 (ユークリッド, 紀元前 4 世紀ごろ?)

素数は無限に存在する.

証明. 背理法で示す.
定理が成立たないと仮定すると, 素数は有限個しか存在しないから, それらを $p_1, p_2, \ldots, p_n$ とする. ここで,
$q = p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_n + 1$ という数を考える.

q は $p_1, p_2, \ldots, p_n$ のどれで割っても 1 があまる. つまり $p_1, p_2, \ldots, p_n$ のどれで割っても割切れない. したがって, q を素因数分解したとき, そこに現れる素数は $p_1, \ldots, p_n$ のどれとも異なる. これは, 素数が $p_1, \ldots, p_n$ だけだとした仮定に矛盾である.

この矛盾は「素数は有限個しか存在しない」という仮定に起因するのだから, この仮定は正しくない. つまり, <u>素数は無限個存在する</u> ことが帰結される.

□ (定理 2)

数学と無限 — ユークリッドの素数存在定理 (2)

定理 2 (ユークリッド, 紀元前 4 世紀ごろ?)

素数は無限に存在する.

証明. 背理法で示す.

定理が成立たないと仮定すると, 素数は有限個しか存在しないから, それらを $p_1, p_2, \ldots, p_n$ とする. ここで,
$q = p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_n + 1$ という数を考える.

q は $p_1, p_2, \ldots, p_n$ のどれで割っても 1 があまる. つまり $p_1, p_2, \ldots, p_n$ のどれで割っても割切れない. したがって, q を素因数分解したとき, そこに現れる素数は $p_1, \ldots, p_n$ のどれとも異なる. これは, 素数が $p_1, \ldots, p_n$ だけだとした仮定に矛盾である.

この矛盾は「素数は有限個しか存在しない」という仮定に起因するのだから, この仮定は正しくない. つまり, <u>素数は無限個存在する</u> ことが帰結される.

□ (定理 2)

定理 2 (ユークリッド, 紀元前 4 世紀ごろ?)

素数は無限に存在する.

証明. 背理法で示す.
定理が成立たないと仮定すると, 素数は有限個しか存在しないから, それらを $p_1, p_2, \ldots, p_n$ とする. ここで,
$q = p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_n + 1$ という数を考える.
q は $p_1, p_2, \ldots, p_n$ のどれで割っても 1 があまる. つまり $p_1, p_2, \ldots, p_n$ のどれで割っても割切れない. したがって, q を素因数分解したとき, そこに現れる素数は $p_1, \ldots, p_n$ のどれとも異なる. これは, 素数が $p_1, \ldots, p_n$ だけだとした仮定に矛盾である.

この矛盾は「素数は有限個しか存在しない」という仮定に起因するのだから, この仮定は正しくない. つまり, 素数は無限個存在する ことが帰結される.

□ (定理 2)

定理 2 (ユークリッド, 紀元前 4 世紀ごろ?)

素数は無限に存在する.

証明. 背理法で示す.
定理が成立たないと仮定すると, 素数は有限個しか存在しないから, それらを $p_1, p_2, \ldots, p_n$ とする. ここで,
$q = p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_n + 1$ という数を考える.

q は $p_1, p_2, \ldots, p_n$ のどれで割っても 1 があまる. つまり $p_1, p_2, \ldots, p_n$ のどれで割っても割切れない. したがって, q を素因数分解したとき, そこに現れる素数は $p_1, \ldots, p_n$ のどれとも異なる. これは, 素数が $p_1, \ldots, p_n$ だけだとした仮定に矛盾である.

この矛盾は「素数は有限個しか存在しない」という仮定に起因するのだから, この仮定は正しくない. つまり, 素数は無限個存在する ことが帰結される.

□ (定理 2)

数学と無限 — ユークリッドの素数存在定理 (2)

定理 2 (ユークリッド，紀元前 4 世紀ごろ?)

素数は無限に存在する．

証明. 背理法で示す．
定理が成立たないと仮定すると，素数は有限個しか存在しないから，それらを $p_1, p_2, \ldots, p_n$ とする．ここで，
$q = p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_n + 1$ という数を考える．

q は $p_1, p_2, \ldots, p_n$ のどれで割っても 1 があまる．つまり $p_1, p_2, \ldots, p_n$ のどれで割っても割切れない．したがって，q を素因数分解したとき，そこに現れる素数は $p_1, \ldots, p_n$ のどれとも異なる．これは，素数が $p_1, \ldots, p_n$ だけだとした仮定に矛盾である．

この矛盾は「素数は有限個しか存在しない」という仮定に起因するのだから，この仮定は正しくない．つまり，素数は無限個存在する ことが帰結される．

□ (定理 2)

定理 2 (ユークリッド, 紀元前 4 世紀ごろ?)

素数は無限に存在する.

証明. 背理法で示す.
定理が成立たないと仮定すると, 素数は有限個しか存在しないから, それらを $p_1, p_2, \ldots, p_n$ とする. ここで,
$q = p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_n + 1$ という数を考える.

q は $p_1, p_2, \ldots, p_n$ のどれで割っても 1 があまる. つまり $p_1, p_2, \ldots, p_n$ のどれで割っても割切れない. したがって, q を素因数分解したとき, そこに現れる素数は $p_1, \ldots, p_n$ のどれとも異なる. これは, 素数が $p_1, \ldots, p_n$ だけだとした仮定に矛盾である.

この矛盾は「素数は有限個しか存在しない」という仮定に起因するのだから, この仮定は正しくない. つまり, <u>素数は無限個存在する</u> ことが帰結される.

□ (定理 2)

数学と無限 — 集合論の始まり

G. カントル (Georg Cantor, 1845 – 1918（弘化 2 年 – 大正 7 年）)

19 世紀末には，無限をもっと積極的に考察に取り入れた数学の可能性や必要性がより強く感じられるようになった．カントルは，無限に関する研究を積極的に行い，集合論 (英語: set theory ／ドイツ語: Mengenlehre) と，現在では呼ばれている，無限集合の性質を研究する数学の分野を確立した．

数学と無限 — 集合論の始まり

G. カントル (Georg Cantor, 1845 – 1918（弘化 2 年 – 大正 7 年）)

19 世紀末には，無限をもっと積極的に考察に取り入れた数学の可能性や必要性がより強く感じられるようになった．カントルは，無限に関する研究を積極的に行い，集合論 (英語: set theory ／ドイツ語: Mengenlehre) と，現在では呼ばれている，無限集合の性質を研究する数学の分野を確立した．

数学と無限 — 集合論の始まり

G. カントル (Georg Cantor, 1845 – 1918（弘化 2 年 – 大正 7 年）)

19 世紀末には，無限をもっと積極的に考察に取り入れた数学の可能性や必要性がより強く感じられるようになった．カントルは，無限に関する研究を積極的に行い，集合論 (英語: set theory ／ドイツ語: Mengenlehre) と，現在では呼ばれている，無限集合の性質を研究する数学の分野を確立した．

数学と無限 — 集合論の始まり (2)

数学的な考察の対象（のいくつか）を集めて，その全体を新しく数学的考察の対象とみなしたものを 集合（しゅうごう） とよぶ.

集合が A 与えられたときには，ある数学的な対象 a が A に要素 (element) として属しているかどうかを考えることができるが，a が A に要素として属すとき，これを $a \in A$ とあらわす.

- 集合の理論は，要素関係 $\in$ のみを用いて，これの基本性質のみから出発することで，構築できる.

例. ある集合 A が別の集合 B に（部分として）含まれることを $A \subseteq B$ とあらわす. $A \subseteq B$ は,

『すべての（数学的な対象） a に対し，$a \in A$ が成り立つなら $a \in B$ が成り立つ』

という，$\in$ 関係に関する主張の略記とみなせる.

数学と無限 — 集合論の始まり (2)

数学的な考察の対象（のいくつか）を集めて，その全体を新しく数学的考察の対象とみなしたものを 集合（しゅうごう） とよぶ.

集合が A 与えられたときには，ある数学的な対象 a が A に要素 (element) として属しているかどうかを考えることができるが，a が A に要素として属すとき，これを $a \in A$ とあらわす.

- 集合の理論は，要素関係 $\in$ のみを用いて，これの基本性質のみから出発することで，構築できる.

例. ある集合 A が別の集合 B に（部分として）含まれることを $A \subseteq B$ とあらわす. $A \subseteq B$ は,

『すべての（数学的な対象） a に対し，$a \in A$ が成り立つなら $a \in B$ が成り立つ』

という，$\in$ 関係に関する主張の略記とみなせる.

数学と無限 — 集合論の始まり (2)

数学的な考察の対象（のいくつか）を集めて，その全体を新しく数学的考察の対象とみなしたものを 集合（しゅうごう） とよぶ.

集合が A 与えられたときには，ある数学的な対象 a が A に要素 (element) として属しているかどうかを考えることができるが，a が A に要素として属すとき，これを $a \in A$ とあらわす.

- 集合の理論は，要素関係 $\in$ のみを用いて，これの基本性質のみから出発することで，構築できる.

例. ある集合 A が別の集合 B に（部分として）含まれることを $A \subseteq B$ とあらわす. $A \subseteq B$ は，

『すべての（数学的な対象） a に対し，$a \in A$ が成り立つなら $a \in B$ が成り立つ』

という，$\in$ 関係に関する主張の略記とみなせる.

数学と無限 — 集合論の始まり (2)

数学的な考察の対象（のいくつか）を集めて，その全体を新しく数学的考察の対象とみなしたものを 集合（しゅうごう） とよぶ.

集合が A 与えられたときには，ある数学的な対象 a が A に要素 (element) として属しているかどうかを考えることができるが，a が A に要素として属すとき，これを $a \in A$ とあらわす.

- 集合の理論は，要素関係 $\in$ のみを用いて，これの基本性質のみから出発することで，構築できる.

例．ある集合 A が別の集合 B に（部分として）含まれることを $A \subseteq B$ とあらわす．$A \subseteq B$ は，

『すべての（数学的な対象） a に対し，$a \in A$ が成り立つなら $a \in B$ が成り立つ』

という，$\in$ 関係に関する主張の略記とみなせる.

数学と無限 — 集合論の始まり (2)

数学的な考察の対象（のいくつか）を集めて，その全体を新しく数学的考察の対象とみなしたものを 集合（しゅうごう） とよぶ.

集合が A 与えられたときには，ある数学的な対象 a が A に要素 (element) として属しているかどうかを考えることができるが，a が A に要素として属すとき，これを $a \in A$ とあらわす.

- 集合の理論は，要素関係 $\in$ のみを用いて，これの基本性質のみから出発することで，構築できる.

例. ある集合 A が別の集合 B に（部分として）含まれることを $A \subseteq B$ とあらわす. $A \subseteq B$ は，

『すべての（数学的な対象） a に対し，$a \in A$ が成り立つなら $a \in B$ が成り立つ』

という，$\in$ 関係に関する主張の略記とみなせる.

数学と無限 — 集合論の始まり (2)

数学的な考察の対象（のいくつか）を集めて，その全体を新しく数学的考察の対象とみなしたものを 集合（しゅうごう） とよぶ.

集合が A 与えられたときには，ある数学的な対象 a が A に要素 (element) として属しているかどうかを考えることができるが，a が A に要素として属すとき，これを $a \in A$ とあらわす.

▶ 集合の理論は，要素関係 $\in$ のみを用いて，これの基本性質のみから出発することで，構築できる.

例. ある集合 A が別の集合 B に（部分として）含まれることを $A \subseteq B$ とあらわす. $A \subseteq B$ は，

『すべての（数学的な対象） a に対し，$a \in A$ が成り立つなら $a \in B$ が成り立つ』

という，$\in$ 関係に関する主張の略記とみなせる.

数学と無限 — 集合論の始まり (3)

数学的な考察の対象（のいくつか）を集めて，その全体を新しく数学的考察の対象とみなしたものを 集合（しゅうごう）とよぶ.

数学でよく使われる集合の例

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ （自然数 (natural numbers) の全体からなる集合）
- $\mathbb{R} = \{r : r \text{ は実数}\}$ （実数 (real numbers — 数直線上の点としてあらわされるような数) の全体からなる集合）
- $\mathbb{N}$ は，$\mathbb{R}$ に部分として含まれている（$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$）.
- 有理数（rational numbers 分子分母を整数とする分数としてあらわせる数）の全体 $\mathbb{Q}$ は，実数の全体に含まれ，自然数の全体を含んでいる（自然数 n は，たとえば分数 $\frac{n}{1}$ としても表わせる. 分数 $\frac{m}{n}$ は実数直線上の点に対応している）: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. （分数: quotients の q が記号 $\mathbb{Q}$ の語呂合わせに使われている）.

数学と無限 — 集合論の始まり (3)

数学的な考察の対象（のいくつか）を集めて，その全体を新しく数学的考察の対象とみなしたものを 集合（しゅうごう） とよぶ.

数学でよく使われる集合の例

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ （自然数 (natural numbers) の全体からなる集合）
- $\mathbb{R} = \{r : r \text{ は実数}\}$ （実数 (real numbers — 数直線上の点としてあらわされるような数) の全体からなる集合）
- $\mathbb{N}$ は，$\mathbb{R}$ に部分として含まれている（$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$）.
- 有理数（rational numbers 分子分母を整数とする分数としてあらわせる数）の全体 $\mathbb{Q}$ は，実数の全体に含まれ，自然数の全体を含んでいる（自然数 n は，たとえば分数 $\frac{n}{1}$ としても表わせる. 分数 $\frac{m}{n}$ は実数直線上の点に対応している）: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. （分数: quotients の q が記号 $\mathbb{Q}$ の語呂合わせに使われている）.

数学的な考察の対象（のいくつか）を集めて，その全体を新しく数学的考察の対象とみなしたものを 集合（しゅうごう）とよぶ.

数学でよく使われる集合の例

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ （自然数 (natural numbers) の全体からなる集合）
- $\mathbb{R} = \{r : r \text{ は実数}\}$ （実数 (real numbers — 数直線上の点としてあらわされるような数) の全体からなる集合）
- $\mathbb{N}$ は，$\mathbb{R}$ に部分として含まれている（$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$）.
- 有理数（rational numbers 分子分母を整数とする分数としてあらわせる数）の全体 $\mathbb{Q}$ は，実数の全体に含まれ，自然数の全体を含んでいる（自然数 n は，たとえば分数 $\frac{n}{1}$ としても表わせる. 分数 $\frac{m}{n}$ は実数直線上の点に対応している）: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. （分数: quotients の q が記号 $\mathbb{Q}$ の語呂合わせに使われている）.

数学と無限 — 集合論の始まり (3)

数学的な考察の対象（のいくつか）を集めて，その全体を新しく数学的考察の対象とみなしたものを 集合（しゅうごう） とよぶ.

数学でよく使われる集合の例

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ （自然数 (natural numbers) の全体からなる集合）
- $\mathbb{R} = \{ r : r \text{ は実数} \}$ （実数 (real numbers — 数直線上の点としてあらわされるような数) の全体からなる集合）
- $\mathbb{N}$ は，$\mathbb{R}$ に部分として含まれている（ $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ ）.
- 有理数（rational numbers 分子分母を整数とする分数としてあらわせる数）の全体 $\mathbb{Q}$ は，実数の全体に含まれ，自然数の全体を含んでいる（自然数 n は，たとえば分数 $\frac{n}{1}$ としても表わせる. 分数 $\frac{m}{n}$ は実数直線上の点に対応している）: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. （分数: quotients の q が記号 $\mathbb{Q}$ の語呂合わせに使われている）.

数学的な考察の対象（のいくつか）を集めて，その全体を新しく数学的考察の対象とみなしたものを 集合（しゅうごう）とよぶ.

数学でよく使われる集合の例

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ （自然数 (natural numbers) の全体からなる集合）
- $\mathbb{R} = \{r : r$ は実数$\}$ （実数 (real numbers — 数直線上の点としてあらわされるような数) の全体からなる集合）
- $\mathbb{N}$ は，$\mathbb{R}$ に部分として含まれている（$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$）.
- 有理数（rational numbers 分子分母を整数とする分数としてあらわせる数）の全体 $\mathbb{Q}$ は，実数の全体に含まれ，自然数の全体を含んでいる（自然数 n は，たとえば分数 $\frac{n}{1}$ としても表わせる．分数 $\frac{m}{n}$ は実数直線上の点に対応している）：$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. （分数: quotients の q が記号 $\mathbb{Q}$ の語呂合わせに使われている）.

数学と無限 — 集合論の始まり (3)

数学的な考察の対象（のいくつか）を集めて，その全体を新しく数学的考察の対象とみなしたものを 集合(しゅうごう) とよぶ.

数学でよく使われる集合の例

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ （自然数 (natural numbers) の全体からなる集合）
- $\mathbb{R} = \{r : r$ は実数$\}$ （実数 (real numbers — 数直線上の点としてあらわされるような数) の全体からなる集合）
- $\mathbb{N}$ は，$\mathbb{R}$ に部分として含まれている（$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$）.
- 有理数（rational numbers 分子分母を整数とする分数としてあらわせる数）の全体 $\mathbb{Q}$ は，実数の全体に含まれ，自然数の全体を含んでいる（自然数 n は，たとえば分数 $\frac{n}{1}$ としても表わせる．分数 $\frac{m}{n}$ は実数直線上の点に対応している）：$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. （分数: quotients の q が記号 $\mathbb{Q}$ の語呂合わせに使われている）.

数学的な考察の対象（のいくつか）を集めて，その全体を新しく数学的考察の対象とみなしたものを 集合（しゅうごう） とよぶ.

数学でよく使われる集合の例

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ （自然数 (natural numbers) の全体からなる集合）
- $\mathbb{R} = \{r : r \text{ は実数}\}$ （実数 (real numbers — 数直線上の点としてあらわされるような数) の全体からなる集合）
- $\mathbb{N}$ は，$\mathbb{R}$ に部分として含まれている（$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$）.
- 有理数（rational numbers 分子分母を整数とする分数としてあらわせる数）の全体 $\mathbb{Q}$ は，実数の全体に含まれ，自然数の全体を含んでいる（自然数 n は，たとえば分数 $\frac{n}{1}$ としても表わせる. 分数 $\frac{m}{n}$ は実数直線上の点に対応している）: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. （分数: quotients の q が記号 $\mathbb{Q}$ の語呂合わせに使われている）.

数学と無限 — 集合論の始まり (3)

数学的な考察の対象（のいくつか）を集めて，その全体を新しく数学的考察の対象とみなしたものを 集合（しゅうごう） とよぶ.

数学でよく使われる集合の例

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ （自然数 (natural numbers) の全体からなる集合）
- $\mathbb{R} = \{r : r \text{ は実数}\}$ （実数 (real numbers — 数直線上の点としてあらわされるような数) の全体からなる集合）
- $\mathbb{N}$ は，$\mathbb{R}$ に部分として含まれている（$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$）.
- 有理数（rational numbers 分子分母を整数とする分数としてあらわせる数）の全体 $\mathbb{Q}$ は，実数の全体に含まれ，自然数の全体を含んでいる（自然数 n は，たとえば分数 $\frac{n}{1}$ としても表わせる. 分数 $\frac{m}{n}$ は実数直線上の点に対応している）: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. （分数: quotients の q が記号 $\mathbb{Q}$ の語呂合わせに使われている）.

数学と無限 — 集合論の始まり (3)

数学的な考察の対象（のいくつか）を集めて，その全体を新しく数学的考察の対象とみなしたものを 集合（しゅうごう） とよぶ.

数学でよく使われる集合の例

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ （自然数 (natural numbers) の全体からなる集合）
- $\mathbb{R} = \{r : r \text{ は実数}\}$ （実数 (real numbers — 数直線上の点としてあらわされるような数) の全体からなる集合）
- $\mathbb{N}$ は，$\mathbb{R}$ に部分として含まれている（$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$）.
- 有理数（rational numbers 分子分母を整数とする分数としてあらわせる数）の全体 $\mathbb{Q}$ は，実数の全体に含まれ，自然数の全体を含んでいる（自然数 n は，たとえば分数 $\frac{n}{1}$ としても表わせる. 分数 $\frac{m}{n}$ は実数直線上の点に対応している）: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. （分数: quotients の q が記号 $\mathbb{Q}$ の語呂合わせに使われている）.

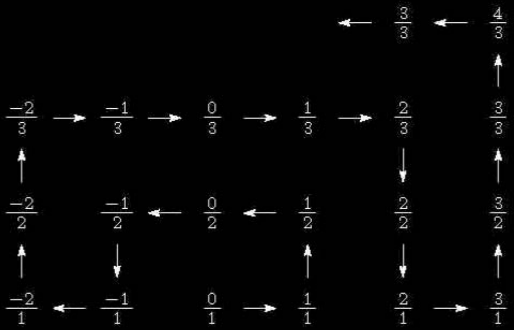
数学と無限 — 集合論の始まり (4)

自然数の全体 $\mathbb{N}$ と有理数の全体 $\mathbb{Q}$ の（要素の）間には一対一の対応をつけることができる:

数学と無限 — 集合論の始まり (4)

自然数の全体 $\mathbb{N}$ と有理数の全体 $\mathbb{Q}$ の（要素の）間には一対一の対応をつけることができる:

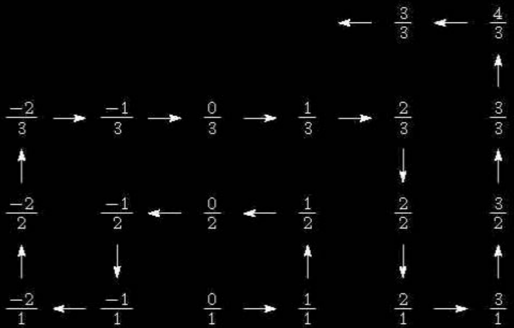
自然数の全体 $\mathbb{N}$ と有理数の全体 $\mathbb{Q}$ の（要素の）間には一対一の対応をつけることができる:



1. （無限）平面に座標を入れて x 軸より上にある，各格子点 (n, m) 上に分数 $\frac{n}{m}$ を置く．2. 格子点を蛇行しながらたたどって，格子点に乗った分数を 0 番目, 1 番目, 2 番目, $\cdots$ と数え上げてゆく．3. ただし，前にすでに出てきた数はとばす．

数学と無限 — 集合論の始まり (4)

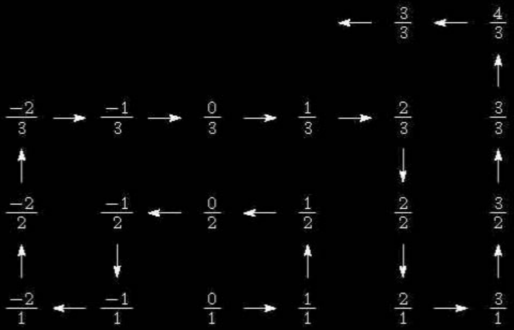
自然数の全体 $\mathbb{N}$ と有理数の全体 $\mathbb{Q}$ の（要素の）間には一対一の対応をつけることができる:



1. （無限）平面に座標を入れて x 軸より上にある，各格子点 (n, m) 上に分数 $\frac{n}{m}$ を置く． **2.** 格子点を蛇行しながらたたどって，格子点に乗った分数を 0 番目, 1 番目, 2 番目, $\cdots$ と数え上げてゆく． **3.** ただし，前にすでに出てきた数はとばす．

数学と無限 — 集合論の始まり (4)

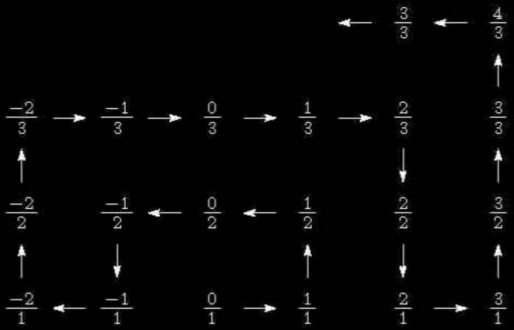
自然数の全体 $\mathbb{N}$ と有理数の全体 $\mathbb{Q}$ の（要素の）間には一対一の対応をつけることができる:



1. （無限）平面に座標を入れて x 軸より上にある，各格子点 (n, m) 上に分数 $\frac{n}{m}$ を置く．**2.** 格子点を蛇行しながらたたどって，格子点に乗った分数を 0 番目, 1 番目, 2 番目, $\cdots$ と数え上げてゆく．**3.** ただし，前にすでに出てきた数はとばす．

数学と無限 — 集合論の始まり (4)

自然数の全体 $\mathbb{N}$ と有理数の全体 $\mathbb{Q}$ の（要素の）間には一対一の対応をつけることができる:



1. （無限）平面に座標を入れて x 軸より上にある，各格子点 (n, m) 上に分数 $\frac{n}{m}$ を置く． **2.** 格子点を蛇行しながらたたどって，格子点に乗った分数を 0 番目, 1 番目, 2 番目, $\cdots$ と数え上げてゆく． **3.** ただし，前にすでに出てきた数はとばす．

数学と無限 — 集合論の始まり (5)

$\mathbb{Q}$ は，集合としては $\mathbb{N}$ を（真に）含んでいるが，その（無限）集合としての “サイズ” （濃度）は $\mathbb{N}$ と等しい — $\mathbb{Q}$ は 可算 である．

ところが：

定理 3 (カントル，1873 年（明治 6 年）12 月 7 日)

実数の全体を自然数を添字にして $r_0, r_1, r_2, r_3, \cdots$ と並べつくすことはできない．

この定理は，実数の全体の集合 $\mathbb{R}$ が，$\mathbb{Q}$ や $\mathbb{N}$ を部分として含んでいるだけでなく，$\mathbb{N}$ や $\mathbb{Q}$ より，本質的に ‘大きな’ サイズを持っていることを示している（$\mathbb{R}$ は可算でない，あるいは 非可算 である）．

カントルがこの定理を “発見” したのが，無限集合を研究する数学の研究分野である 「集合論 」の始まった瞬間である，とする数学史での解釈も可能である (A. Kanamori).

数学と無限 — 集合論の始まり (5)

$\mathbb{Q}$ は，集合としては $\mathbb{N}$ を（真に）含んでいるが，その（無限）集合としての “サイズ” （濃度）は $\mathbb{N}$ と等しい — $\mathbb{Q}$ は 可算 である．

ところが：

定理 3 (カントル，1873 年（明治 6 年）12 月 7 日)

実数の全体を自然数を添字にして $r_0, r_1, r_2, r_3, \cdots$ と並べつくすことはできない．

この定理は，実数の全体の集合 $\mathbb{R}$ が，$\mathbb{Q}$ や $\mathbb{N}$ を部分として含んでいるだけでなく，$\mathbb{N}$ や $\mathbb{Q}$ より，本質的に ‘大きな’ サイズを持っていることを示している（$\mathbb{R}$ は可算でない，あるいは 非可算 である）．

カントルがこの定理を “発見” したのが，無限集合を研究する数学の研究分野である 「集合論 」の始まった瞬間である，とする数学史での解釈も可能である (A. Kanamori).

数学と無限 — 集合論の始まり (5)

$\mathbb{Q}$ は，集合としては $\mathbb{N}$ を（真に）含んでいるが，その（無限）集合としての “サイズ”（濃度）は $\mathbb{N}$ と等しい — $\mathbb{Q}$ は 可算 である．

ところが：

定理 3 (カントル，1873 年（明治 6 年）12 月 7 日)

実数の全体を自然数を添字にして $r_0, r_1, r_2, r_3, \cdots$ と並べつくすことはできない．

この定理は，実数の全体の集合 $\mathbb{R}$ が，$\mathbb{Q}$ や $\mathbb{N}$ を部分として含んでいるだけでなく，$\mathbb{N}$ や $\mathbb{Q}$ より，本質的に ‘大きな’ サイズを持っていることを示している（$\mathbb{R}$ は可算でない，あるいは 非可算 である）．

カントルがこの定理を “発見” したのが，無限集合を研究する数学の研究分野である 「集合論 」の始まった瞬間である，とする数学史での解釈も可能である (A. Kanamori).

数学と無限 — 集合論の始まり (5)

$\mathbb{Q}$ は，集合としては $\mathbb{N}$ を（真に）含んでいるが，その（無限）集合としての “サイズ” （濃度）は $\mathbb{N}$ と等しい — $\mathbb{Q}$ は 可算 である．

ところが：

定理 3 (カントル，1873 年（明治 6 年）12 月 7 日)

実数の全体を自然数を添字にして $r_0, r_1, r_2, r_3, \cdots$ と並べつくすことはできない．

この定理は，実数の全体の集合 $\mathbb{R}$ が，$\mathbb{Q}$ や $\mathbb{N}$ を部分として含んでいるだけでなく，$\mathbb{N}$ や $\mathbb{Q}$ より，本質的に ‘大きな’ サイズを持っていることを示している（$\mathbb{R}$ は可算でない，あるいは 非可算 である）．

カントルがこの定理を “発見” したのが，無限集合を研究する数学の研究分野である 「集合論」の始まった瞬間である，とする数学史での解釈も可能である (A. Kanamori).

数学と無限 — 集合論の始まり (5)

$\mathbb{Q}$ は，集合としては $\mathbb{N}$ を（真に）含んでいるが，その（無限）集合としての “サイズ” （濃度）は $\mathbb{N}$ と等しい — $\mathbb{Q}$ は 可算 である．

ところが：

定理 3 (カントル，1873 年（明治 6 年）12 月 7 日)

実数の全体を自然数を添字にして $r_0, r_1, r_2, r_3, \cdots$ と並べつくすことはできない．

この定理は，実数の全体の集合 $\mathbb{R}$ が，$\mathbb{Q}$ や $\mathbb{N}$ を部分として含んでいるだけでなく，$\mathbb{N}$ や $\mathbb{Q}$ より，本質的に ‘大きな’ サイズを持っていることを示している（$\mathbb{R}$ は可算でない，あるいは 非可算 である）．

カントルがこの定理を “発見” したのが，無限集合を研究する数学の研究分野である 「集合論 」の始まった瞬間である，とする数学史での解釈も可能である (A. Kanamori).

数学と無限 — 集合論の始まり (5)

$\mathbb{Q}$ は，集合としては $\mathbb{N}$ を（真に）含んでいるが，その（無限）集合としての “サイズ”（濃度）は $\mathbb{N}$ と等しい — $\mathbb{Q}$ は 可算 である．

ところが：

定理 3 (カントル，1873 年（明治 6 年）12 月 7 日)

実数の全体を自然数を添字にして $r_0, r_1, r_2, r_3, \cdots$ と並べつくすことはできない．

この定理は，実数の全体の集合 $\mathbb{R}$ が，$\mathbb{Q}$ や $\mathbb{N}$ を部分として含んでいるだけでなく，$\mathbb{N}$ や $\mathbb{Q}$ より，本質的に ‘大きな’ サイズを持っていることを示している（$\mathbb{R}$ は可算でない，あるいは 非可算 である）．

カントルがこの定理を “発見” したのが，無限集合を研究する数学の研究分野である 「集合論 」の始まった瞬間である，とする数学史での解釈も可能である (A. Kanamori).

数学と無限 — 集合論の始まり (5)

$\mathbb{Q}$ は，集合としては $\mathbb{N}$ を（真に）含んでいるが，その（無限）集合としての “サイズ”（濃度）は $\mathbb{N}$ と等しい — $\mathbb{Q}$ は 可算 である．

ところが：

定理 3 (カントル，1873 年（明治 6 年）12 月 7 日)

実数の全体を自然数を添字にして $r_0, r_1, r_2, r_3, \cdots$ と並べつくすことはできない．

この定理は，実数の全体の集合 $\mathbb{R}$ が，$\mathbb{Q}$ や $\mathbb{N}$ を部分として含んでいるだけでなく，$\mathbb{N}$ や $\mathbb{Q}$ より，本質的に ‘大きな’ サイズを持っていることを示している（$\mathbb{R}$ は可算でない，あるいは 非可算 である）．

カントルがこの定理を “発見” したのが，無限集合を研究する数学の研究分野である 「集合論 」の始まった瞬間である，とする数学史での解釈も可能である (A. Kanamori).

定理 3 (カントル，1873 年（明治 6 年）12 月 7 日)

実数の全体を自然数を添字にして $r_0, r_1, r_2, r_3, \cdots$ と並べつくすことはできない.

証明. この定理も背理法で証明する．実数の全体が自然数を添字にして $r_0, r_1, r_2, r_3, \cdots$ と並べつくすことができたとする．$r_0, r_1, r_2, r_3, \cdots$ のそれぞれを（十進法の）無限小数展開で表現したものを各行に書いた（縦横無限の）表を考える．たとえば,

$$
\begin{array}{ll}
r_0: & 2.4161073825503356\cdots \\
r_1: & -562.43283582089552 25\cdots \\
r_2: & 1.9462686567164178\cdots \\
r_3: & 0.0011782 2429 \\
r_4: & -1.5490001 \\
\vdots & \quad\vdots
\end{array}
$$

定理 3 (カントル，1873 年（明治 6 年）12 月 7 日)

実数の全体を自然数を添字にして $r_0, r_1, r_2, r_3, \cdots$ と並べつくすことはできない．

証明． この定理も背理法で証明する．実数の全体が自然数を添字にして $r_0, r_1, r_2, r_3, \cdots$ と並べつくすことができたとする．$r_0, r_1, r_2, r_3, \cdots$ のそれぞれを（十進法の）無限小数展開で表現したものを各行に書いた（縦横無限の）表を考える．たとえば,

$$
\begin{array}{ll}
r_0: & 2.4161073825503356\cdots \\
r_1: & -562.43283582089552 25\cdots \\
r_2: & 1.9462686567164178\cdots \\
r_3: & 0.00117822429 \\
r_4: & -1.5490001 \\
\vdots & \quad\vdots
\end{array}
$$

定理 3 (カントル，1873 年（明治 6 年）12 月 7 日)

実数の全体を自然数を添字にして $r_0, r_1, r_2, r_3, \cdots$ と並べつくすことはできない．

証明. この定理も背理法で証明する．実数の全体が自然数を添字にして $r_0, r_1, r_2, r_3, \cdots$ と並べつくすことができたとする．$r_0, r_1, r_2, r_3, \cdots$ のそれぞれを（十進法の）無限小数展開で表現したものを各行に書いた（縦横無限の）表を考える．たとえば，

$$
\begin{array}{rrl}
r_0: & 2 & .4161073825503356\cdots \\
r_1: & -562 & .4328358208955225\cdots \\
r_2: & 1 & .9462686567164178\cdots \\
r_3: & 0 & .0011782242 9 \\
r_4: & -1 & .5490001 \\
\vdots & \vdots &
\end{array}
$$

定理 3 (カントル，1873 年（明治 6 年）12 月 7 日)

実数の全体を自然数を添字にして $r_0, r_1, r_2, r_3, \cdots$ と並べつくすことはできない．

証明. この定理も背理法で証明する．実数の全体が自然数を添字にして $r_0, r_1, r_2, r_3, \cdots$ と並べつくすことができたとする．

$r_0, r_1, r_2, r_3, \cdots$ のそれぞれを（十進法の）無限小数展開で表現したものを各行に書いた（縦横無限の）表を考える．たとえば，

$$
\begin{array}{ll}
r_0: & 2.4161073825503356\cdots \\
r_1: & -562.4328358208955225\cdots \\
r_2: & 1.9462686567164178\cdots \\
r_3: & 0.0011782242 9 \\
r_4: & -1.5490001 \\
\vdots & \quad\vdots
\end{array}
$$

定理 3 (カントル，1873 年（明治 6 年）12 月 7 日)

実数の全体を自然数を添字にして $r_0, r_1, r_2, r_3, \cdots$ と並べつくすことはできない．

証明．　この定理も背理法で証明する．実数の全体が自然数を添字にして $r_0, r_1, r_2, r_3, \cdots$ と並べつくすことができたとする．$r_0, r_1, r_2, r_3, \cdots$ のそれぞれを（十進法の）無限小数展開で表現したものを各行に書いた（縦横無限の）表を考える．たとえば，

$$
\begin{array}{ll}
r_0: & 2.4161073825503356\cdots \\
r_1: & -562.4328358208955225\cdots \\
r_2: & 1.9462686567164178\cdots \\
r_3: & 0.00117822429 \\
r_4: & -1.5490001 \\
\vdots & \quad\vdots
\end{array}
$$

数学と無限 — 集合論の始まり (6)

定理 3 (カントル，1873 年（明治 6 年）12 月 7 日)

実数の全体を自然数を添字にして $r_0, r_1, r_2, r_3, \cdots$ と並べつくすことはできない.

証明.　この定理も背理法で証明する．実数の全体が自然数を添字にして $r_0, r_1, r_2, r_3, \cdots$ と並べつくすことができたとする．$r_0, r_1, r_2, r_3, \cdots$ のそれぞれを（十進法の）無限小数展開で表現したものを各行に書いた（縦横無限の）表を考える．たとえば，

$$
\begin{array}{ll}
r_0: & 2.4161073825503356\cdots \\
r_1: & -562.4328358208955225\cdots \\
r_2: & 1.9462686567164178\cdots \\
r_3: & 0.00117822429 \\
r_4: & -1.5490001 \\
\vdots & \quad\vdots
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lr}
r_0: & 2.4161073825503356\cdots \\
r_1: & -562.43283582089552225\cdots \\
r_2: & 1.946268656716 4178\cdots \\
r_3: & 0.00117822429 \\
r_4: & -1.5490001 \\
\vdots & \vdots
\end{array}
$$

数学と無限 — 集合論の始まり (7)

$$
\begin{array}{lr}
r_0: & 2.\color{red}{4}16107382550 3356\cdots \\
r_1: & -562.4\color{red}{3}2835820895 5225\cdots \\
r_2: & 1.94\color{red}{6}26865671641 78\cdots \\
r_3: & 0.001\color{red}{1}7822429 \\
r_4: & -1.5490\color{red}{0}01 \\
\vdots & \vdots
\end{array}
$$

ここで，上で赤くぬった対角線上にある数字をひろい，それらの数字の一つ一つに対しそれと違う 0 と 9 以外の数字を適当に選んで 0. の下にならべる．たとえば： 0.54721 $\cdots$

このとき，こうやって作った実数は上の（無限）リストに含まれないものとなってしまうが，これは矛盾である． □ (定理 3)

数学と無限 — 集合論の始まり (7)

$$
\begin{array}{lr}
r_0: & 2.4161073825503356\cdots \\
r_1: & -562.4328358208955225\cdots \\
r_2: & 1.9462686567164178\cdots \\
r_3: & 0.0011782242 9 \\
r_4: & -1.5490001 \\
\vdots & \vdots
\end{array}
$$

ここで，上で赤くぬった対角線上にある数字をひろい，それらの数字の一つ一つに対しそれと違う 0 と 9 以外の数字を適当に選んで 0. の下にならべる．たとえば： $0.54721\cdots$

このとき，こうやって作った実数は上の（無限）リストに含まれないものとなってしまうが，これは矛盾である． □ (定理 3)

数学と無限 — 集合論の始まり (7)

$$
\begin{array}{ll}
r_0: & 2.\color{red}{4}16107382550335 6\cdots \\
r_1: & -562.4\color{red}{3}2835820895522 5\cdots \\
r_2: & 1.94\color{red}{6}268656716417 8\cdots \\
r_3: & 0.001\color{red}{1}7822429 \\
r_4: & -1.5490\color{red}{0}01 \\
\vdots & \quad\vdots
\end{array}
$$

ここで，上で赤くぬった対角線上にある数字をひろい，それらの数字の一つ一つに対しそれと違う 0 と 9 以外の数字を適当に選んで 0. の下にならべる．たとえば： $0.54721\cdots$

このとき，こうやって作った実数は上の（無限）リストに含まれないものとなってしまうが，これは矛盾である． □ (定理 3)

数学と無限 — 集合論の始まり (7)

$$
\begin{array}{ll}
r_0: & 2.\color{red}{4}161073825503356\cdots \\
r_1: & -562.4\color{red}{3}28358208955225\cdots \\
r_2: & 1.94\color{red}{6}268656716417 8\cdots \\
r_3: & 0.001\color{red}{1}7822429 \\
r_4: & -1.5490\color{red}{0}01 \\
\vdots & \quad\vdots
\end{array}
$$

ここで，上で赤くぬった対角線上にある数字をひろい，それらの数字の一つ一つに対しそれと違う 0 と 9 以外の数字を適当に選んで 0. の下にならべる．たとえば： $0.54721\cdots$

このとき，こうやって作った実数は上の（無限）リストに含まれないものとなってしまうが，これは矛盾である． □ (定理 3)

集合論と（それ以外の）数学理論

- 現代の集合論では,『すべての数学的対象は集合である』という立場から理論が構築される．たとえば，自然数 $0, 1, 2, 3, \ldots$ は，$\emptyset$ で 空集合（くうしゅうごう）（要素を一つも持たない集合）をあらわすことにして，それぞれ，$\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ だと定義する．このような "読み替え" を行なうことで，数学で通常扱かう対象はすべて集合であると解釈することができるようになる．
- 現在までに作られた数学理論はすべて集合論の中で展開することができる．
- 現代の数学では，どの分野でも普通に集合の概念を（ある程度）基礎に置いて理論を展開する．
- しかし，集合論以外の数学では，集合論の理論体系のフルパワーが用いられることはない．
- 集合論の体系のフルパワーを引き出すためのキーは二つあり，一つは，数理論理学の積極的な使用，もう一つは 超限帰納法とよばれる論法と，その応用としての 超限再帰法 である．

集合論と（それ以外の）数学理論

- 現代の集合論では,『すべての数学的対象は集合である』という立場から理論が構築される．たとえば，自然数 $0, 1, 2, 3, \ldots$ は，$\emptyset$ で 空集合（くうしゅうごう）（要素を一つも持たない集合）をあらわすことにして，それぞれ，$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ だと定義する．このような“読み替え”を行なうことで，数学で通常扱かう対象はすべて集合であると解釈することができるようになる．
- 現在までに作られた数学理論はすべて集合論の中で展開することができる．
- 現代の数学では，どの分野でも普通に集合の概念を（ある程度）基礎に置いて理論を展開する．
- しかし，集合論以外の数学では，集合論の理論体系のフルパワーが用いられることはない．
- 集合論の体系のフルパワーを引き出すためのキーは二つあり，一つは，数理論理学の積極的な使用，もう一つは 超限帰納法とよばれる論法と，その応用としての 超限再帰法 である．

集合論と（それ以外の）数学理論

- 現代の集合論では,『すべての数学的対象は集合である』という立場から理論が構築される. たとえば, 自然数 0, 1, 2, 3,. . . は, $\emptyset$ で 空集合（くうしゅうごう）（要素を一つも持たない集合）をあらわすことにして, それぞれ, $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ だと定義する. このような “読み替え” を行なうことで, 数学で通常扱かう対象はすべて集合であると解釈することができるようになる.
- 現在までに作られた数学理論はすべて集合論の中で展開することができる.
- 現代の数学では, どの分野でも普通に集合の概念を（ある程度）基礎に置いて理論を展開する.
- しかし, 集合論以外の数学では, 集合論の理論体系のフルパワーが用いられることはない.
- 集合論の体系のフルパワーを引き出すためのキーは二つあり, 一つは, 数理論理学の積極的な使用, もう一つは 超限帰納法とよばれる論法と, その応用としての 超限再帰法 である.

集合論と（それ以外の）数学理論

- 現代の集合論では,『すべての数学的対象は集合である』という立場から理論が構築される．たとえば，自然数 $0, 1, 2, 3, \ldots$ は，$\emptyset$ で 空集合（くうしゅうごう）（要素を一つも持たない集合）をあらわすことにして，それぞれ，$\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ だと定義する．このような “読み替え” を行なうことで，数学で通常扱かう対象はすべて集合であると解釈することができるようになる．
- 現在までに作られた数学理論はすべて集合論の中で展開することができる．
- 現代の数学では，どの分野でも普通に集合の概念を（ある程度）基礎に置いて理論を展開する．
- しかし，集合論以外の数学では，集合論の理論体系のフルパワーが用いられることはない．
- 集合論の体系のフルパワーを引き出すためのキーは二つあり，一つは，数理論理学の積極的な使用，もう一つは 超限帰納法とよばれる論法と，その応用としての 超限再帰法 である．

集合論と（それ以外の）数学理論

- 現代の集合論では,『すべての数学的対象は集合である』という立場から理論が構築される．たとえば，自然数 $0, 1, 2, 3, \ldots$ は，$\emptyset$ で 空集合（くうしゅうごう）（要素を一つも持たない集合）をあらわすことにして，それぞれ，$\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ だと定義する．このような“読み替え”を行なうことで，数学で通常扱かう対象はすべて集合であると解釈することができるようになる．
- 現在までに作られた数学理論はすべて集合論の中で展開することができる．
- 現代の数学では，どの分野でも普通に集合の概念を（ある程度）基礎に置いて理論を展開する．
- しかし，集合論以外の数学では，集合論の理論体系のフルパワーが用いられることはない．
- 集合論の体系のフルパワーを引き出すためのキーは二つあり，一つは，数理論理学の積極的な使用，もう一つは 超限帰納法とよばれる論法と，その応用としての 超限再帰法 である．

- 現代の集合論では，『すべての数学的対象は集合である』という立場から理論が構築される．たとえば，自然数 $0, 1, 2, 3, \ldots$ は，$\emptyset$ で 空集合（くうしゅうごう）（要素を一つも持たない集合）をあらわすことにして，それぞれ，$\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ だと定義する．このような "読み替え" を行なうことで，数学で通常扱かう対象はすべて集合であると解釈することができるようになる．
- 現在までに作られた数学理論はすべて集合論の中で展開することができる．
- 現代の数学では，どの分野でも普通に集合の概念を（ある程度）基礎に置いて理論を展開する．
- しかし，集合論以外の数学では，集合論の理論体系のフルパワーが用いられることはない．
- 集合論の体系のフルパワーを引き出すためのキーは二つあり，一つは，数理論理学の積極的な使用，もう一つは 超限帰納法とよばれる論法と，その応用としての 超限再帰法 である．

集合論と（それ以外の）数学理論

- 現代の集合論では,『すべての数学的対象は集合である』という立場から理論が構築される．たとえば，自然数 $0, 1, 2, 3, \ldots$ は，$\emptyset$ で 空集合（くうしゅうごう）（要素を一つも持たない集合）をあらわすことにして，それぞれ，$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ だと定義する．このような “読み替え” を行なうことで，数学で通常扱かう対象はすべて集合であると解釈することができるようになる．
- 現在までに作られた数学理論はすべて集合論の中で展開することができる．
- 現代の数学では，どの分野でも普通に集合の概念を（ある程度）基礎に置いて理論を展開する．
- しかし，集合論以外の数学では，集合論の理論体系のフルパワーが用いられることはない．
- 集合論の体系のフルパワーを引き出すためのキーは二つあり，一つは，数理論理学の積極的な使用，もう一つは 超限帰納法とよばれる論法と，その応用としての 超限再帰法 である．

集合論と（それ以外の）数学理論

- 現代の集合論では,『すべての数学的対象は集合である』という立場から理論が構築される．たとえば，自然数 $0, 1, 2, 3, \ldots$ は，$\emptyset$ で 空集合（くうしゅうごう）（要素を一つも持たない集合）をあらわすことにして，それぞれ，$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ だと定義する．このような “読み替え” を行なうことで，数学で通常扱かう対象はすべて集合であると解釈することができるようになる．

- 現在までに作られた数学理論はすべて集合論の中で展開することができる．
- 現代の数学では，どの分野でも普通に集合の概念を（ある程度）基礎に置いて理論を展開する．

- しかし，集合論以外の数学では，集合論の理論体系のフルパワーが用いられることはない．
- 集合論の体系のフルパワーを引き出すためのキーは二つあり，一つは，数理論理学の積極的な使用，もう一つは 超限帰納法とよばれる論法と，その応用としての 超限再帰法 である．

集合論と（それ以外の）数学理論 (2)

超限順序数と超限帰納法

▶ 自然数の全体 $0, 1, 2, \cdots$ を，帰納法の議論ができるという性質を保存しながら，さらに先に拡張する（超限順序数）.

$0, 1, 2, \cdots \ \omega, \omega+1, \omega+2, \omega+3, \cdots \ \omega+\omega, \omega+\omega+1, \cdots$

▶ 超限順序数の上では帰納法の議論が可能なので，そのことから順序数に関する再帰的な定義も可能となる．順序数にそって，どんどん実数を選んでゆくことで，すべての実数を並べつくすことができる.

$r_0, r_1, r_2, \cdots \ r_\omega, r_{\omega+1}, r_{\omega+2}, \cdots, r_\alpha, \cdots \ (\alpha < \kappa),$

$\mathbb{R} = \{r_\alpha : \alpha < \kappa\}.$

▶ 上のような κ のうち最小のものを，$\mathfrak{c}$ とあらわすことにする（連続体濃度 (連続体: continuum)）.

(a) $\mathfrak{c}$ の最小性から，任意の $\beta < \mathfrak{c}$ に対し，$\{\alpha : \alpha < \beta\}$ は実数の全体の集合 $\mathbb{R}$ よりサイズの小さな集合になる.

超限順序数と超限帰納法

- 自然数の全体 $0, 1, 2, \cdots$ を，帰納法の議論ができるという性質を保存しながら，さらに先に拡張する（超限順序数）．

$0, 1, 2, \cdots\ \omega, \omega+1, \omega+2, \omega+3, \cdots\ \omega+\omega, \omega+\omega+1, \cdots$

- 超限順序数の上では帰納法の議論が可能なので，そのことから順序数に関する再帰的な定義も可能となる．順序数にそって，どんどん実数を選んでゆくことで，すべての実数を並べつくすことができる．

$r_0, r_1, r_2, \cdots\ r_\omega, r_{\omega+1}, r_{\omega+2}, \cdots, r_\alpha, \cdots\ (\alpha < \kappa),$

$\mathbb{R} = \{r_\alpha : \alpha < \kappa\}.$

- 上のような κ のうち最小のものを，$\mathfrak{c}$ とあらわすことにする（連続体濃度 (連続体: continuum)）．

(a) $\mathfrak{c}$ の最小性から，任意の $\beta < \mathfrak{c}$ に対し，$\{\alpha : \alpha < \beta\}$ は実数の全体の集合 $\mathbb{R}$ よりサイズの小さな集合になる．

超限順序数と超限帰納法

▶ 自然数の全体 0, 1, 2, $\cdots$ を，帰納法の議論ができるという性質を保存しながら，さらに先に拡張する（超限順序数）．

$$0,\ 1,\ 2,\ \cdots\ \omega,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \omega+3,\ \cdots\ \omega+\omega,\ \omega+\omega+1,\ \cdots$$

▶ 超限順序数の上では帰納法の議論が可能なので，そのことから順序数に関する再帰的な定義も可能となる．順序数にそって，どんどん実数を選んでゆくことで，すべての実数を並べつくすことができる．

$$r_0,\ r_1,\ r_2,\ \cdots\ r_\omega,\ r_{\omega+1},\ r_{\omega+2},\ \cdots,\ r_\alpha,\ \cdots\ (\alpha<\kappa),$$

$$\mathbb{R}=\{r_\alpha : \alpha<\kappa\}.$$

▶ 上のような κ のうち最小のものを，$\mathfrak{c}$ とあらわすことにする（連続体濃度 (連続体: continuum)）．

(a) $\mathfrak{c}$ の最小性から，任意の $\beta<\mathfrak{c}$ に対し，$\{\alpha : \alpha<\beta\}$ は実数の全体の集合 $\mathbb{R}$ よりサイズの小さな集合になる．

超限順序数と超限帰納法

▶ 自然数の全体 $0, 1, 2, \cdots$ を，帰納法の議論ができるという性質を保存しながら，さらに先に拡張する（超限順序数）．

$$0, 1, 2, \cdots \ \omega, \omega+1, \omega+2, \omega+3, \cdots \ \omega+\omega, \omega+\omega+1, \cdots$$

▶ 超限順序数の上では帰納法の議論が可能なので，そのことから順序数に関する再帰的な定義も可能となる．順序数にそって，どんどん実数を選んでゆくことで，すべての実数を並べつくすことができる．

$$r_0, r_1, r_2, \cdots \ r_\omega, r_{\omega+1}, r_{\omega+2}, \cdots, r_\alpha, \cdots \ (\alpha < \kappa),$$

$$\mathbb{R} = \{r_\alpha : \alpha < \kappa\}.$$

▶ 上のような κ のうち最小のものを，$\mathfrak{c}$ とあらわすことにする（連続体濃度 (連続体: continuum)）．

(a) $\mathfrak{c}$ の最小性から，任意の $\beta < \mathfrak{c}$ に対し，$\{\alpha : \alpha < \beta\}$ は実数の全体の集合 $\mathbb{R}$ よりサイズの小さな集合になる．

集合論と（それ以外の）数学理論 (2)

超限順序数と超限帰納法

▶ 自然数の全体 $0, 1, 2, \cdots$ を，帰納法の議論ができるという性質を保存しながら，さらに先に拡張する（超限順序数）．

$$0,\ 1,\ 2,\ \cdots\ \omega,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \omega+3,\ \cdots\ \omega+\omega,\ \omega+\omega+1,\ \cdots$$

▶ 超限順序数の上では帰納法の議論が可能なので，そのことから順序数に関する再帰的な定義も可能となる．順序数にそって，どんどん実数を選んでゆくことで，すべての実数を並べつくすことができる．

$$r_0,\ r_1,\ r_2,\ \cdots\ r_\omega,\ r_{\omega+1},\ r_{\omega+2},\ \cdots,\ r_\alpha,\ \cdots\ (\alpha < \kappa),$$

$$\mathbb{R} = \{r_\alpha : \alpha < \kappa\}.$$

▶ 上のような κ のうち最小のものを，$\mathfrak{c}$ とあらわすことにする（連続体濃度 (連続体: continuum)）．

(a) $\mathfrak{c}$ の最小性から，任意の $\beta < \mathfrak{c}$ に対し，$\{\alpha : \alpha < \beta\}$ は実数の全体の集合 $\mathbb{R}$ よりサイズの小さな集合になる．

集合論と（それ以外の）数学理論 (2)

超限順序数と超限帰納法

▶ 自然数の全体 0, 1, 2, ⋯ を，帰納法の議論ができるという性質を保存しながら，さらに先に拡張する（超限順序数）．

$0,\ 1,\ 2,\ \cdots\ \omega,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \omega+3,\ \cdots\ \omega+\omega,\ \omega+\omega+1,\ \cdots$

▶ 超限順序数の上では帰納法の議論が可能なので，そのことから順序数に関する再帰的な定義も可能となる．順序数にそって，どんどん実数を選んでゆくことで，すべての実数を並べつくすことができる．

$r_0,\ r_1,\ r_2,\ \cdots\ r_\omega,\ r_{\omega+1},\ r_{\omega+2},\ \cdots,\ r_\alpha,\ \cdots\ (\alpha<\kappa),$

$\mathbb{R}=\{r_\alpha : \alpha<\kappa\}.$

▶ 上のような κ のうち最小のものを，$\mathfrak{c}$ とあらわすことにする（連続体濃度 (連続体: continuum)）．

(a) $\mathfrak{c}$ の最小性から，任意の $\beta<\mathfrak{c}$ に対し，$\{\alpha : \alpha<\beta\}$ は実数の全体の集合 $\mathbb{R}$ よりサイズの小さな集合になる．

集合論と（それ以外の）数学理論 (2)

超限順序数と超限帰納法

- 自然数の全体 $0, 1, 2, \cdots$ を，帰納法の議論ができるという性質を保存しながら，さらに先に拡張する（超限順序数）．

$0, 1, 2, \cdots \ \omega, \omega + 1, \omega + 2, \omega + 3, \cdots \ \omega + \omega, \omega + \omega + 1, \cdots$

- 超限順序数の上では帰納法の議論が可能なので，そのことから順序数に関する再帰的な定義も可能となる．順序数にそって，どんどん実数を選んでゆくことで，すべての実数を並べつくすことができる．

$r_0, r_1, r_2, \cdots \ r_\omega, r_{\omega+1}, r_{\omega+2}, \cdots, r_\alpha, \cdots \ (\alpha < \kappa),$

$\mathbb{R} = \{r_\alpha : \alpha < \kappa\}.$

- 上のような κ のうち最小のものを，$\mathfrak{c}$ とあらわすことにする（連続体濃度 (連続体: continuum)）．

(a) $\mathfrak{c}$ の最小性から，任意の $\beta < \mathfrak{c}$ に対し，$\{\alpha : \alpha < \beta\}$ は実数の全体の集合 $\mathbb{R}$ よりサイズの小さな集合になる．

集合論と（それ以外の）数学理論 (2)

超限順序数と超限帰納法

- 自然数の全体 0, 1, 2, $\cdots$ を，帰納法の議論ができるという性質を保存しながら，さらに先に拡張する（超限順序数）．

$0,\ 1,\ 2,\ \cdots\ \omega,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \omega+3,\ \cdots\ \omega+\omega,\ \omega+\omega+1,\ \cdots$

- 超限順序数の上では帰納法の議論が可能なので，そのことから順序数に関する再帰的な定義も可能となる．順序数にそって，どんどん実数を選んでゆくことで，すべての実数を並べつくすことができる．

$r_0,\ r_1,\ r_2,\ \cdots\ r_\omega,\ r_{\omega+1},\ r_{\omega+2},\ \cdots,\ r_\alpha,\ \cdots\ (\alpha < \kappa),$

$\mathbb{R} = \{r_\alpha : \alpha < \kappa\}.$

- 上のような κ のうち最小のものを，$\mathfrak{c}$ とあらわすことにする（連続体濃度 (連続体: continuum)）．

(a) $\mathfrak{c}$ の最小性から，任意の $\beta < \mathfrak{c}$ に対し，$\{\alpha : \alpha < \beta\}$ は実数の全体の集合 $\mathbb{R}$ よりサイズの小さな集合になる．

集合論と（それ以外の）数学理論 (2)

超限順序数と超限帰納法

- 自然数の全体 0, 1, 2, ⋯ を，帰納法の議論ができるという性質を保存しながら，さらに先に拡張する（超限順序数）．

$0,\ 1,\ 2,\ \cdots\ \omega,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \omega+3,\ \cdots\ \omega+\omega,\ \omega+\omega+1,\ \cdots$

- 超限順序数の上では帰納法の議論が可能なので，そのことから順序数に関する再帰的な定義も可能となる．順序数にそって，どんどん実数を選んでゆくことで，すべての実数を並べつくすことができる．

$r_0,\ r_1,\ r_2,\ \cdots\ r_\omega,\ r_{\omega+1},\ r_{\omega+2},\ \cdots,\ r_\alpha,\ \cdots\ (\alpha<\kappa),$

$\mathbb{R}=\{r_\alpha : \alpha<\kappa\}.$

- 上のような κ のうち最小のものを，$\mathfrak{c}$ とあらわすことにする（連続体濃度 (連続体: continuum)）．

(a) $\mathfrak{c}$ の最小性から，任意の $\beta<\mathfrak{c}$ に対し，$\{\alpha : \alpha<\beta\}$ は実数の全体の集合 $\mathbb{R}$ よりサイズの小さな集合になる．

集合論と（それ以外の）数学理論 (2)

超限順序数と超限帰納法

- 自然数の全体 $0, 1, 2, \cdots$ を，帰納法の議論ができるという性質を保存しながら，さらに先に拡張する（超限順序数）．

$$0, 1, 2, \cdots \ \omega, \omega+1, \omega+2, \omega+3, \cdots \ \omega+\omega, \omega+\omega+1, \cdots$$

- 超限順序数の上では帰納法の議論が可能なので，そのことから順序数に関する再帰的な定義も可能となる．順序数にそって，どんどん実数を選んでゆくことで，すべての実数を並べつくすことができる．

$$r_0, r_1, r_2, \cdots \ r_\omega, r_{\omega+1}, r_{\omega+2}, \cdots, r_\alpha, \cdots \ (\alpha < \kappa),$$

$$\mathbb{R} = \{r_\alpha : \alpha < \kappa\}.$$

- 上のような κ のうち最小のものを，$\mathfrak{c}$ とあらわすことにする（連続体濃度 (連続体: continuum)）．

(a) $\mathfrak{c}$ の最小性から，任意の $\beta < \mathfrak{c}$ に対し，$\{\alpha : \alpha < \beta\}$ は実数の全体の集合 $\mathbb{R}$ よりサイズの小さな集合になる．

集合論と（それ以外の）数学理論 (2)

超限順序数と超限帰納法

▶ 自然数の全体 $0, 1, 2, \cdots$ を，帰納法の議論ができるという性質を保存しながら，さらに先に拡張する（超限順序数）．

$$0, 1, 2, \cdots\ \omega, \omega+1, \omega+2, \omega+3, \cdots\ \omega+\omega, \omega+\omega+1, \cdots$$

▶ 超限順序数の上では帰納法の議論が可能なので，そのことから順序数に関する再帰的な定義も可能となる．順序数にそって，どんどん実数を選んでゆくことで，すべての実数を並べつくすことができる．

$$r_0, r_1, r_2, \cdots\ r_\omega, r_{\omega+1}, r_{\omega+2}, \cdots, r_\alpha, \cdots\ (\alpha < \kappa),$$

$$\mathbb{R} = \{r_\alpha : \alpha < \kappa\}.$$

▶ 上のような κ のうち最小のものを，$\mathfrak{c}$ とあらわすことにする（連続体濃度 (連続体: continuum)）．

(a) $\mathfrak{c}$ の最小性から，任意の $\beta < \mathfrak{c}$ に対し，$\{\alpha : \alpha < \beta\}$ は実数の全体の集合 $\mathbb{R}$ よりサイズの小さな集合になる．

集合論と（それ以外の）数学理論 (2)

超限順序数と超限帰納法

- 自然数の全体 0, 1, 2, ··· を，帰納法の議論ができるという性質を保存しながら，さらに先に拡張する（超限順序数）.

$$0,\ 1,\ 2,\ \cdots\ \omega,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \omega+3,\ \cdots\ \omega+\omega,\ \omega+\omega+1,\ \cdots$$

- 超限順序数の上では帰納法の議論が可能なので，そのことから順序数に関する再帰的な定義も可能となる．順序数にそって，どんどん実数を選んでゆくことで，すべての実数を並べつくすことができる．

$$r_0,\ r_1,\ r_2,\ \cdots\ r_\omega,\ r_{\omega+1},\ r_{\omega+2},\ \cdots,\ r_\alpha,\ \cdots\ (\alpha<\kappa),$$

$$\mathbb{R}=\{r_\alpha : \alpha<\kappa\}.$$

- 上のような κ のうち最小のものを，$\mathfrak{c}$ とあらわすことにする（連続体濃度 (連続体: continuum)）.

(a) $\mathfrak{c}$ の最小性から，任意の $\beta<\mathfrak{c}$ に対し，$\{\alpha : \alpha<\beta\}$ は実数の全体の集合 $\mathbb{R}$ よりサイズの小さな集合になる．

超限順序数と超限帰納法

- 自然数の全体 $0, 1, 2, \cdots$ を，帰納法の議論ができるという性質を保存しながら，さらに先に拡張する（超限順序数）．

$$0, 1, 2, \cdots \ \omega, \omega+1, \omega+2, \omega+3, \cdots \ \omega+\omega, \omega+\omega+1, \cdots$$

- 超限順序数の上では帰納法の議論が可能なので，そのことから順序数に関する再帰的な定義も可能となる．順序数にそって，どんどん実数を選んでゆくことで，すべての実数を並べつくすことができる．

$$r_0, r_1, r_2, \cdots \ r_\omega, r_{\omega+1}, r_{\omega+2}, \cdots, r_\alpha, \cdots \ (\alpha < \kappa),$$

$$\mathbb{R} = \{r_\alpha : \alpha < \kappa\}.$$

- 上のような κ のうち最小のものを，$\mathfrak{c}$ とあらわすことにする（連続体濃度 (連続体: continuum)）．

(a) $\mathfrak{c}$ の最小性から，任意の $\beta < \mathfrak{c}$ に対し，$\{\alpha : \alpha < \beta\}$ は実数の全体の集合 $\mathbb{R}$ よりサイズの小さな集合になる．

集合論と（それ以外の）数学理論 (2)

超限順序数と超限帰納法

- 自然数の全体 $0, 1, 2, \cdots$ を，帰納法の議論ができるという性質を保存しながら，さらに先に拡張する（超限順序数）．

$$0, 1, 2, \cdots \ \omega, \omega+1, \omega+2, \omega+3, \cdots \ \omega+\omega, \omega+\omega+1, \cdots$$

- 超限順序数の上では帰納法の議論が可能なので，そのことから順序数に関する再帰的な定義も可能となる．順序数にそって，どんどん実数を選んでゆくことで，すべての実数を並べつくすことができる．

$$r_0, r_1, r_2, \cdots \ r_\omega, r_{\omega+1}, r_{\omega+2}, \cdots, r_\alpha, \cdots \ (\alpha < \kappa),$$

$$\mathbb{R} = \{r_\alpha : \alpha < \kappa\}.$$

- 上のような κ のうち最小のものを，$\mathfrak{c}$ とあらわすことにする（連続体濃度 (連続体: continuum)）．

(a) $\mathfrak{c}$ の最小性から，任意の $\beta < \mathfrak{c}$ に対し，$\{\alpha : \alpha < \beta\}$ は実数の全体の集合 $\mathbb{R}$ よりサイズの小さな集合になる．

集合論と（それ以外の）数学理論 (2)

超限順序数と超限帰納法

▶ 自然数の全体 $0, 1, 2, \cdots$ を，帰納法の議論ができるという性質を保存しながら，さらに先に拡張する（超限順序数）．

$$0, 1, 2, \cdots\ \omega, \omega+1, \omega+2, \omega+3, \cdots\ \omega+\omega, \omega+\omega+1, \cdots$$

▶ 超限順序数の上では帰納法の議論が可能なので，そのことから順序数に関する再帰的な定義も可能となる．順序数にそって，どんどん実数を選んでゆくことで，すべての実数を並べつくすことができる．

$$r_0, r_1, r_2, \cdots\ r_\omega, r_{\omega+1}, r_{\omega+2}, \cdots, r_\alpha, \cdots\ (\alpha < \kappa),$$

$$\mathbb{R} = \{r_\alpha : \alpha < \kappa\}.$$

▶ 上のような κ のうち最小のものを，$\mathfrak{c}$ とあらわすことにする（連続体濃度 (連続体: continuum)）．

(a) $\mathfrak{c}$ の最小性から，任意の $\beta < \mathfrak{c}$ に対し，$\{\alpha : \alpha < \beta\}$ は実数の全体の集合 $\mathbb{R}$ よりサイズの小さな集合になる．

集合論と（それ以外の）数学理論 (2)

超限順序数と超限帰納法

- 自然数の全体 $0, 1, 2, \cdots$ を，帰納法の議論ができるという性質を保存しながら，さらに先に拡張する（超限順序数）．

$$0, 1, 2, \cdots\ \omega, \omega+1, \omega+2, \omega+3, \cdots\ \omega+\omega, \omega+\omega+1, \cdots$$

- 超限順序数の上では帰納法の議論が可能なので，そのことから順序数に関する再帰的な定義も可能となる．順序数にそって，どんどん実数を選んでゆくことで，すべての実数を並べつくすことができる．

$$r_0, r_1, r_2, \cdots\ r_\omega, r_{\omega+1}, r_{\omega+2}, \cdots, r_\alpha, \cdots\ (\alpha < \kappa),$$

$$\mathbb{R} = \{r_\alpha : \alpha < \kappa\}.$$

- 上のような κ のうち最小のものを，$\mathfrak{c}$ とあらわすことにする（連続体濃度 (連続体: continuum)）．

(a) $\mathfrak{c}$ の最小性から，任意の $\beta < \mathfrak{c}$ に対し，$\{\alpha : \alpha < \beta\}$ は実数の全体の集合 $\mathbb{R}$ よりサイズの小さな集合になる．

集合論と（それ以外の）数学理論 (2)

超限順序数と超限帰納法

- 自然数の全体 0, 1, 2, ⋯ を，帰納法の議論ができるという性質を保存しながら，さらに先に拡張する （超限順序数）．

$$0,\ 1,\ 2,\ \cdots\ \omega,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \omega+3,\ \cdots\ \omega+\omega,\ \omega+\omega+1,\ \cdots$$

- 超限順序数の上では帰納法の議論が可能なので，そのことから順序数に関する再帰的な定義も可能となる．順序数にそって，どんどん実数を選んでゆくことで，すべての実数を並べつくすことができる．

$$r_0,\ r_1,\ r_2,\ \cdots\ r_\omega,\ r_{\omega+1},\ r_{\omega+2},\ \cdots,\ r_\alpha,\ \cdots\ (\alpha<\kappa),$$

$$\mathbb{R}=\{r_\alpha : \alpha<\kappa\}.$$

- 上のような κ のうち最小のものを，$\mathfrak{c}$ とあらわすことにする（連続体濃度 (連続体: continuum)）．

(a) $\mathfrak{c}$ の最小性から，任意の $\beta<\mathfrak{c}$ に対し，$\{\alpha : \alpha<\beta\}$ は実数の全体の集合 $\mathbb{R}$ よりサイズの小さな集合になる．

集合論と（それ以外の）数学理論 (2)

超限順序数と超限帰納法

- 自然数の全体 0, 1, 2, ⋯ を，帰納法の議論ができるという性質を保存しながら，さらに先に拡張する（超限順序数）．

$$0,\ 1,\ 2,\ \cdots\ \omega,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \omega+3,\ \cdots\ \omega+\omega,\ \omega+\omega+1,\ \cdots$$

- 超限順序数の上では帰納法の議論が可能なので，そのことから順序数に関する再帰的な定義も可能となる．順序数にそって，どんどん実数を選んでゆくことで，すべての実数を並べつくすことができる．

$$r_0,\ r_1,\ r_2,\ \cdots\ r_\omega,\ r_{\omega+1},\ r_{\omega+2},\ \cdots,\ r_\alpha,\ \cdots\ (\alpha<\kappa),$$

$$\mathbb{R}=\{r_\alpha : \alpha<\kappa\}.$$

- 上のような κ のうち最小のものを，$\mathfrak{c}$ とあらわすことにする（連続体濃度 (連続体: continuum)）．

(a) $\mathfrak{c}$ の最小性から，任意の $\beta<\mathfrak{c}$ に対し，$\{\alpha : \alpha<\beta\}$ は実数の全体の集合 $\mathbb{R}$ よりサイズの小さな集合になる．

集合論と（それ以外の）数学理論 (2)

超限順序数と超限帰納法

- 自然数の全体 0, 1, 2, $\cdots$ を，帰納法の議論ができるという性質を保存しながら，さらに先に拡張する（超限順序数）.

$0, 1, 2, \cdots\ \omega, \omega+1, \omega+2, \omega+3, \cdots\ \omega+\omega, \omega+\omega+1, \cdots$

- 超限順序数の上では帰納法の議論が可能なので，そのことから順序数に関する再帰的な定義も可能となる．順序数にそって，どんどん実数を選んでゆくことで，すべての実数を並べつくすことができる.

$r_0, r_1, r_2, \cdots\ r_\omega, r_{\omega+1}, r_{\omega+2}, \cdots, r_\alpha, \cdots\ (\alpha<\kappa),$

$\mathbb{R}=\{r_\alpha : \alpha<\kappa\}.$

- 上のような κ のうち最小のものを，$\mathfrak{c}$ とあらわすことにする（連続体濃度 (連続体: continuum)）.

(a) $\mathfrak{c}$ の最小性から，任意の $\beta<\mathfrak{c}$ に対し，$\{\alpha : \alpha<\beta\}$ は実数の全体の集合 $\mathbb{R}$ よりサイズの小さな集合になる.

集合論と（それ以外の）数学理論 (2)

超限順序数と超限帰納法

- 自然数の全体 $0, 1, 2, \cdots$ を，帰納法の議論ができるという性質を保存しながら，さらに先に拡張する（超限順序数）.

$$0, 1, 2, \cdots \ \omega, \omega+1, \omega+2, \omega+3, \cdots \ \omega+\omega, \omega+\omega+1, \cdots$$

- 超限順序数の上では帰納法の議論が可能なので，そのことから順序数に関する再帰的な定義も可能となる．順序数にそって，どんどん実数を選んでゆくことで，すべての実数を並べつくすことができる.

$$r_0, r_1, r_2, \cdots \ r_\omega, r_{\omega+1}, r_{\omega+2}, \cdots, r_\alpha, \cdots \ (\alpha < \kappa),$$

$$\mathbb{R} = \{r_\alpha : \alpha < \kappa\}.$$

- 上のような κ のうち最小のものを，$\mathfrak{c}$ とあらわすことにする（連続体濃度 (連続体: continuum)）.

(a) $\mathfrak{c}$ の最小性から，任意の $\beta < \mathfrak{c}$ に対し，$\{\alpha : \alpha < \beta\}$ は実数の全体の集合 $\mathbb{R}$ よりサイズの小さな集合になる.

集合論と（それ以外の）数学理論 (2)

超限順序数と超限帰納法

- 自然数の全体 0, 1, 2, ⋯ を，帰納法の議論ができるという性質を保存しながら，さらに先に拡張する（超限順序数）.

$0, 1, 2, \cdots \ \omega, \omega+1, \omega+2, \omega+3, \cdots \ \omega+\omega, \omega+\omega+1, \cdots$

- 超限順序数の上では帰納法の議論が可能なので，そのことから順序数に関する再帰的な定義も可能となる．順序数にそって，どんどん実数を選んでゆくことで，すべての実数を並べつくすことができる.

$r_0, r_1, r_2, \cdots \ r_\omega, r_{\omega+1}, r_{\omega+2}, \cdots, r_\alpha, \cdots \ (\alpha < \kappa),$

$\mathbb{R} = \{r_\alpha : \alpha < \kappa\}.$

- 上のような κ のうち最小のものを，$\mathfrak{c}$ とあらわすことにする（連続体濃度 (連続体: continuum)）.

(a) $\mathfrak{c}$ の最小性から，任意の $\beta < \mathfrak{c}$ に対し，$\{\alpha : \alpha < \beta\}$ は実数の全体の集合 $\mathbb{R}$ よりサイズの小さな集合になる.

超限帰納法（再帰法）の応用

- $X \subseteq \mathbb{R}$ が 閉集合 であるとは，X が点列の極限に関して閉じていること．つまり x_n, $n \in \mathbb{N}$ を X の要素の列として $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ なら，$x \in X$ がいつでも言えること．

定理 4 (ベルンシュタイン，1908 年（明治 41 年）)

$X \subseteq \mathbb{R}$ で，(α) すべての可算でない閉集合と共通部分を持つが，(β) そのどれも部分として含んでいないようなものが存在する．

定理の証明には，カントルによって証明された，次の 2 つの事実を用いる．

(b) 閉集合の全体は実数の全体 $\mathbb{R}$ と一対一に対応がつく．特に，可算でない閉集合を，C_α, $\alpha < \mathfrak{c}$ と並べつくすことができる．

(c) 可算でない閉集合は，実数の全体 $\mathbb{R}$ と一対一に対応がつく．

超限帰納法（再帰法）の応用

- $X \subseteq \mathbb{R}$ が 閉集合 であるとは，X が点列の極限に関して閉じていること．つまり x_n, $n \in \mathbb{N}$ を X の要素の列として $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ なら，$x \in X$ がいつでも言えること．

定理 4 (ベルンシュタイン，1908 年（明治 41 年））

$X \subseteq \mathbb{R}$ で，(α) すべての可算でない閉集合と共通部分を持つが，(β) そのどれも部分として含んでいないようなものが存在する．

定理の証明には，カントルによって証明された，次の 2 つの事実を用いる．

(b) 閉集合の全体は実数の全体 $\mathbb{R}$ と一対一に対応がつく．特に，可算でない閉集合を，C_α, $\alpha < \mathfrak{c}$ と並べつくすことができる．

(c) 可算でない閉集合は，実数の全体 $\mathbb{R}$ と一対一に対応がつく．

超限帰納法（再帰法）の応用

- $X \subseteq \mathbb{R}$ が 閉集合 であるとは，X が点列の極限に関して閉じていること．つまり x_n, $n \in \mathbb{N}$ を X の要素の列として $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ なら，$x \in X$ がいつでも言えること．

定理 4 (ベルンシュタイン，1908 年（明治 41 年）)

$X \subseteq \mathbb{R}$ で，(α) すべての可算でない閉集合と共通部分を持つが，(β) そのどれも部分として含んでいないようなものが存在する．

定理の証明には，カントルによって証明された，次の 2 つの事実を用いる．

(b) 閉集合の全体は実数の全体 $\mathbb{R}$ と一対一に対応がつく．特に，可算でない閉集合を，C_α, $\alpha < \mathfrak{c}$ と並べつくすことができる．

(c) 可算でない閉集合は，実数の全体 $\mathbb{R}$ と一対一に対応がつく．

超限帰納法（再帰法）の応用

- $X \subseteq \mathbb{R}$ が 閉集合 であるとは，X が点列の極限に関して閉じていること．つまり x_n, $n \in \mathbb{N}$ を X の要素の列として $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ なら，$x \in X$ がいつでも言えること．

定理 4 (ベルンシュタイン，1908 年（明治 41 年）)

$X \subseteq \mathbb{R}$ で，(α) すべての可算でない閉集合と共通部分を持つが，(β) そのどれも部分として含んでいないようなものが存在する．

定理の証明には，カントルによって証明された，次の 2 つの事実を用いる．

(b) 閉集合の全体は実数の全体 $\mathbb{R}$ と一対一に対応がつく．特に，可算でない閉集合を，C_α, $\alpha < \mathfrak{c}$ と並べつくすことができる．

(c) 可算でない閉集合は，実数の全体 $\mathbb{R}$ と一対一に対応がつく．

超限帰納法（再帰法）の応用

- $X \subseteq \mathbb{R}$ が 閉集合 であるとは，X が点列の極限に関して閉じていること．つまり x_n, $n \in \mathbb{N}$ を X の要素の列として $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ なら，$x \in X$ がいつでも言えること．

定理 4 (ベルンシュタイン，1908 年（明治 41 年）)

$X \subseteq \mathbb{R}$ で，(α) すべての可算でない閉集合と共通部分を持つが，(β) そのどれも部分として含んでいないようなものが存在する．

定理の証明には，カントルによって証明された，次の 2 つの事実を用いる．

(b) 閉集合の全体は実数の全体 $\mathbb{R}$ と一対一に対応がつく．特に，可算でない閉集合を，C_α, $\alpha < \mathfrak{c}$ と並べつくすことができる．

(c) 可算でない閉集合は，実数の全体 $\mathbb{R}$ と一対一に対応がつく．

超限帰納法（再帰法）の応用

- $X \subseteq \mathbb{R}$ が 閉集合 であるとは，X が点列の極限に関して閉じていること．つまり x_n, $n \in \mathbb{N}$ を X の要素の列として $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ なら，$x \in X$ がいつでも言えること．

定理 4 (ベルンシュタイン，1908 年（明治 41 年）)

$X \subseteq \mathbb{R}$ で，(α) すべての可算でない閉集合と共通部分を持つが，(β) そのどれも部分として含んでいないようなものが存在する．

定理の証明には，カントルによって証明された，次の 2 つの事実を用いる．

(b) 閉集合の全体は実数の全体 $\mathbb{R}$ と一対一に対応がつく．特に，可算でない閉集合を，C_α, $\alpha < \mathfrak{c}$ と並べつくすことができる．

(c) 可算でない閉集合は，実数の全体 $\mathbb{R}$ と一対一に対応がつく．

超限帰納法（再帰法）の応用

- $X \subseteq \mathbb{R}$ が 閉集合 であるとは，X が点列の極限に関して閉じていること．つまり x_n, $n \in \mathbb{N}$ を X の要素の列として $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ なら，$x \in X$ がいつでも言えること．

定理 4 (ベルンシュタイン，1908 年（明治 41 年）)

$X \subseteq \mathbb{R}$ で，(α) すべての可算でない閉集合と共通部分を持つが，(β) そのどれも部分として含んでいないようなものが存在する．

定理の証明には，カントルによって証明された，次の 2 つの事実を用いる．

(b) 閉集合の全体は実数の全体 $\mathbb{R}$ と一対一に対応がつく．特に，可算でない閉集合を，C_α, $\alpha < \mathfrak{c}$ と並べつくすことができる．

(c) 可算でない閉集合は，実数の全体 $\mathbb{R}$ と一対一に対応がつく．

超限帰納法（再帰法）の応用 (2)

定理 4 (ベルンシュタイン，1908 年（明治 41 年）)

$X \subseteq \mathbb{R}$ で，(α) すべての可算でない閉集合と共通部分を持つが，(β) そのどれも部分として含んでいないようなものが存在する．

証明． C_α, $\alpha < \mathfrak{c}$ を可算でない閉集合の並べ上げとする．

$\beta < \mathfrak{c}$ に関して，実数 r_β, $s_\beta \in \mathbb{R}$ を再帰的にとり

0. $r_\beta \neq s_\beta$; 1. r_β, $s_\beta \in C_\beta$;
2. $r_\beta \notin \{r_\alpha, s_\alpha : \alpha < \beta\}$; $s_\beta \notin \{r_\alpha, s_\alpha : \alpha < \beta\}$

となるよううする．これは，前々ページで述べた $\mathfrak{c}$ の性質 (a) と，前ページの (b), (c) から可能である．

$X = \{r_\beta : \beta < \mathfrak{c}\}$ とすれば，この X は求めていたようなものとなっている: 1. と X の定義から，X は条件 (α) を満たし，0., 2. と X の定義から X は条件 (β) を満たす． □ (定理 4)

超限帰納法（再帰法）の応用 (2)

定理 4 (ベルンシュタイン，1908 年（明治 41 年）)

$X \subseteq \mathbb{R}$ で，(α) すべての可算でない閉集合と共通部分を持つが，(β) そのどれも部分として含んでいないようなものが存在する．

証明． C_α, $\alpha < \mathfrak{c}$ を可算でない閉集合の並べ上げとする．

$\beta < \mathfrak{c}$ に関して，実数 r_β, $s_\beta \in \mathbb{R}$ を再帰的にとり

0. $r_\beta \neq s_\beta$;　　1. r_β, $s_\beta \in C_\beta$;
2. $r_\beta \notin \{r_\alpha, s_\alpha : \alpha < \beta\}$; $s_\beta \notin \{r_\alpha, s_\alpha : \alpha < \beta\}$

となるようする．これは，前々ページで述べた $\mathfrak{c}$ の性質 (a) と，前ページの (b), (c) から可能である．

$X = \{r_\beta : \beta < \mathfrak{c}\}$ とすれば，この X は求めていたようなものとなっている: 1. と X の定義から，X は条件 (α) を満たし，0., 2. と X の定義から X は条件 (β) を満たす． □ (定理 4)

超限帰納法（再帰法）の応用 (2)

定理 4 (ベルンシュタイン，1908 年（明治 41 年））

$X \subseteq \mathbb{R}$ で，(α) すべての可算でない閉集合と共通部分を持つが，(β) そのどれも部分として含んでいないようなものが存在する．

証明． C_α, $\alpha < \mathfrak{c}$ を可算でない閉集合の並べ上げとする．
$\beta < \mathfrak{c}$ に関して，実数 r_β, $s_\beta \in \mathbb{R}$ を再帰的にとり

0. $r_\beta \neq s_\beta$;　1. r_β, $s_\beta \in C_\beta$;
2. $r_\beta \notin \{r_\alpha, s_\alpha : \alpha < \beta\}$; $s_\beta \notin \{r_\alpha, s_\alpha : \alpha < \beta\}$

となるようする．これは，前々ページで述べた $\mathfrak{c}$ の性質 (a) と，前ページの (b), (c) から可能である．

$X = \{r_\beta : \beta < \mathfrak{c}\}$ とすれば，この X は求めていたようなものとなっている: 1. と X の定義から，X は条件 (α) を満たし，0., 2. と X の定義から X は条件 (β) を満たす．　□ (定理 4)

定理 4 (ベルンシュタイン，1908 年（明治 41 年））

$X \subseteq \mathbb{R}$ で，(α) すべての可算でない閉集合と共通部分を持つが，(β) そのどれも部分として含んでいないようなものが存在する．

証明． C_α, $\alpha < \mathfrak{c}$ を可算でない閉集合の並べ上げとする．
$\beta < \mathfrak{c}$ に関して，実数 r_β, $s_\beta \in \mathbb{R}$ を再帰的にとり

0. $r_\beta \neq s_\beta$;　　1. r_β, $s_\beta \in C_\beta$;
2. $r_\beta \notin \{r_\alpha, s_\alpha : \alpha < \beta\}$; $s_\beta \notin \{r_\alpha, s_\alpha : \alpha < \beta\}$

となるようする．これは，前々ページで述べた $\mathfrak{c}$ の性質 (a) と，前ページの (b), (c) から可能である．

$X = \{r_\beta : \beta < \mathfrak{c}\}$ とすれば，この X は求めていたようなものとなっている: 1. と X の定義から，X は条件 (α) を満たし，0., 2. と X の定義から X は条件 (β) を満たす．　□ (定理 4)

超限帰納法（再帰法）の応用 (2)

定理 4 (ベルンシュタイン，1908 年（明治 41 年）)

$X \subseteq \mathbb{R}$ で，(α) すべての可算でない閉集合と共通部分を持つが，(β) そのどれも部分として含んでいないようなものが存在する．

証明．　C_α, $\alpha < \mathfrak{c}$ を可算でない閉集合の並べ上げとする．

$\beta < \mathfrak{c}$ に関して，実数 r_β, $s_\beta \in \mathbb{R}$ を再帰的にとり

0. $r_\beta \neq s_\beta$;　　1. $r_\beta, s_\beta \in C_\beta$;

2. $r_\beta \notin \{r_\alpha, s_\alpha : \alpha < \beta\}$; $s_\beta \notin \{r_\alpha, s_\alpha : \alpha < \beta\}$

となるようする．これは，前々ページで述べた $\mathfrak{c}$ の性質 (a) と，前ページの (b), (c) から可能である．

$X = \{r_\beta : \beta < \mathfrak{c}\}$ とすれば，この X は求めていたようなものとなっている:　1. と X の定義から，X は条件 (α) を満たし，0., 2. と X の定義から X は条件 (β) を満たす．　□ (定理 4)

超限帰納法（再帰法）の応用 (2)

定理 4 (ベルンシュタイン，1908 年（明治 41 年）)

$X \subseteq \mathbb{R}$ で，(α) すべての可算でない閉集合と共通部分を持つが，(β) そのどれも部分として含んでいないようなものが存在する．

証明．　C_α, $\alpha < \mathfrak{c}$ を可算でない閉集合の並べ上げとする．

$\beta < \mathfrak{c}$ に関して，実数 r_β, $s_\beta \in \mathbb{R}$ を再帰的にとり

0. $r_\beta \neq s_\beta$;　　1. r_β, $s_\beta \in C_\beta$;

2. $r_\beta \notin \{r_\alpha, s_\alpha : \alpha < \beta\}$; $s_\beta \notin \{r_\alpha, s_\alpha : \alpha < \beta\}$

となるようする．これは，前々ページで述べた $\mathfrak{c}$ の性質 (a) と，前ページの (b), (c) から可能である．

$X = \{r_\beta : \beta < \mathfrak{c}\}$ とすれば，この X は求めていたようなものとなっている:　1. と X の定義から，X は条件 (α) を満たし，0., 2. と X の定義から X は条件 (β) を満たす．　□ (定理 4)

超限帰納法（再帰法）の応用 (2)

定理 4 (ベルンシュタイン，1908 年（明治 41 年）)

$X \subseteq \mathbb{R}$ で，(α) すべての可算でない閉集合と共通部分を持つが，(β) そのどれも部分として含んでいないようなものが存在する．

証明． C_α, $\alpha < \mathfrak{c}$ を可算でない閉集合の並べ上げとする．

$\beta < \mathfrak{c}$ に関して，実数 r_β, $s_\beta \in \mathbb{R}$ を再帰的にとり

0\. $r_\beta \neq s_\beta$;　　1. r_β, $s_\beta \in C_\beta$;

2\. $r_\beta \notin \{r_\alpha, s_\alpha : \alpha < \beta\}$; $s_\beta \notin \{r_\alpha, s_\alpha : \alpha < \beta\}$

となるようする．これは，前々ページで述べた $\mathfrak{c}$ の性質 (a) と，前ページの (b), (c) から可能である．

$X = \{r_\beta : \beta < \mathfrak{c}\}$ とすれば，この X は求めていたようなものとなっている： 1. と X の定義から，X は条件 (α) を満たし，0., 2. と X の定義から X は条件 (β) を満たす．　□ (定理 4)

超限帰納法（再帰法）の応用 (2)

定理 4 (ベルンシュタイン，1908 年（明治 41 年）)

$X \subseteq \mathbb{R}$ で，(α) すべての可算でない閉集合と共通部分を持つが，(β) そのどれも部分として含んでいないようなものが存在する．

証明．　C_α, $\alpha < \mathfrak{c}$ を可算でない閉集合の並べ上げとする．

$\beta < \mathfrak{c}$ に関して，実数 r_β, $s_\beta \in \mathbb{R}$ を再帰的にとり

0. $r_\beta \neq s_\beta$;　　1. r_β, $s_\beta \in C_\beta$;
2. $r_\beta \notin \{r_\alpha, s_\alpha : \alpha < \beta\}$; $s_\beta \notin \{r_\alpha, s_\alpha : \alpha < \beta\}$

となるようする．これは，前々ページで述べた $\mathfrak{c}$ の性質 (a) と，前ページの (b), (c) から可能である．

$X = \{r_\beta : \beta < \mathfrak{c}\}$ とすれば，この X は求めていたようなものとなっている:　1. と X の定義から，X は条件 (α) を満たし，0.，2. と X の定義から X は条件 (β) を満たす．　□ (定理 4)

超限帰納法（再帰法）の応用 (2)

定理 4 (ベルンシュタイン，1908 年（明治 41 年）)

$X \subseteq \mathbb{R}$ で，(α) すべての可算でない閉集合と共通部分を持つが，(β) そのどれも部分として含んでいないようなものが存在する．

証明．　C_α, $\alpha < \mathfrak{c}$ を可算でない閉集合の並べ上げとする．

$\beta < \mathfrak{c}$ に関して，実数 r_β, $s_\beta \in \mathbb{R}$ を再帰的にとり

0. $r_\beta \neq s_\beta$;　　1. r_β, $s_\beta \in C_\beta$;
2. $r_\beta \notin \{r_\alpha, s_\alpha : \alpha < \beta\}$; $s_\beta \notin \{r_\alpha, s_\alpha : \alpha < \beta\}$

となるようする．これは，前々ページで述べた $\mathfrak{c}$ の性質 (a) と，前ページの (b), (c) から可能である．

$X = \{r_\beta : \beta < \mathfrak{c}\}$ とすれば，この X は求めていたようなものとなっている:　1. と X の定義から，X は条件 (α) を満たし，0., 2. と X の定義から X は条件 (β) を満たす．　□ (定理 4)

超限帰納法（再帰法）の応用 (2)

定理 4 (ベルンシュタイン，1908 年（明治 41 年）)

$X \subseteq \mathbb{R}$ で，(α) すべての可算でない閉集合と共通部分を持つが，(β) そのどれも部分として含んでいないようなものが存在する．

証明．　C_α, $\alpha < \mathfrak{c}$ を可算でない閉集合の並べ上げとする．

$\beta < \mathfrak{c}$ に関して，実数 r_β, $s_\beta \in \mathbb{R}$ を再帰的にとり

0. $r_\beta \neq s_\beta$;　　1. r_β, $s_\beta \in C_\beta$;
2. $r_\beta \notin \{r_\alpha, s_\alpha : \alpha < \beta\}$; $s_\beta \notin \{r_\alpha, s_\alpha : \alpha < \beta\}$

となるようする．これは，前々ページで述べた $\mathfrak{c}$ の性質 (a) と，前ページの (b), (c) から可能である．

$X = \{r_\beta : \beta < \mathfrak{c}\}$ とすれば，この X は求めていたようなものとなっている:　1. と X の定義から，X は条件 (α) を満たし，0., 2. と X の定義から X は条件 (β) を満たす．　□ (定理 4)

第二部に続く

D. ヒルベルト
David Hilbert
(1862 - 1943,
文久 2 年 – 昭和 18 年)

Wir müssen wissen,
Wir werden wissen.

我々は識らなくてはならない
そして必ずや識るに至るであろう

(1930, Königsberg)

Wir müssen wissen,
Wir werden wissen.

(1930, Königsberg)

D. ヒルベルト
David Hilbert
(1862 - 1943,
文久 2 年 – 昭和 18 年)

昨今，哲学者のような身振りや悟りきったうような言調で文明の没落について予言したり，科学的不可知論に逃げこんだりする人たちがいるが，彼等の言葉を決して信じるべきではない．我々にとって不可知論はあり得ないし，私見によれば，自然科学全体にとってもこれは全くあり得ないことである．ナンセンスな不可知論とは正反対に，我々の合言葉は

> 我々は識らなくてはならない，
> （そして必ずや）識るに至るであろう

というものである．

D. ヒルベルト
David Hilbert
(1862 - 1943,
文久 2 年 – 昭和 18 年)

Wir müssen wissen,
Wir werden wissen.

(1930, Königsberg)

昨今，哲学者のような身振りや悟りきったうような言調で文明の没落について予言したり，科学的不可知論に逃げこんだりする人たちがいるが，彼等の言葉を決して信じるべきではない．我々にとって不可知論はあり得ないし，私見によれば，自然科学全体にとってもこれは全くあり得ないことである．ナンセンスな不可知論とは正反対に，我々の合言葉は

> 我々は識らなくてはならない，
> （そして必ずや）識るに至るであろう

というものである．

数学の基礎としての集合論

- 集合論で，すべての数学理論が展開できるのだから，もし集合論が矛盾しているとすると，全数学の基礎がゆらいでしまう．
- 逆に，集合論が矛盾しないことがわかれば，全数学に対して安定した基礎づけがなされたことになり，少なくとも自己矛盾を含まない理論体系として，数学的な議論を安心して展開できる．
- ヒルベルトは，数学の論理的演繹を外からながめて，記号列の有限的かつ構成的な操作の体系（有限の立場）として分析することで，この体系が矛盾しないこと（無矛盾性）を証明する，という計画（ヒルベルトのプログラム）に，1920 年代（大正中期ごろ）から精力的に取組みはじめた．

1930 年代に入って，ヒルベルトの研究は実を結びはじめ，ヒルベルトと，ベルナイズ，アッカーマン，フォン・ノイマンといった彼の協力者たちは，弱い数論の体系や解析学（微分積分学）の古典的な部分を含む体系についての無矛盾性を確立した．これを推し進めてゆけばやがては数学のもっと大きな部分についても無矛盾性の確立ができそうに思えた．ところが，…

数学の基礎としての集合論

- 集合論で，すべての数学理論が展開できるのだから，もし集合論が矛盾しているとすると，全数学の基礎がゆらいでしまう．
- 逆に，集合論が矛盾しないことがわかれば，全数学に対して安定した基礎づけがなされたことになり，少なくとも自己矛盾を含まない理論体系として，数学的な議論を安心して展開できる．
- ヒルベルトは，数学の論理的演繹を外からながめて，記号列の有限的かつ構成的な操作の体系（有限の立場）として分析することで，この体系が矛盾しないこと（無矛盾性）を証明する，という計画（ヒルベルトのプログラム）に，1920 年代（大正中期ごろ）から精力的に取組みはじめた．

1930 年代に入って，ヒルベルトの研究は実を結びはじめ，ヒルベルトと，ベルナイズ，アッカーマン，フォン・ノイマンといった彼の協力者たちは，弱い数論の体系や解析学（微分積分学）の古典的な部分を含む体系についての無矛盾性を確立した．これを推し進めてゆけばやがては数学のもっと大きな部分についても無矛盾性の確立ができそうに思えた．ところが，…

数学の基礎としての集合論

- 集合論で，すべての数学理論が展開できるのだから，もし集合論が矛盾しているとすると，全数学の基礎がゆらいでしまう．
- 逆に，集合論が矛盾しないことがわかれば，全数学に対して安定した基礎づけがなされたことになり，少なくとも自己矛盾を含まない理論体系として，数学的な議論を安心して展開できる．
- ヒルベルトは，数学の論理的演繹を外からながめて，記号列の有限的かつ構成的な操作の体系（有限の立場）として分析することで，この体系が矛盾しないこと（無矛盾性）を証明する，という計画（ヒルベルトのプログラム）に，1920 年代（大正中期ごろ）から精力的に取組みはじめた．

1930 年代に入って，ヒルベルトの研究は実を結びはじめ，ヒルベルトと，ベルナイズ，アッカーマン，フォン・ノイマンといった彼の協力者たちは，弱い数論の体系や解析学（微分積分学）の古典的な部分を含む体系についての無矛盾性を確立した．これを推し進めてゆけばやがては数学のもっと大きな部分についても無矛盾性の確立ができそうに思えた．ところが，…

数学の基礎としての集合論

- 集合論で，すべての数学理論が展開できるのだから，もし集合論が矛盾しているとすると，全数学の基礎がゆらいでしまう．
- 逆に，集合論が矛盾しないことがわかれば，全数学に対して安定した基礎づけがなされたことになり，少なくとも自己矛盾を含まない理論体系として，数学的な議論を安心して展開できる．
- ヒルベルトは，数学の論理的演繹を外からながめて，記号列の有限的かつ構成的な操作の体系（有限の立場）として分析することで，この体系が矛盾しないこと（無矛盾性）を証明する，という計画（ヒルベルトのプログラム）に，1920 年代（大正中期ごろ）から精力的に取組みはじめた．

1930 年代に入って，ヒルベルトの研究は実を結びはじめ，ヒルベルトと，ベルナイズ，アッカーマン，フォン・ノイマンといった彼の協力者たちは，弱い数論の体系や解析学（微分積分学）の古典的な部分を含む体系についての無矛盾性を確立した．これを推し進めてゆけばやがては数学のもっと大きな部分についても無矛盾性の確立ができそうに思えた．ところが，…

数学の基礎としての集合論

- 集合論で，すべての数学理論が展開できるのだから，もし集合論が矛盾しているとすると，全数学の基礎がゆらいでしまう．
- 逆に，集合論が矛盾しないことがわかれば，全数学に対して安定した基礎づけがなされたことになり，少なくとも自己矛盾を含まない理論体系として，数学的な議論を安心して展開できる．
- ヒルベルトは，数学の論理的演繹を外からながめて，記号列の有限的かつ構成的な操作の体系（有限の立場）として分析することで，この体系が矛盾しないこと（無矛盾性）を証明する，という計画（ヒルベルトのプログラム）に，1920 年代（大正中期ごろ）から精力的に取組みはじめた．

1930 年代に入って，ヒルベルトの研究は実を結びはじめ，ヒルベルトと，ベルナイズ，アッカーマン，フォン・ノイマンといった彼の協力者たちは，弱い数論の体系や解析学（微分積分学）の古典的な部分を含む体系についての無矛盾性を確立した．これを推し進めてゆけばやがては数学のもっと大きな部分についても無矛盾性の確立ができそうに思えた．ところが，…

数学の基礎としての集合論

- 集合論で，すべての数学理論が展開できるのだから，もし集合論が矛盾しているとすると，全数学の基礎がゆらいでしまう．
- 逆に，集合論が矛盾しないことがわかれば，全数学に対して安定した基礎づけがなされたことになり，少なくとも自己矛盾を含まない理論体系として，数学的な議論を安心して展開できる．
- ヒルベルトは，数学の論理的演繹を外からながめて，記号列の有限的かつ構成的な操作の体系（有限の立場）として分析することで，この体系が矛盾しないこと（無矛盾性）を証明する，という計画（ヒルベルトのプログラム）に，1920 年代（大正中期ごろ）から精力的に取組みはじめた．

1930 年代に入って，ヒルベルトの研究は実を結びはじめ，ヒルベルトと，ベルナイズ，アッカーマン，フォン・ノイマンといった彼の協力者たちは，弱い数論の体系や解析学（微分積分学）の古典的な部分を含む体系についての無矛盾性を確立した．これを推し進めてゆけばやがては数学のもっと大きな部分についても無矛盾性の確立ができそうに思えた．ところが，…

数学の基礎としての集合論

- 集合論で，すべての数学理論が展開できるのだから，もし集合論が矛盾しているとすると，全数学の基礎がゆらいでしまう．
- 逆に，集合論が矛盾しないことがわかれば，全数学に対して安定した基礎づけがなされたことになり，少なくとも自己矛盾を含まない理論体系として，数学的な議論を安心して展開できる．
- ヒルベルトは，数学の論理的演繹を外からながめて，記号列の有限的かつ構成的な操作の体系（有限の立場）として分析することで，この体系が矛盾しないこと（無矛盾性）を証明する，という計画（ヒルベルトのプログラム）に，1920 年代（大正中期ごろ）から精力的に取組みはじめた．

1930 年代に入って，ヒルベルトの研究は実を結びはじめ，ヒルベルトと，ベルナイズ，アッカーマン，フォン・ノイマンといった彼の協力者たちは，弱い数論の体系や解析学（微分積分学）の古典的な部分を含む体系についての無矛盾性を確立した．これを推し進めてゆけばやがては数学のもっと大きな部分についても無矛盾性の確立ができそうに思えた．ところが，…

ゲーデルの不完全性定理

ところが，ゲーデルによって証明された次の定理により，ヒルベルトのプログラムは，ヒルベルトが最初に考えていたような形では，実現が不可能であることが明かになった．

定理 5 (K. ゲーデル, 1931 年（昭和 6 年）)

(1) 任意の，初等数論の体系を含む，具体的に与えられた公理系は,（それが矛盾しないなら）完全でない．つまり，この公理系で現われる概念のみを 用いて作られた主張 φ で，φ も，φ の否定 $\neg\varphi$ もこの公理系から証明できないようなものが存在する．

(2) 任意の，初等数論の体系を含む，具体的に与えられた公理系について，それが無矛盾であることを，その体系自身での議論で示すことはできない．

- 上の (1), (2) はそれぞれ（ゲーデルの）第一不完全性定理，第二不完全性定理 とよばれている．
- (1) でのような φ は，公理系から 独立 であるという．

ゲーデルの不完全性定理

ところが，ゲーデルによって証明された次の定理により，ヒルベルトのプログラムは，ヒルベルトが最初に考えていたような形では，実現が不可能であることが明かになった．

定理 5 (K. ゲーデル, 1931 年（昭和 6 年））

(1) 任意の，初等数論の体系を含む，具体的に与えられた公理系は,（それが矛盾しないなら）完全でない．つまり，この公理系で現われる概念のみを 用いて作られた主張 φ で，φ も，φ の否定 $\neg\varphi$ もこの公理系から証明できないようなものが存在する．

(2) 任意の，初等数論の体系を含む，具体的に与えられた公理系について，それが無矛盾であることを，その体系自身での議論で示すことはできない．

- 上の (1), (2) はそれぞれ（ゲーデルの）第一不完全性定理，第二不完全性定理 とよばれている．
- (1) でのような φ は，公理系から 独立 であるという．

ゲーデルの不完全性定理

ところが，ゲーデルによって証明された次の定理により，ヒルベルトのプログラムは，ヒルベルトが最初に考えていたような形では，実現が不可能であることが明かになった．

定理 5 (K. ゲーデル, 1931 年（昭和 6 年））

(1) 任意の，初等数論の体系を含む，具体的に与えられた公理系は,（それが矛盾しないなら）完全でない．つまり，この公理系で現われる概念のみを 用いて作られた主張 φ で，φ も，φ の否定 $\neg\varphi$ もこの公理系から証明できないようなものが存在する．

(2) 任意の，初等数論の体系を含む，具体的に与えられた公理系について，それが無矛盾であることを，その体系自身での議論で示すことはできない．

- 上の (1), (2) はそれぞれ（ゲーデルの）第一不完全性定理，第二不完全性定理 とよばれている．
- (1) でのような φ は，公理系から 独立 であるという．

ゲーデルの不完全性定理

ところが，ゲーデルによって証明された次の定理により，ヒルベルトのプログラムは，ヒルベルトが最初に考えていたような形では，実現が不可能であることが明かになった．

定理 5 (K. ゲーデル, 1931 年（昭和 6 年）)

(1) 任意の，初等数論の体系を含む，具体的に与えられた公理系は,（それが矛盾しないなら）完全でない．つまり，この公理系で現われる概念のみを 用いて作られた主張 φ で，φ も，φ の否定 $\neg\varphi$ もこの公理系から証明できないようなものが存在する．

(2) 任意の，初等数論の体系を含む，具体的に与えられた公理系について，それが無矛盾であることを，その体系自身での議論で示すことはできない．

- 上の (1), (2) はそれぞれ（ゲーデルの）第一不完全性定理，第二不完全性定理 とよばれている．
- (1) でのような φ は，公理系から 独立 であるという．

ゲーデルの不完全性定理

ところが，ゲーデルによって証明された次の定理により，ヒルベルトのプログラムは，ヒルベルトが最初に考えていたような形では，実現が不可能であることが明かになった．

定理 5 (K. ゲーデル, 1931 年（昭和 6 年））

(1) 任意の，初等数論の体系を含む，具体的に与えられた公理系は,（それが矛盾しないなら）完全でない．つまり，この公理系で現われる概念のみを 用いて作られた主張 φ で，φ も，φ の否定 $\neg\varphi$ もこの公理系から証明できないようなものが存在する．

(2) 任意の，初等数論の体系を含む，具体的に与えられた公理系について，それが無矛盾であることを，その体系自身での議論で示すことはできない．

- 上の (1), (2) はそれぞれ（ゲーデルの）第一不完全性定理，第二不完全性定理 とよばれている．
- (1) でのような φ は，公理系から 独立 であるという．

ゲーデルの不完全性定理 (2)

K. ゲーデル
Kurt Gödel
(1906 – 1978
明治 39 年 – 昭和 53 年)

ゲーデルの不完全性定理 (3)

定理 5 (K. ゲーデル, 1931 年（昭和 6 年））

(1) 任意の，初等数論の体系を含む，具体的に与えられた公理系は,（それが矛盾しないなら）完全でない．つまり，この公理系で現われる概念のみを 用いて作られた主張 φ で，φ も，φ の否定 $\neg\varphi$ もこの公理系から証明できないようなものが存在する．

(2) 任意の，初等数論の体系を含む，具体的に与えられた公理系について，それが無矛盾であることを，その体系自身での議論で示すことはできない．

- ヒルベルトの「有限の立場」の厳格な解釈は，いずれにしても初等数論の中で展開できるものとなるため，第二不完全性定理により初等数論より強い体系（たとえば集合論の体系もこれにあてはまる）の無矛盾性を，ヒルベルトが最初に構想したようなやり方で示すことはできない．

ゲーデルの不完全性定理 (3)

定理 5 (K. ゲーデル, 1931 年（昭和 6 年）)

(1) 任意の，初等数論の体系を含む，具体的に与えられた公理系は,（それが矛盾しないなら）完全でない．つまり，この公理系で現われる概念のみを 用いて作られた主張 φ で，φ も，φ の否定 $\neg\varphi$ もこの公理系から証明できないようなものが存在する．

(2) 任意の，初等数論の体系を含む，具体的に与えられた公理系について，それが無矛盾であることを，その体系自身での議論で示すことはできない．

- ヒルベルトの「有限の立場」の厳格な解釈は，いずれにしても初等数論の中で展開できるものとなるため，第二不完全性定理により初等数論より強い体系（たとえば集合論の体系もこれにあてはまる）の無矛盾性を，ヒルベルトが最初に構想したようなやり方で示すことはできない．

ゲーデルの不完全性定理と集合論

- 第二不完全性定理により，集合論の無矛盾性の数学的な証明はまずあり得ないことがわかる．　しかし，集合論の無矛盾性の“状況証拠”や“間接証拠”は沢山そろっている．

- 初等的な自然数論と，その（無矛盾性ということに関しては等価な）拡張などを含むいくつかの体系では，有限の立場の自然な拡張を用いて，その無矛盾性を証明することができる (Gentzen, Takeuti, Arai etc.) これらの結果から，通常の（集合論を積極的に使わない）数学については，無矛盾性の保証がほぼ得られている，と考えられる．

- 集合論の研究は，特に 20 世紀の後半以降，天才的な数学者が多く参加して爆発的に進んでいる．そこで何の矛盾もみつかっていない，ということは，矛盾が出るとしても,（普通の才能の数学者があがいたくらいでは）そう簡単には出てこないだろう，と考えてよい．

- 集合論の自然な拡張の系列 $T_0 \sqsubseteq T_2 \sqsubseteq T_3 \sqsubseteq \cdots$ で，T_{i+1} の中で T_i の無矛盾性が証明できるようなものがみつかっている．関連する研究が進んでいるが，その研究結果の整合性は，集合論の無矛盾性の状況証拠とみなすこともできる．

ゲーデルの不完全性定理と集合論

- 第二不完全性定理により，集合論の無矛盾性の数学的な証明はまずあり得ないことがわかる． しかし，集合論の無矛盾性の "状況証拠" や "間接証拠" は沢山そろっている．

- 初等的な自然数論と，その（無矛盾性ということに関しては等価な）拡張などを含むいくつかの体系では，有限の立場の自然な拡張を用いて，その無矛盾性を証明することができる (Gentzen, Takeuti, Arai etc.) これらの結果から，通常の（集合論を積極的に使わない）数学については，無矛盾性の保証がほぼ得られている，と考えられる．

- 集合論の研究は，特に 20 世紀の後半以降，天才的な数学者が多く参加して爆発的に進んでいる．そこで何の矛盾もみつかっていない，ということは，矛盾が出るとしても,（普通の才能の数学者があがいたくらいでは）そう簡単には出てこないだろう，と考えてよい．

- 集合論の自然な拡張の系列 $T_0 \sqsubseteq T_2 \sqsubseteq T_3 \sqsubseteq \cdots$ で， T_{i+1} の中で T_i の無矛盾性が証明できるようなものがみつかっている．関連する研究が進んでいるが，その研究結果の整合性は，集合論の無矛盾性の状況証拠とみなすこともできる．

ゲーデルの不完全性定理と集合論

- 第二不完全性定理により，集合論の無矛盾性の数学的な証明はまずあり得ないことがわかる． しかし，集合論の無矛盾性の “状況証拠” や “間接証拠” は沢山そろっている．

- 初等的な自然数論と，その（無矛盾性ということに関しては等価な）拡張などを含むいくつかの体系では，有限の立場の自然な拡張を用いて，その無矛盾性を証明することができる (Gentzen, Takeuti, Arai etc.) これらの結果から，通常の（集合論を積極的に使わない）数学については，無矛盾性の保証がほぼ得られている，と考えられる．

- 集合論の研究は，特に 20 世紀の後半以降，天才的な数学者が多く参加して爆発的に進んでいる．そこで何の矛盾もみつかっていない，ということは，矛盾が出るとしても,（普通の才能の数学者があがいたくらいでは）そう簡単には出てこないだろう，と考えてよい．

- 集合論の自然な拡張の系列 $T_0 \sqsubseteq T_2 \sqsubseteq T_3 \sqsubseteq \cdots$ で， T_{i+1} の中で T_i の無矛盾性が証明できるようなものがみつかっている．関連する研究が進んでいるが，その研究結果の整合性は，集合論の無矛盾性の状況証拠とみなすこともできる．

ゲーデルの不完全性定理と集合論

- 第二不完全性定理により，集合論の無矛盾性の数学的な証明はまずあり得ないことがわかる． しかし，集合論の無矛盾性の "状況証拠" や "間接証拠" は沢山そろっている．

- 初等的な自然数論と，その（無矛盾性ということに関しては等価な）拡張などを含むいくつかの体系では，有限の立場の自然な拡張を用いて，その無矛盾性を証明することができる (Gentzen, Takeuti, Arai etc.) これらの結果から，通常の（集合論を積極的に使わない）数学については，無矛盾性の保証がほぼ得られている，と考えられる．

- 集合論の研究は，特に 20 世紀の後半以降，天才的な数学者が多く参加して爆発的に進んでいる．そこで何の矛盾もみつかっていない，ということは，矛盾が出るとしても,（普通の才能の数学者があがいたくらいでは）そう簡単には出てこないだろう，と考えてよい．

- 集合論の自然な拡張の系列 $T_0 \sqsubseteq T_2 \sqsubseteq T_3 \sqsubseteq \cdots$ で，T_{i+1} の中で T_i の無矛盾性が証明できるようなものがみつかっている．関連する研究が進んでいるが，その研究結果の整合性は，集合論の無矛盾性の状況証拠とみなすこともできる．

ゲーデルの不完全性定理と集合論

▶ 第二不完全性定理により，集合論の無矛盾性の数学的な証明はまずあり得ないことがわかる．　しかし，集合論の無矛盾性の“状況証拠”や“間接証拠”は沢山そろっている．

- 初等的な自然数論と，その（無矛盾性ということに関しては等価な）拡張などを含むいくつかの体系では，有限の立場の自然な拡張を用いて，その無矛盾性を証明することができる (Gentzen, Takeuti, Arai etc.) これらの結果から，通常の（集合論を積極的に使わない）数学については，無矛盾性の保証がほぼ得られている，と考えられる．
- 集合論の研究は，特に 20 世紀の後半以降，天才的な数学者が多く参加して爆発的に進んでいる．そこで何の矛盾もみつかっていない，ということは，矛盾が出るとしても，(普通の才能の数学者があがいたくらいでは）そう簡単には出てこないだろう，と考えてよい．
- 集合論の自然な拡張の系列 $T_0 \sqsubseteq T_2 \sqsubseteq T_3 \sqsubseteq \cdots$ で，T_{i+1} の中で T_i の無矛盾性が証明できるようなものがみつかっている．関連する研究が進んでいるが，その研究結果の整合性は，集合論の無矛盾性の状況証拠とみなすこともできる．

ゲーデルの不完全性定理と集合論

- 第二不完全性定理により，集合論の無矛盾性の数学的な証明はまずあり得ないことがわかる．　しかし，集合論の無矛盾性の "状況証拠" や "間接証拠" は沢山そろっている．

- 初等的な自然数論と，その（無矛盾性ということに関しては等価な）拡張などを含むいくつかの体系では，有限の立場の自然な拡張を用いて，その無矛盾性を証明することができる (Gentzen, Takeuti, Arai etc.) これらの結果から，通常の（集合論を積極的に使わない）数学については，無矛盾性の保証がほぼ得られている，と考えられる．
- 集合論の研究は，特に 20 世紀の後半以降，天才的な数学者が多く参加して爆発的に進んでいる．そこで何の矛盾もみつかっていない，ということは，矛盾が出るとしても,（普通の才能の数学者があがいたくらいでは）そう簡単には出てこないだろう，と考えてよい．
- 集合論の自然な拡張の系列 $T_0 \sqsubseteq T_2 \sqsubseteq T_3 \sqsubseteq \cdots$ で，T_{i+1} の中で T_i の無矛盾性が証明できるようなものがみつかっている．関連する研究が進んでいるが，その研究結果の整合性は，集合論の無矛盾性の状況証拠とみなすこともできる．

ゲーデルの不完全性定理と集合論

▶ 第二不完全性定理により，集合論の無矛盾性の数学的な証明はまずあり得ないことがわかる．　しかし，集合論の無矛盾性の“状況証拠”や“間接証拠”は沢山そろっている．

- 初等的な自然数論と，その（無矛盾性ということに関しては等価な）拡張などを含むいくつかの体系では，有限の立場の自然な拡張を用いて，その無矛盾性を証明することができる (Gentzen, Takeuti, Arai etc.) これらの結果から，通常の（集合論を積極的に使わない）数学については，無矛盾性の保証がほぼ得られている，と考えられる．
- 集合論の研究は，特に 20 世紀の後半以降，天才的な数学者が多く参加して爆発的に進んでいる．そこで何の矛盾もみつかっていない，ということは，矛盾が出るとしても,（普通の才能の数学者があがいたくらいでは）そう簡単には出てこないだろう，と考えてよい．
- 集合論の自然な拡張の系列 $T_0 \sqsubseteq T_2 \sqsubseteq T_3 \sqsubseteq \cdots$ で，T_{i+1} の中で T_i の無矛盾性が証明できるようなものがみつかっている．関連する研究が進んでいるが，その研究結果の整合性は，集合論の無矛盾性の状況証拠とみなすこともできる．

ゲーデルの不完全性定理と集合論

- 第二不完全性定理により，集合論の無矛盾性の数学的な証明はまずあり得ないことがわかる． しかし，集合論の無矛盾性の"状況証拠"や"間接証拠"は沢山そろっている．

- 初等的な自然数論と，その（無矛盾性ということに関しては等価な）拡張などを含むいくつかの体系では，有限の立場の自然な拡張を用いて，その無矛盾性を証明することができる (Gentzen, Takeuti, Arai etc.) これらの結果から，通常の（集合論を積極的に使わない）数学については，無矛盾性の保証がほぼ得られている，と考えられる．

- 集合論の研究は，特に 20 世紀の後半以降，天才的な数学者が多く参加して爆発的に進んでいる．そこで何の矛盾もみつかっていない，ということは，矛盾が出るとしても，(普通の才能の数学者があがいたくらいでは）そう簡単には出てこないだろう，と考えてよい．

- 集合論の自然な拡張の系列 $T_0 \sqsubseteq T_2 \sqsubseteq T_3 \sqsubseteq \cdots$ で，T_{i+1} の中で T_i の無矛盾性が証明できるようなものがみつかっている．関連する研究が進んでいるが，その研究結果の整合性は，集合論の無矛盾性の状況証拠とみなすこともできる．

ゲーデルの不完全性定理と集合論 (2)

- 第一不完全性定理により，集合論は，無矛盾だとすると，完全ではない．つまり，集合論から証明できないし，その否定も集合論から証明できないような命題（集合論から独立な命題）が存在する．
- 第一不完全性定理の証明では，与えられた体系から独立な命題の作り方が示されるが，ここで作られるのは非常に人工的な命題である．そこで，（集合論が無矛盾だとすると）どんな数学的な内容の命題が集合論の公理系から独立なのか？ が，新しい自然な数学の問題として提起されたことになる．
- 集合論の公理系に，ある独立命題を加えたとき，その拡張された体系にも第一不完全性定理が適応できるので，これも完全でない．したがって，この拡張された体系から独立な数学的な命題は何か？ という問題がさらに提起される etc.
- 実際に，このような問題を考える研究は，独立性証明 とよばれ，ゲーデルの不完全性定理以降，集合論で活発に研究されている．

ゲーデルの不完全性定理と集合論 (2)

- 第一不完全性定理により，集合論は，無矛盾だとすると，完全ではない．つまり，集合論から証明できないし，その否定も集合論から証明できないような命題（集合論から独立な命題）が存在する．

- 第一不完全性定理の証明では，与えられた体系から独立な命題の作り方が示されるが，ここで作られるのは非常に人工的な命題である．そこで，（集合論が無矛盾だとすると）どんな数学的な内容の命題が集合論の公理系から独立なのか? が，新しい自然な数学の問題として提起されたことになる．

- 集合論の公理系に，ある独立命題を加えたとき，その拡張された体系にも第一不完全性定理が適応できるので，これも完全でない．したがって，この拡張された体系から独立な数学的な命題は何か? という問題がさらに提起される etc.

- 実際に，このような問題を考える研究は，独立性証明 とよばれ，ゲーデルの不完全性定理以降，集合論で活発に研究されている．

ゲーデルの不完全性定理と集合論 (2)

- 第一不完全性定理により，集合論は，無矛盾だとすると，完全ではない．つまり，集合論から証明できないし，その否定も集合論から証明できないような命題（集合論から独立な命題）が存在する．
- 第一不完全性定理の証明では，与えられた体系から独立な命題の作り方が示されるが，ここで作られるのは非常に人工的な命題である．そこで，（集合論が無矛盾だとすると）どんな数学的な内容の命題が集合論の公理系から独立なのか？ が，新しい自然な数学の問題として提起されたことになる．
- 集合論の公理系に，ある独立命題を加えたとき，その拡張された体系にも第一不完全性定理が適応できるので，これも完全でない．したがって，この拡張された体系から独立な数学的な命題は何か？ という問題がさらに提起される etc.
- 実際に，このような問題を考える研究は，独立性証明 とよばれ，ゲーデルの不完全性定理以降，集合論で活発に研究されている．

ゲーデルの不完全性定理と集合論 (2)

- 第一不完全性定理により，集合論は，無矛盾だとすると，完全ではない．つまり，集合論から証明できないし，その否定も集合論から証明できないような命題（集合論から独立な命題）が存在する．
- 第一不完全性定理の証明では，与えられた体系から独立な命題の作り方が示されるが，ここで作られるのは非常に人工的な命題である．そこで，（集合論が無矛盾だとすると）どんな数学的な内容の命題が集合論の公理系から独立なのか？が，新しい自然な数学の問題として提起されたことになる．
- 集合論の公理系に，ある独立命題を加えたとき，その拡張された体系にも第一不完全性定理が適応できるので，これも完全でない．したがって，この拡張された体系から独立な数学的な命題は何か？という問題がさらに提起される etc.
- 実際に，このような問題を考える研究は，独立性証明とよばれ，ゲーデルの不完全性定理以降，集合論で活発に研究されている．

ゲーデルの不完全性定理と集合論 (2)

- 第一不完全性定理により，集合論は，無矛盾だとすると，完全ではない．つまり，集合論から証明できないし，その否定も集合論から証明できないような命題（集合論から独立な命題）が存在する．
- 第一不完全性定理の証明では，与えられた体系から独立な命題の作り方が示されるが，ここで作られるのは非常に人工的な命題である．そこで，（集合論が無矛盾だとすると）どんな数学的な内容の命題が集合論の公理系から独立なのか? が，新しい自然な数学の問題として提起されたことになる．
- 集合論の公理系に，ある独立命題を加えたとき，その拡張された体系にも第一不完全性定理が適応できるので，これも完全でない．したがって，この拡張された体系から独立な数学的な命題は何か? という問題がさらに提起される etc.
- 実際に，このような問題を考える研究は，独立性証明 とよばれ，ゲーデルの不完全性定理以降，集合論で活発に研究されている．

ゲーデルの不完全性定理と集合論 (2)

- 第一不完全性定理により，集合論は，無矛盾だとすると，完全ではない．つまり，集合論から証明できないし，その否定も集合論から証明できないような命題（集合論から独立な命題）が存在する．
- 第一不完全性定理の証明では，与えられた体系から独立な命題の作り方が示されるが，ここで作られるのは非常に人工的な命題である．そこで，（集合論が無矛盾だとすると）どんな数学的な内容の命題が集合論の公理系から独立なのか？が，新しい自然な数学の問題として提起されたことになる．
- 集合論の公理系に，ある独立命題を加えたとき，その拡張された体系にも第一不完全性定理が適応できるので，これも完全でない．したがって，この拡張された体系から独立な数学的な命題は何か？という問題がさらに提起される etc.
- 実際に，このような問題を考える研究は，独立性証明とよばれ，ゲーデルの不完全性定理以降，集合論で活発に研究されている．

独立命題の例

- 『$\mathbb{R}$ のサイズは $\mathbb{N}$ のサイズの次の無限濃度になっている』（連続体仮説） は，集合論の公理系から独立である（ゲーデル，コーエン）．

- （測度論を多少知っている人のための例）第 I 部で触れた，ベルンシュタインの定理での集合は濃度 $\mathfrak{c}$ の非可測集合である．

  そこで，『すべての非可測集合は濃度 $\mathfrak{c}$ を持つ』を考えると，この命題は連続体仮説から導かれるが，連続体仮説の否定を仮定したときには，（集合論の公理系に連続体仮説の否定を加えた体系から）独立である．

- 上のような主張の証明には，数理論理学の知識が不可欠になるが，日本の数学科では，数理論理学の勉強は通常は全くしないので，このことが，集合論を他の数学分野の数学者から隔離する原因の一つになっている．

独立命題の例

- 『$\mathbb{R}$ のサイズは $\mathbb{N}$ のサイズの次の無限濃度になっている』(連続体仮説) は，集合論の公理系から独立である (ゲーデル，コーエン)．

- (測度論を多少知っている人のための例) 第 I 部で触れた，ベルンシュタインの定理での集合は濃度 $\mathfrak{c}$ の非可測集合である．

そこで，『すべての非可測集合は濃度 $\mathfrak{c}$ を持つ』を考えると，この命題は連続体仮説から導かれるが，連続体仮説の否定を仮定したときには，(集合論の公理系に連続体仮説の否定を加えた体系から) 独立である．

- 上のような主張の証明には，数理論理学の知識が不可欠になるが，日本の数学科では，数理論理学の勉強は通常は全くしないので，このことが，集合論を他の数学分野の数学者から隔離する原因の一つになっている．

独立命題の例

- 『$\mathbb{R}$ のサイズは $\mathbb{N}$ のサイズの次の無限濃度になっている』（連続体仮説） は，集合論の公理系から独立である（ゲーデル，コーエン）．

- （測度論を多少知っている人のための例）第 I 部で触れた，ベルンシュタインの定理での集合は濃度 $\mathfrak{c}$ の非可測集合である．

そこで,『すべての非可測集合は濃度 $\mathfrak{c}$ を持つ』を考えると，この命題は連続体仮説から導かれるが，連続体仮説の否定を仮定したときには,（集合論の公理系に連続体仮説の否定を加えた体系から）独立である．

- 上のような主張の証明には，数理論理学の知識が不可欠になるが，日本の数学科では，数理論理学の勉強は通常は全くしないので，このことが，集合論を他の数学分野の数学者から隔離する原因の一つになっている．

独立命題の例

- 『$\mathbb{R}$ のサイズは $\mathbb{N}$ のサイズの次の無限濃度になっている』（連続体仮説） は，集合論の公理系から独立である（ゲーデル，コーエン）.

- （測度論を多少知っている人のための例）第 I 部で触れた，ベルンシュタインの定理での集合は濃度 $\mathfrak{c}$ の非可測集合である.

そこで,『すべての非可測集合は濃度 $\mathfrak{c}$ を持つ』を考えると，この命題は連続体仮説から導かれるが，連続体仮説の否定を仮定したときには,（集合論の公理系に連続体仮説の否定を加えた体系から）独立である.

- 上のような主張の証明には，数理論理学の知識が不可欠になるが，日本の数学科では，数理論理学の勉強は通常は全くしないので，このことが，集合論を他の数学分野の数学者から隔離する原因の一つになっている.

ゲーデルの不完全性定理と集合論 — 結語

- 集合論から独立な命題と，そのような命題の間の関係を調べてゆくと，無限に関する数学的な知識が深まり，"集合論の正しい拡張" が何であるべきかがより明らかになってくることが期待できる．

第一不完全性定理が集合論にもたらしたものは,「不完全」という否定的なファクターであるよりは，むしろ，集合論，あるいは数学の

open endedness （未来へ無限に開かれていること）

であるように思える．

ゲーデルの不完全性定理と集合論 — 結語

- 集合論から独立な命題と，そのような命題の間の関係を調べてゆくと，無限に関する数学的な知識が深まり，“集合論の正しい拡張” が何であるべきかがより明らかになってくることが期待できる．

第一不完全性定理が集合論にもたらしたものは,「不完全」という否定的なファクターであるよりは，むしろ，集合論，あるいは数学の

open endedness （未来へ無限に開かれていること）

であるように思える．

ゲーデルの不完全性定理と集合論 — 結語

- 集合論から独立な命題と，そのような命題の間の関係を調べてゆくと，無限に関する数学的な知識が深まり，“集合論の正しい拡張” が何であるべきかがより明らかになってくることが期待できる．

第一不完全性定理が集合論にもたらしたものは,「不完全」という否定的なファクターであるよりは，むしろ，集合論，あるいは数学の

open endedness （未来へ無限に開かれていること）

であるように思える．

この意味で . . .

D. ヒルベルト
David Hilbert
(1862 - 1943,
文久 2 年 – 昭和 18 年)

Wir müssen wissen,
Wir werden wissen.

我々は識らなくてはならない
そして必ずや識るに至るであろう

(1930, Königsberg)