

この文書は,

[https://fuchino.ddo.jp/barcelona.html#08.04.14\(%E6%9C%8812:30\(MEST\)\)](https://fuchino.ddo.jp/barcelona.html#08.04.14(%E6%9C%8812:30(MEST)))

で述べた, ある (既に出版されている) 本の日本語への翻訳 (以下, この翻訳を [K] とよぶことにする) の, (修復不可能とも言える多くの) 問題の所存を例示する目的で書かれたものです. そこでも述べたように, 批判ではあっても, 個人攻撃が目的の文書ではないので, そのような誤解をさけるために, (伏せ字などという野暮なことはせずに, しかし) 訳者や出版社などの実名を挙げることは避けるような書き方をしています.

(初出: Apr 19 2008, 最終更新日: 2022 年 09 月 13 日 (18:22))

[K] の p.163～ の訳文 .....	p. 1
[K] の原著の対応する箇所 .....	p. 6
S.F. による対応する個所の試訳 .....	p.10
[K] の訳文の問題点の指摘 .....	p.15

### [K] の p.163～ の訳文:

以下の [K] の訳文中, 朱色で示したところが, p.15 以降で問題点を指摘している部分である. すべての問題点が指摘しつくされていないわけではない. また, 朱色の部分で, 複数の異なる種類の問題点が重複して現われているものもある.

## 第 6 章 「今や、集合論だ!」 (1937-1939)

第 3 章でざっと見たとおり、三角級数の研究の産物としてカントールによって創造されたときから、1908 年にツェルメロによって公理化が与えられたときまでが、集合論の歴史の初期といえる。カントールがはじめに予測した (後に証明しようとしたが失敗した) のは、任意の実数の非可算集合は自然数全体の集合と 1 対 1 対応がつくことと任意の集合は整列可能であることであった。ヒルベルトがはじめてこの 2 つの問題に当時の数学者共同体の注意を促した。次の世紀の数学者に出した 23 の問題 [ヒルベルトの問題, 72-73 頁参照] のいちばん初めに、この 2 つの問題を一緒にして挙げたのである。ツェルメロは選択公理から整列可能性を導くことに成功した。彼は選択公理のもつ基礎的な性格を認識した最初の人間であった。

グレゴリー・H・ムーアは、選択公理とその数多くの変型の間、複雑に絡み合った分岐を詳細に確かめていくことを通して、それ以降の論争の信頼できる歴史を書いている [1]。ムーアの説明は以下の頁での議論の基礎である。

この1908年から30年にかけての集合論の発展に関する議論は、この分野に関するゲーデルの後期の貢献を真に理解するための本質となるものである。

ツェルメロがはじめて集合論を公理化したのは論文1908bにおいてであった。とはいえ、彼がはじめてこのような公理化の必要性を提唱した人物というわけではない。すでに1896年にイタリアの数学者チェザーレ・ブラリ=フォルテイが公理化をしている。その当時はまださまざまな集合論のパラドックスは現われていなかった。実際、ブラリ=フォルテイは2つの公理の候補を挙げているが、公理を体系化して与えたわけではない。同様に、「今から思うとツェルメロの和集合の公理と分離公理と同じに思える命題」が、既にカントールからデデキント宛の1899年の書簡に見られるのである。しかし、この場合は「カントールが [これらの命題を] 必要な仮定と考えていたという証拠はない」[2]。この意味で、ツェルメロは現在のような集合論の明示的な公理化を提唱した最初の人物なのである。

ツェルメロの公理化は1階述語論理(現在では、この枠組みのなかで集合論の公理は捉えなおされている)の正確な考察よりも20年あまり先んじていた。そのため、彼の公理系は現在ののではない。むしろ、その7つの公理は多くの「基礎的定義」によって膨らまされている。例えば「集合論は、ある領域を考察する……その領域は個体からなり、……個体は対象と呼ばれる……対象のなかには集合が存在する」<sup>\*1</sup>とか、対象のあるものの中には「 $a \in b$ という形のある種の基礎的な関係が成立している」(この場合、 $b$ は集合であり、 $a$ はその要素であると考えられる)といったようなものである。通常の部分集合の概念に加えてツェルメロは確定的性質(definite property)という概念を導入している。その1つは「公理と論理の普遍的に妥当する規則によって」「その性質が成立するか否かを」「領域の基礎的な関係から」決定することができる、というものであった[3](実効的にはこれらの関係から決定可能な性質のことである)。公理そのものは(ちょっと現代風に直してあるが)つぎのようなものであった。

- I (外延性の公理)  $M$  と  $N$  がともに集合であり、 $M \subset N$  と  $N \subset M$  (つまり、 $M$  のすべての要素は  $N$  の要素であることとその逆) が成立しているならば、 $N = M$  である。集合はその要素によって完全に決定される。
- II (初等集合の公理) いかなる要素も含まない集合(空集合)が存在する。 $A$  が領域の任意の対象であるとき、 $a$  を唯一の要素とする集合

---

<sup>\*1</sup>たとえばツェルメロは、それ自体は集合ではない対象が領域にあることを許している。このような原要素(urlement)は集合の元として出現しうるとはいえ、それ以上のことは公理からはなにもわからない。このような要素の存在論的ステータスはまったく特定されない。

$\{a\}$  が存在する。 $a$  と  $b$  が領域の任意の2つの対象であるとき、ちょうど  $a$  と  $b$  だけを要素とする集合  $\{a, b\}$  が存在する。

- III (分離公理) 命題関数  $F(x)$  が集合  $M$  の任意の要素  $x$  について確定しているときはいつでも、 $M$  は  $F(x)$  が真であるような  $M$  の要素を要素とする部分集合を持つ。
- IV (べき集合の公理) 任意の集合に対して、その集合の部分集合 (のすべて) を要素とする別のある集合 (べき集合) が対応している。
- V (和集合の公理) 任意の集合に対して、その集合の要素の要素 (のすべて) を要素とする集合 (和集合) が対応している。
- VI (選択公理) 集合  $M$  の要素がすべて集合であり、それらの集合は互いに素 (disjoint) であり、どれも空でないとき、 $M$  の和集合は、 $M$  の各要素とちょうど1個だけ共通要素をもつような部分集合を少なくとも1つ持っている。
- VII (無限公理) 領域には、空集合を要素とし、 $a$  を要素として含むならば  $\{a\}$  も要素として含む集合が少なくとも1つ存在する。

ムーアによれば、「ツェルメロは公理の [特定の] 選択にあたり、それらからカントール集合論の主要定理が得られるという以外の明確な理論的根拠を示していない」[4]。彼はカントール集合論、とくに集合を「ある種の仕方であまりよく区別された、われわれの感覚や……思考の対象からなり、全体をなしている集まり」とする彼の捉え方は、「ある種のさまざまな矛盾」によって足元を崩されてしまった、と見なしていたが、カントールの原理を制限することによって矛盾を避け、価値あるものすべてを保持することができると考えた。ツェルメロは自分の公理系が無矛盾であることを「厳密に証明することはいまだ……できていない」と認めているが、それでも「[自分の] 原理を採用すれば、今まで見いだされた二律背反はことごとく消え去る」仕方を示して見せようと努力した。とくに、分離公理は集合が独立に定義される」ことを禁じ、「既に与えられた集合から部分集合として分離」されたものであることのみを許すもので、これ故に「「すべての集合の集合」とか「すべての順序数の集合」といった矛盾した概念」は排除される、と注意している。同様にして、分離に使われる性質は確定的でなければならないという要求によって、ちょうどその頃起こったリシャールのパラドックスのような二律背反は禁止されると指摘している。無矛盾性と独立性という「より深い問題」に関しては、「少なくとも、……将来の研究者のための、……骨の折れる地ならしをした」だろうという希望を表明している。

実際、このような質問がなされるまでには長い年月が必要だった。とかくするうちに、選択公理をより大きな集合論の枠組みのなかに埋め込むこと

によって整列可能定理を受け容れてもらうようにしようというツェルメロの努力は、彼に対する批評を沈黙させはしなかった。むしろ分離公理、とくにそこに含まれる「確定的性質」の概念は、さらなる論争を引き起こしただけであった。バートランド・ラッセルとフィリップ・ジュルダンはツェルメロの公理化を私的に批判したが、ポアンカレとワイルは公けの場で批判したのである(後者は「**確定的性質**」の概念をより正確にすることで、**構成主義的な批判**になっている)。ドイツ以外ではツェルメロの公理化は全く受け容れられなかった。

ツェルメロの同国人のなかで、彼の公理化を受け容れた**数少ない一人**はアブラハム・フレンケルだった。1919年、**フレンケルは集合論の入門的教科書**を出版し、そこにツェルメロの体系をそのまま採用した。そこでは、分離公理はラッセル集合  $\{x : x \notin x\}$  の構成を禁止するが、自分自身を要素とする集合(のみならず、もっと一般的に、無限下降  $\in$  列の頂点にある集合  $\dots \in M_n \in \dots \in M_3 \in M_2 \in M_1$ ) を禁じてはいないことは全く考慮していない(あるいは気づいていない)。

ロシアのデイミトリー・ミリマノフはこの可能性を2年前に指摘していた。彼はこのような集合を「**異常**」と呼んだが、このような集合の存在を欠陥というよりもむしろ興味深いものと受け取っていたのは明らかである。しかしながら1922年フレンケルとスコーレムはそれぞれ独立にツェルメロの体系のもっと深刻な欠陥を発見した。この公理系は**数学的に興味深いある種の集合の構成**(とくに「自然数集合  $\mathbb{N}$  から始まる」  $\{\mathbb{N}, \rho(\mathbb{N}), \rho(\rho(\mathbb{N})), \dots\}$ 、ここで  $\rho$  はべき集合をつくる演算子を表す)を許していないのであった。

**この過失を手直しするために**フレンケルは論文1922で新しい公理を提唱した。これが置換公理であり、与えられた集合の各要素を領域の対象で置き換えるときはいつでも、その結果得られるものは集合である、というものである。ほとんど同じ時期、スコーレムは1923bで同じ原理を現在1階述語論理として知られる枠組みのなかでもっと正確に定式化した。彼は、とくに「**確定的**」性質を集合論の言語(関係記号としては  $\in$  と  $=$  のみを含む)の1階論理式で定義される性質と理解していた。 $x$  と  $y$  を自由変数とするそのような論理式  $A(x, y)$  が与えられたとき、スコーレムの公理は、 $A$  が**所与の集合**  $M$  上で関数的である(つまり任意の  $x \in M$  に対しての  $A(x, y)$  を真とする  $y$  が高々1つ存在する)のであれば、 $M$  の  $A$  による像(つまり  $\{y : \exists x(x \in M \wedge A(x, y))\}$ )も集合であると主張する<sup>\*2</sup>。

<sup>\*2</sup>実際、1917年の論文でミリマノフは、フレンケルとスコーレムに先だって、所与の集合の要素と1対1対応にある通常集合のいかなる集まりもそれ自身通常集合である、という命題を公理のように採用している。しかしながら彼は、この命題を公理というよりは事実として述べている。カントールもデデキントへの別の書簡で本質的には同じことを主張している。

別の2つの論文でフレンケルは原要素を含む話題を扱っている。論文1921ではこのような非集合を排除する制限公理を提唱しているが、1922bでは選択公理が他の公理から独立であることを示す際に原要素を本質的に使っている。最終的には原要素を使わないほうが有利だとわかり、フレンケルの制限公理は形式化のなかに暗黙に埋め込まれていったのであり、他の公理によって支配されるものはなにもものも存在しないと考えられた。その結果、選択公理の独立性は以前よりずっと難しい未解決問題となって再登場した。ゲーデルはこの問題に1940年代初めに多くの努力を傾注したのだが、限定的にしな解決できなかった。

[K] の原著の対応する箇所:

'Jetzt, Mengenlehre"  
(1937-1939)

THE EARLY HISTORY of set theory, from its founding by Cantor as an outgrowth of his studies of trigonometric series to its axiomatization by Zermelo in 1908, has been briefly sketched in chapter III. It will be recalled that it was Cantor who first conjectured (and later attempted unsuccessfully to prove) both that every uncountable set of real numbers can be put in one-to-one correspondence with the set of all real numbers and that every set can be well-ordered; Hilbert who first called those two problems to the attention of the mathematical community, when he listed them together as the first of the twentythree open problems that he posed to mathematicians of the coming century; and Zermelo who succeeded in deriving the well-ordering property from the Axiom of Choice, a principle whose fundamental character he was the first to recognize.

A definitive history of the controversy that ensued thereafter, together with a detailed examination of the complexly interwoven ramifications of the Axiom of Choice and its numerous variants, has been given by Gregory H. Moore [283]. His account is the basis for the discussion given in the next few pages, which is devoted to a summary of the developments in set theory during the years 1908-30 that are essential to a proper understanding of Gödel's later contributions to the subject.

Zermelo's first axiomatization for set theory appeared in his paper *1908b*. He was not the first, however, to suggest the need for such an axiomatization: The Italian mathematician Cesare Burali-Forti had already done so in 1896, well before the set-theoretic paradoxes came to the fore. Indeed, Burali-Forti had proposed two possible candidates for axioms; but he had not given an axiom system. Similarly, "certain propositions which now seem similar to ... Zermelo's Axioms of Union and Separation" had also appeared in a letter that Cantor sent to Dedekind in 1899; in that case, however "there is no evidence that Cantor regarded [them] as postulate [284]. Zermelo was thus the first to propose an explicit axiomatization for set theory as such.

Zermelo's axiomatization preceded by twenty years the precise delineation of first-order logic (the framework in which his axioms are now usually recast), so his system was not a formal one in the modern sense. Rather, his seven axioms were augmented by a number of "fundamental definitions,"

among them that "Set theory is concerned with a domain ... of individuals ... call[ed] objects ... among which are the sets"<sup>1</sup> and that between some of those objects "certain fundamental relations of the form  $a \in b$ " hold (in which case  $b$  was understood to be a set and  $a$  an element of it). In addition to the usual notion of subset Zermelo introduced the notion of definite property: one for which, "by means of the axioms and the universally valid laws of logic," a determination "whether it holds or not" could be made from "the fundamental relations of the domain" [285] (in effect, a property decidable on the basis of those relations). The axioms themselves (lightly paraphrased in modern notation) were the following:

I. (Axiom of Extensionality) If  $M$  and  $N$  are sets for which both  $M \subset N$  and  $N \subset M$  (that is, every element of  $M$  is an element of  $N$ , and vice-versa), then  $N = M$ . Sets are thus completely determined by their elements.

II. (Axiom of Elementary Sets) There exists a set (the null set) that contains no elements at all; if  $a$  is any object of the domain, there exists a set  $\{a\}$  containing  $a$  as its only element; if  $a$  and  $b$  are any two objects of the domain, there exists a set  $\{a, b\}$  containing just  $a$  and  $b$  as elements.

III. (Axiom of Separation) Whenever the propositional function  $F(x)$  is definite for all elements  $x$  of a set  $M$ ,  $M$  possesses a subset whose elements are those  $x$  in  $M$  for which  $F(x)$  is true.

IV. (Axiom of the Power Set) To every set  $M$  there corresponds another set (its power set) whose elements are (all) the subsets of  $M$ .

V. (Axiom of the Union) To every set  $M$  there corresponds a set (its union) whose elements are (all) the elements of the elements of  $M$ .

VI. (Axiom of Choice) If  $M$  is a set whose elements are all sets, and if those elements are all mutually disjoint and not null, then the union of  $M$  includes at least one subset having one and only one element in common with each element of  $M$ .

---

<sup>1</sup>In particular, Zermelo allowed the domain to contain objects that were not themselves sets. Such urelements could occur as elements of sets, but beyond that the axioms said nothing about them. Their ontological status was left entirely unspecified.

VII. (Axiom of Infinity) There is at least one set in the domain that contains the null set as an element and that contains  $\{a\}$  as an element whenever it contains  $a$  itself as an element.

According to Moore, "Zermelo ... [gave] no explicit rationale for his [particular] choice of axioms except that they yielded the main theorems of Cantorinan set theory" [286]. He recognized that Cantor's set theory — in particular, Cantor's conception of a set as "a collection, gathered into a whole, of certain well-distinguished objects of our perception or ... thought" — had been undermined by "certain contradictions," but he thought that by restricting Cantor's principles he could exclude the contradictions while retaining everything of value. Zermelo admitted that he had "not yet ... been able to prove rigorously" that his axioms were consistent, but he endeavored nonetheless to show how "the antinomies discovered so far vanish one and all if (my) principles ... are adopted"; in particular, he noted that his Axiom of Separation did not allow sets to be "independently defined" but only to be "separated as subsets from sets already given," and hence that "contradictory notions such as 'the set of all sets' or 'the set of all ordinal numbers'" would be excluded. Likewise, he pointed out that the requirement that the separating property be definite prevented antinomies such as that of Richard from arising. With regard to the "deeper problems" of consistency and independence he expressed the hope that he had "at least ... done some useful spadework ... for subsequent investigations."

In fact, it was to be many years before such questions were taken up. Meanwhile, Zermelo's attempt to secure the acceptance of his well-ordering theorem by embedding the Axiom of Choice within a larger axiomatic framework did little to silence his critics. Instead, his Axiom of Separation - and especially the notion of "definite property" that occurred within it - served only to generate further controversy. Bertrand Russell and Philip Jourdain were among those who criticized Zermelo's axiomatization privately, while Poincaré and Weyl did so publicly (the latter constructively, by making the concept of "definite property" more precise). Outside Germany Zermelo's axiomatization found no acceptance whatever.

Among Zermelo's compatriots, one of the few to embrace it was Abraham Fraenkel. In 1919 Fraenkel published an introductory textbook on set theory in which he adopted Zermelo's system without qualification - apparently unconcerned (or unaware) that although the Axiom of Separation prevented the construction of Russell's paradoxical set  $\{x : x \notin x\}$ , it did not rule out



sets that were self-members (nor, more generally, those that stood at the top of an infinite descending  $\in$ -sequence:  $\dots \in M_n \in \dots \in M_3 \in M_2 \in M_1$ ).

The Russian Dimitry Mirimanoff had pointed out that possibility two years earlier. He had called such sets "extraordinary," but he apparently regarded their existence more as a curiosity than a defect. In 1922, however, Fraenkel and, independently, Skolem, discovered a more serious flaw in Zermelo's system: Its axioms did not permit the construction of certain sets of mathematical interest (in particular, the set  $\{\mathbb{N}, \wp(\mathbb{N}), \wp(\wp(\mathbb{N})), \dots\}$ , where  $\wp$  denotes the power-set operation).

To remedy that oversight Fraenkel, in his paper 1922a, proposed a new axiom — that of Replacement, according to which, whenever each element of a given set is replaced by an object of the domain, the entity so obtained is also a set. At almost the same time Skolem, in his 1923b, formulated the same principle more precisely, within the framework of what is now called first-order logic. Specifically, by a "definite" property Skolem understood one defined by a first-order formula of the language of set theory (having just  $\in$  and  $=$  as relation symbols). Given such a formula  $A(x, y)$ , with the free variables  $x$  and  $y$ , Skolem's axiom stated that if  $A$  were *functional* on a given set  $M$  (so that for each  $x \in M$  there was at most one  $y$  for which  $A(x, y)$  was true), then the image of  $M$  under  $A$  (that is,  $\{y : \exists x(x \in M \wedge A(x, y))\}$ ) was also a set<sup>2</sup>

Two other papers of Fraenkel dealt with issues involving urelements. In 1921 he proposed an Axiom of Restriction that would rule out such nonsets, while in 1922b he made essential use of urelements in demonstrating the independence of the Axiom of Choice from the other axioms. Eventually the advantages of doing without urelements were acknowledged, and Fraenkel's Axiom of Restriction became implicit in the underlying formalization: Anything not mandated by the other axioms was presumed not to exist. As a result, however, the independence of the Axiom of Choice re-emerged as an open and much more difficult problem — one on which Gödel expended much effort in the early 1940s, with only limited success.

---

<sup>2</sup>Actually, in his 1917 paper Mirimanoff had anticipated both Fraenkel and Skolem, by taking as axiomatic that any collection of ordinary sets that was in one-to-one correspondence with a given set was itself an ordinary set; and though he had stated it as a fact rather than an axiom, Cantor had made essentially the same assertion in another of his letters to Dedekind.

## S.F. による対応する個所の試訳:

今度は集合論だ (“Jetzt, Mengenlehre”, 1937-1939)

カントルが彼の三角級数の研究から派生した研究で集合論を確立してから、1908年にツェルメロが公理化を行うまでの、集合論の初期の歴史については、すでに第III章で手短な描写を与えた。復習しておこう。カントルが、すべての実数の非可算集合は実数全体の集合と一対一対応がつくという仮説を立てた（が、その後この仮説を証明しようとしてはたせなかった）のだった。また、やはり彼自身がすべての集合が整列可能であるということを確認していたのだった。ヒルベルトが、この2つの問題をひとつにまとめて、来る世紀の数学者への未解決問題として提示した彼の23の問題の最初の問題とすることで、数学者のコミュニティーにこの2つの問題への注意をうながしたのだった。また、ツェルメロが選択公理から整列可能性の性質を導き出すことに成功したのだったが、この公理の重要性を最初に看破したのがツェルメロであったのだった。

これに続く論争の歴史の決定版とも言える記述と、選択公理とその多くのヴァリエーションの複雑にからみあった関係の子細な分析は Gregory H. Moore [283] でなされている。この本の記述が、1908年から1930年にかけての集合論の発展に関する、以下の数ページでの議論の下敷きになっているのだが、ゲーデルの、後の集合論への寄与の正しい理解のためには、ここでの議論が不可欠である。

ツェルメロの集合論の最初の公理化は彼の論文 1908b で与えられている。しかしながら、そのような公理化の必要性を示唆したのは、ツェルメロが最初ではなかった。イタリアの数学者、ブラリ=フォルティ (Cesare Burali-Forti) はすでに1896年にそのような指摘をしているが、これは、明らかに、集合論のパラドックスが発見されるより前のことであった。実際、ブラリ=フォルティは2つの公理の候補を提案しているが、公理系を与えているわけではなかった。同じように、「今日から見ると、… ツェルメロの和集合の公理と分離公理と同様のものに思える、ある種の命題」はカントルが1899年にデデキントにあてた手紙の中にも現われる。こちらの場合には、しかし、「カントルが（これらの命題を）要請として捉えていたという形跡は見あたらない」 [284]。そういうわけで、ツェルメロが、集合論の公理化といえる明示的な公理化を最初に行なった、と言って間違いない。

ツェルメロの公理化は、1階の論理が正確に定式化されるより20年も前になされていた（ツェルメロの公理系は今日では通常1階の論理の枠組で言い替えられた形で扱われる）。そのため、彼の体系は、現代の意味で形式的体系と言えるものではなかった。むしろ、彼の7つの公理はいくつもの「基礎

定義」で拡張されたものだった。これらの基礎定義のなかには、「集合論は、対象と呼ば[れる]… 個別の要素… からなる領域に関する理論であり、それらのもののうちには集合とよばれるものがある」<sup>\*1</sup>というものがある。続けると、それらのもののうちのいくつかの対象の間には「 $a \in b$  という形のある基本的な関係が」成立する（この場合  $b$  は集合で、 $a$  はその要素と解釈される）。通常の部分集合の概念に加えて、ツェルメロは、確定された性質という概念を導入する：これは、「これらの公理と恒真な論理法則」により、「それが成立するか否か」が「その領域の基本的な関係」から出発して判定できるようなもののことである [285]（つまり、そのような関係から出発して決定可能な性質、ということである）。これらの公理自身は（現代的な記法で少し言い替えて述べると）次のようなものであった：

I. (外延性の公理)  $M$  と  $N$  が集合で、 $M \subset N$  と  $N \subset M$  の両方が成り立つとき（つまり、 $M$  のすべての要素は  $N$  の要素で、その逆も成り立つとき）、 $N = M$  である。つまり、集合はその要素によって完全に確定する。

II. (基本的な集合の公理) 要素を全く含まないような集合（空集合 null set）が存在する； $a$  が領域に含まれる任意の対象のとき、 $a$  のみを要素として含むような集合  $\{a\}$  が存在する； $a$  と  $b$  が領域に含まれる任意の2つの対象のとき、ちょうど  $a$  と  $b$  のみを含むような集合  $\{a, b\}$  が存在する。

III. (分離公理) 述語関数  $F(x)$  が、集合  $M$  のすべての要素  $x$  に対し確定しているなら、 $M$  は、 $F(x)$  が成り立つような  $M$  のすべての要素  $x$  を要素とするような部分集合を持つ。

IV. (冪集合の公理) すべての集合  $M$  に、その要素が  $M$  の（すべての）部分集合であるような別の集合（ $M$  の冪集合）が対応する。

V. (和集合の公理) すべての集合  $M$  に、その要素が  $M$  の要素の要素（のすべて）であるような集合（ $M$  の和集合）が対応する。

VI. (選択公理)  $M$  がすべての要素が集合であるような集合で、それらの要素はすべて互いに素で空集合でもないなら、 $M$  の和集合は、すべての  $M$  の要素とちょうど1つの要素のみを共有するような部分集合を、少なくとも1つ持つ。

---

<sup>\*1</sup>特に、ツェルメロは、この領域が、それ自身集合でないような対象を含むことを許している。そのような原始元 (urelements) は、集合の要素として現われる可能性があるが、そのこと以外には、公理系はそれらについては何も規定してはおらず、原始元の存在論的ステータスは全く特定されないままになっている。

VII. (無限公理) 領域は、空集合を要素に持ち、 $a$  がその要素なら  $\{a\}$  も要素になるような集合を少なくとも1つは含む。

Moore の引用を続けると、「ツェルメロは、… これらの公理からカントルの集合論の主要定理が導けることを除くと、これらの公理を [このように] 選んだことに対する何の明示的な理由付けも [与えていない]」 [286]. ツェルメロは、カントルの集合論 — 特に、カントルの、“互いに区別のできるような、我々の認識や … 思考の対象をひとまとめにした集まり” としての集合の概念 — が「例のいくつかの矛盾」によって足をすくわれてしまっていることを認識したが、カントルの集合原理を制限することによって、価値のあるものはすべて保持しながら矛盾を除外できると考えたのだった。ツェルメロは、彼の公理系が無矛盾であることの「厳密な証明を … まだ」得ていないことを認めているが、「これまでに発見されている逆理が (私の) 原理を採用することで … 一挙にすべて排斥される」ことの説明には努力を傾けている; 特に、彼の分離公理は、集合が「独立に定義される」ことを許さず、「すでに与えられた集合から部分集合として分離される」ことのみによって定義されることから、「“すべての集合の集合” や “すべての順序数の集合” などの矛盾する概念」は除外される、と注意している。同様に、この分離に用いられる性質が確定したものでなければならない、という要請から、リシャルのパラドックスのような種類の逆理を防ぐことができると指摘している。無矛盾性や独立性などの「より奥の深い問題」に関しては、彼がこの研究によって「少なくとも … 後に続く研究のための … 有用で骨のおれる準備作業」をしたことになっていることを希望する、と述べている。

実際、これらの問題がとりあげられることになるのは、このときからさらに多くの年を経てからだった。ツェルメロがこの公理系を発表した直後には、選択公理をさらに大きな公理的な枠組に埋めこむことによって、彼の整列可能性定理が受け入れられるようにしようという彼のこの試みは、しかし、批判の声をしずめることには全くならなかつた。むしろ、彼の分離公理 — 特に、そこで用いられている「確定された性質」という概念 — は、更なる論争をひきおこすことになってしまった。ツェルメロの分離公理を私的に批判した人々のなかにはラッセルやジュルダン (Philip Jourdain) がいたが、ポワンカレやワイルは公にこの公理を批判した (ただし後者の批判は、この「確定された性質」の概念をより精密化する、という建設的なものであったが)。ドイツの外ではツェルメロの公理化はどのような意味においても全く受け入れられなかつた。

ツェルメロの同国人では、この公理系を受け入れた数少ない人々の一人にフレンケル (Abraham Fraenkel) がいた。フレンケルは、1919年に、集合論の入門書を出版しているが、この本で彼は何の変更加えずにツェルメ

ロの体系を採用している — 分離公理がラッセルのパラドックスでの集合  $\{x : x \notin x\}$  の構成を阻止するとしても、それは、自分自身が要素であるような集合 (あるいは、もっと一般的に、無限  $\in$ -下降列の先頭に置かれているような集合:  $\in M_n \in \dots \in M_3 \in M_2 \in M_1$ ) の存在を除外しないのだが、それについても、全く気にしていない (あるいは気づいていない) ように見える。

ロシアのミリマノフ (Dimitry Mirimanoff) は、これより2年前に、その可能性について指摘している。彼はそのような集合を「異常な」と形容しているが、彼は、そのような集合の存在を欠陥として、というよりは、奇態なこと、として捉えているようである。しかし、1922年になって、フレンケルと、彼とは独立に、スコーレムは、ツェルメロの体系のもっと重大な欠陥を発見している: この体系の公理群は、数学的に意味のある、ある種の集合 (特に、 $\rho$  で冪集合生成の演算をあらわしたときの集合  $\{N, \rho(N), \rho(\rho(N)), \dots\}$ ) の構成を許さないのだった。

この見過しを治すために、フレンケルは論文 1922a で置換公理という新しい公理を提案した。この公理は、与えられた集合の各要素をそれぞれ領域の対象で置き換えるとき、そのようにして得られたものは再び集合となる、というものである。ほとんど同時期に、スコーレムも彼の 1923b で、同じ原理を、今日1階の論理と呼ばれている枠組の中に、より精密な形で定式化している。具体的に言うと、スコーレムは、「確定された」性質を、1階の論理での ( $\in$  と  $=$  のみを関係記号として持つような) 集合論の言語の論理式としてとらえた。そのような論理式  $A(x, y)$  で  $x$  と  $y$  を自由変数として持つものが与えられたとき、スコーレムの公理は、もし  $A$  が与えられた集合  $x$  上で関数的なら (つまり、各  $x \in M$  に対して、 $A(x, y)$  となるような  $y$  が高々1つしかないなら)、 $M$  の  $A$  による像 (つまり  $\{y : \exists x(x \in M \wedge A(x, y))\}$ ) もまた集合になる、というもだった<sup>\*2</sup>。

フレンケルは別の2つの論文で、原始元に関する問題を扱っている。1921年の論文では制限公理という、そのような集合でないものの存在を排除するものを提唱しているが、一方、1922b では、原始元の存在を本質的に用いて選択公理の他の公理からの独立性を証明している。原始元を用いずに議論することの利点は次第に認められるようになってゆき、フレンケルの制限公理は、公理系が取り扱っていないものは、存在しないものとみなす、という意味で公理系の体系自体の中に隠伏的に含まれることになっていった。しかし、その結果、選択公理の独立性は、ゲーデルが1940年代初めに多くの時間と

---

<sup>\*2</sup>実は、ミリマノフも、1917年の論文で、フレンケルとスコーレムの両者より早く、与えられた集合と一対一の対応にある通常の集合の集まりは、それ自身集合である、という原理をとりあげている。しかし、彼は、この原理を公理としてというより、1つの事実として述べているし、それで言えば、カントルも本質的に同じ主張をデデキントへの別の手紙の中でおこなっている。

労力を傾けたが部分解しか得られなかったというような、もっとずっと難しい未解決問題として再び立ち現われることになったのである。

## [K] の訳文の問題点の指摘:

以下で, S.F. による [K] の原文の試訳にそって [K] の p.163~ の訳文の問題点を指摘してゆく.

今度は集合論だ (“Jetzt, Mengenlehre”, 1937-1939)

[K] の訳文では, これは, 「今や, 集合論だ!」となっているが, ここの意味はむしろ「今度は…」である. ドイツ語が分らなかったのも, というかもしれないが, わざわざドイツ語でタイトルを書いているのだから, テキストの文脈にフィットする引用になっているはずであることは明らかだが, 数理論理学の難問を次々に解いていった若いゲーデルが「次は集合論の難問に挑」もうとしているのだから, そういう文脈で考えても「今や, 集合論だ!」は何かおかしい, という察しはつくはずである.

カントルが彼の三角級数の研究から派生した研究で集合論を確立してから, 1908年にツェルメロが公理化を行うまでの, 集合論の初期の歴史については, すでに第 III 章で手短な描写を与えた. 復習しておこう. カントルが, すべての実数の非可算集合は実数全体の集合と一対一対応がつくという仮説を立てた(が, その後この仮説を証明しようとしてはたせなかった)のだった. また, やはり彼自身がすべての集合が整列可能であるということを確認していたのだった. ヒルベルトが, この2つの問題をひとつにまとめて, 来たる世紀の数学者への未解決問題として提示した彼の23の問題の最初の問題とすることで, 数学者のコミュニティーにこの2つの問題への注意をうながしたのだった. また, ツェルメロが選択公理から整列可能性の性質を導き出すことに成功したのだったが, この公理の重要性を最初に看破したのがツェルメロであったのだった.

ここの文章は, 第 III 章の要約になっていて, 原文では It was ... who ... という文型でたたみかける形になっているのだが, [K] の訳文では, 最初の文(故意に?) 原文と違う意味に訳したために, 要約を述べているという事実がいまいになってしまっている. さらに数学的には, 「任意の実数の非可算集合は自然数全体の集合と1対1対応がつくこと」というナンセンスなステートメントへの誤訳があるために余計混乱してしまっている. It was ... who ... は日本語にエレガントには訳しづらいかもしれないが, すべての文章をことごとく原文と違う意味に訳している目的が [K] の訳文からは読みとれない. 私の訳では, It was ... who ... の文型のたたみかけを翻訳調に直訳することは放棄したかわりに, “It was recalled that” という, この文の初めのところを, 「要約しておこう。」とあえて意識した一文に訳し, 後に続く文章を大過去の文章の翻訳のような文体に訳出することで, It was ... who のたたみかけと同様の効果が出るような工夫をしている.

これに続く論争の歴史の決定版とも言える記述と, 選択公理とその多くのヴァ

リアントの複雑にからみあった関係の子細な分析は Gregory H. Moore [283] でなされている。

[K]での誤訳の個所を見てゆくと、前置詞や接続法や間接話法を無視したために起っているものの頻度がかなり高いことに気付く。ここでも、訳文の原文からの離脱は、原文の“A definitive history of ...”の“A”を訳さなかった(理解しなかった?)ことから来ているのではないかと思う。“definitive”というような形容詞の最上級のような意味を持つ形容詞の前に the でなく a が置かれている、ということに気付けば、[K]でのような訳文にはならないはずである。それから、本の中に与えられる(given)“history”は「歴史」ではなく「歴史の記述」であろう。[K]の訳者は英和辞典を調べて翻訳をしているのではないかと思う。英和辞典で調べても history に「歴史の記述」という訳語は出てこないと思う。たとえば、ODE には、history の語義の中に“a systematic or critical account of or research into a past event or events etc.”というのがある。

この本の記述が、1908年から1930年にかけての集合論の発展に関する、以下の数ページでの議論の下敷きになっているのだが、ゲーデルの、後の集合論への寄与の正しい理解のためには、ここでの議論が不可欠である。

私が「... が ... の下敷きになっている」と訳した“... is the basis for ...”は [K] では、「... は ... の基礎である」と訳されている。この後のページで Moore の本からの引用とテキストの地の部分が引用符で区切られてまだらに出てくる文章が続くのだが、「... の基礎である」では、読者はこの文がそのことの予告であるとは読解できないのではないだろうか。proper understanding の意味は「真の理解」ではなく「正しい(あるいは妥当な)理解」である。また“be essential to ...”は「... のための本質となる」ではなく「... のために不可欠である」である。

ツェルメロの集合論の最初の公理化は彼の論文 1908b で与えられている。しかしながら、そのような公理化の必要性を示唆したのは、ツェルメロが最初ではなかった。イタリアの数学者、ブラリ=フォルティ (Cesare Burali-Forti) はすでに1896年にそのような指摘をしているが、これは、明らかに、集合論のパラドックスが発見されるより前のことであった。

[K]では“The Italian mathematician Cesare Burali-Forti had already done so in 1896, ...”を、「すでに1896年にイタリアの数学者チェザーレ・ブラリ=フォルティが公理化をしている。」と訳しているが、これでは、このすぐ後に「公理化をしたわけではない」と言っていることと矛盾してしまう。ここでの“had done so”の“do”はその前に出てくる「公理化の必要の指摘をする」ことである。

実際、ブラリ=フォルティは2つの公理の候補を提案しているが、公理系を与えているわけではなかった。同じように、「今日から見ると、… ツェルメロの和集合の公理と分離公理と同様のものに思える、ある種の命題」はカントルが1899年にデデキントにあてた手紙の中にも現われる。こちらの場合には、しかし、「カントルが(これらの命題を)要請として捉えていたという



形跡は見あたらない」[284]. そういうわけで、ツェルメロが、集合論の公理化といえる明示的な公理化を最初に行なった、と言って間違いない。

ここの最後の文章の私の訳は意識して、「と言って間違いない」と結んでいる。これは趣味の問題かもしれないが、“set theory as such”の翻訳はもう少し微妙である。[K]ではこれを「現在のよな集合」と(勝手に)敷衍しているが、このすぐ先のパラグラフで、ツェルメロの公理系は実は現在のよなものではなかった、と言っているのだから、これは非常に具合が悪い。

ツェルメロの公理化は、1階の論理が正確に定式化されるより20年も前になされていた(ツェルメロの公理系は今日では通常1階の論理の枠組で言い替えられた形で扱われる)。そのため、彼の体系は、現代の意味で形式的体系と言えるものではなかった。

[K]では前のパラグラフでの「現在のよな集合」と、ここで“recast”「を捉えなおす」と誤訳していることのため、事情を知らない人にとっては意味が不明になってしまっている。“recast”はもともと語義でも「新しい鋳型に入れなおす」というような感じであるから、内容を理解せずに翻訳したとしても、せめてここでの私の訳のようにするべきである。

むしろ、彼の7つの公理はいくつもの「基礎定義」で拡張されたものだった。これらの基礎定義のなかには、「集合論は、対象と呼ば[れる]…個別の要素…からなる領域に関する理論であり、それらのものの中には集合とよばれるものがある」\*1というものがある。

原文では、“among them that …”と始めて、結局「基礎定義」の問題となる部分を全部かいつまんで引用しているので、[K]がこの文章の訳文を「例えば」と始めているのは、**一部のみ**が述べられているような印象を与えてしまい具合が悪い。

続けると、それらのものの中のいくつかの対象の間には「 $a \in b$ という形のある基本的な関係が」成立する(この場合  $b$  は集合で、 $a$  はその要素と解釈される)。

[K]ではここで、「対象のあるものの中には「 $a \in b$ という形のある種の基礎的な関係が成立している」という訳文を与えているが、certainの訳語として使っている日本語の「ある種の」は、「…のよなもの」というような意味合いも持っているのだから、原文と意味が違ってしまう。“certain …”という表現で日本語の「ある種の…」と同じような皮肉っぽい言い方をすることもできるが、ここでは皮肉を言っているわけではない。

通常の部分集合の概念に加えて、ツェルメロは、確定された性質という概念

---

\*1特に、ツェルメロは、この領域が、それ自身集合でないよな対象を含むことを許している。そのような原始元(urelements)は、集合の要素として現われる可能性があるが、そのこと以外には、公理系はそれらについては何も規定してはおらず、原始元の存在論的ステータスは全く特定されないままになっている。

を導入する: これは、「これらの公理と恒真な論理法則」により、「それが成立するか否か」が「その領域の基本的な関係」から出発して判定できるようなもののである [285] (つまり, そのような関係から出発して決定可能な性質, ということである). これらの公理自身は (現代的な記法で少し言い替えて述べると) 次のようなものであった:

ここでは, [K] は “...: one for which ...” を「その1つは」と訳している. 中学校の英語の授業のようになって申し訳ないが, ここの “one” というのは「1つ」という名詞ではなく, この前にある “definite property” を指す代名詞である. もし翻訳者が翻訳を職業とする人なら, 中学校英語のレベルの間違いをする, というのはあってはならないことだろう. 翻訳者がアカデミックなバックグラウンドを持っている人で, 翻訳を職業とするのではない場合には, 中学校英語のレベルの間違ひもたまにはあるかもしれないが, しかし, その誤訳で意味が通じなくなってしまうのを見過ごしてしまう, というのはあってはならないことだと思う. ただし, [K] の場合にはこのようなミスの頻度は「たまにはある」以上のような気がする. この種の間違ひは, 非常に腹立たしい, と同時に, 笑えるジョークでもある. むしろある種の笑えるジョークとして笑っていた方が精神衛生上は良いのだろう.

- I. (外延性の公理)  $M$  と  $N$  が集合で,  $M \subset N$  と  $N \subset M$  の両方が成り立つとき (つまり,  $M$  のすべての要素は  $N$  の要素で, その逆も成り立つとき),  $N = M$  である. つまり, 集合はその要素によって完全に確定する.
- II. (基本的な集合の公理) 要素を全く含まないような集合 (空集合 null set) が存在する;  $a$  が領域に含まれる任意の対象のとき,  $a$  のみを要素として含むような集合  $\{a\}$  が存在する;  $a$  と  $b$  が領域に含まれる任意の2つの対象のとき, ちょうど  $a$  と  $b$  のみを含むような集合  $\{a, b\}$  が存在する.
- III. (分離公理) 述語関数  $F(x)$  が, 集合  $M$  のすべての要素  $x$  に対し確定しているなら,  $M$  は,  $F(x)$  が成り立つような  $M$  のすべての要素  $x$  を要素とするような部分集合を持つ.
- IV. (冪集合の公理) すべての集合  $M$  に, その要素が  $M$  の (すべての) 部分集合であるような別の集合 ( $M$  の冪集合) が対応する.
- V. (和集合の公理) すべての集合  $M$  に, その要素が  $M$  の要素の要素 (のすべて) であるような集合 ( $M$  の和集合) が対応する.
- VI. (選択公理)  $M$  がすべての要素が集合であるような集合で, それらの要素はすべて互いに素で空集合でもないなら,  $M$  の和集合は,

すべての  $M$  の要素とちょうど1つの要素のみを共有するような部分集合を、少なくとも1つ持つ。

VII. (無限公理) 領域は、空集合を要素に持ち、 $a$  がその要素なら  $\{a\}$  も要素になるような集合を少なくとも1つは含む。

公理を列挙した部分については、読みにくさを除くと、[K] の翻訳に大きな問題はないように思える。ただ、細かいことを言うと、II の公理を、「初等集合の公理」と訳しているのは、“初等集合” という数学用語で指定される概念があるような印象を与えるので私の訳のように“初等的な集合の公理” とでもした方がいいように思える。

それから、これは、今まで見てきたような [K] での翻訳に対してはいささか高望みのコメントかもしれないが、II では「空集合」に対応する用語として、原著では null set という名称が用いられているが、これはドイツ語の Nullmenge に相当して、ツェルメロの論文の時点では空集合を指す用語として用いられていたが、後に零集合（測度が零の集合）を指す用語として使われるようになり、現代では、空集合には leere Menge (empty set) という用語があてられている、というような訳者の脚注がここに加えられていてほしかった。

Moore の引用を続けると、「ツェルメロは、… これらの公理からカントルの集合論の主要定理が導けることを除くと、これらの公理を [このように] 選んだことに対する何の明示的な理由付けも [与えていない]」 [286].

私の翻訳で、「Moore の引用を続けると」とローカルには原文と異なる翻訳をあえて行なったのは、原著では前の部分から Moore の [286] からの引用符付きの引用を地の文章が引きつぐ、という書き方が続いているのだが、翻訳したときに語順の変更のため、そのようなやりかたでの引用が見えにくくなってしまっているので、その帳尻を合わせるためである。

[K] の翻訳では [K] の原著の著者が “his [particular] choice” と [] でくくって補っているところを「[特定の]」と訳しているが、ここでの “particular choice” はツェルメロが選びとった公理群のまさに「そのような」選択、という意味であるから、「特定の」と訳すと意味が違ってしまう。

ツェルメロは、カントルの集合論 — 特に、カントルの、“互いに区別のできるような、我々の認識や… 思考の対象をひとまとめにした集まり” としての集合の概念 — が「例のいくつかの矛盾」によって足をすくわれてしまっていることを認識したが、カントルの集合原理を制限することによって、価値のあるものはすべて保持しながら矛盾を除外できると考えたのだった。ツェルメロは、彼の公理系が無矛盾であることの「厳密な証明を… まだ」得ていないことを認めているが、「これまでに発見されている逆理が（私の）原理を採用することで… 一挙にすべて排斥される」ことの説明には努力を傾けている；特に、彼の分離公理は、集合が「独立に定義される」ことを許さず、「すでに与えられた集合から部分集合として分離される」ことのみによって定義されることから、「“すべての集合の集合” や “すべての順序数の集合” などの矛盾する概念」は除外される、と注意している。同様に、この分離に用い

られる性質が確定したものでなければならない、という要請から、リシャールのパラドックスのような種類の逆理を防ぐことができると指摘している。無矛盾性や独立性などの「より奥の深い問題」に関しては、彼がこの研究によって「少なくとも … 後に続く研究のための … 有用で骨のおれる準備作業」をしたことになっていることを希望する、と述べている。

ここでは、[K] の翻訳はおおむね問題がないが、細かい点で言えば、まず、“certain contradiction” の翻訳であろう、[K] はここでも、「ある種の」という訳語で通しているが、ここでの “certain” はリシャールのパラドックスやラッセルのパラドックスなどの具体的な矛盾をひっくるめて指しているのだから、「ある種の」はよくない。しかも、“contradictions” と複数になっていることを訳出していないので、余計意味がとりにくくなっている。ちなみに、ここでの “certain” に対応する ODE での語義の説明は: 4.(of a person, place, etc.) that might be specified, but is not ( $\equiv$ a certain lady;  $\equiv$ of a certain age). で、「ある種の」に対応する語義の説明は: 6.(of a person, place, etc.) existing, though probably unknown to the reader or hearer ( $\equiv$ a certain John Smith).

もう少し数学的な内容にからんだ翻訳の問題点としては、[K] の訳文に出てくる「これ故に」という表現である。原著にも、“but he endeavored nonetheless to show …” とあるように、ここでの「すべての集合の集合」などを公理系が許さない、という議論は証明ではなくて状況証拠のようなものにすぎないので、「これ故に」はあたかも確定的な証明を与えてしまっているような印象を与えてしまいよくない。原文では、このところは間接話法で距離をおいて記述しているので、その感じもうまく訳してほしい。

それからこれは純粋に日本語の問題なのだが、[K] の訳文には「ちょうどその頃起こったリシャールのパラドックス」のように日本語としてかみあっていないもの（「パラドックス」は「その頃起こった」のでなくて、「その頃発見された」のであり、発見される前にも存在していたのだから「その頃に起こった」わけではない）が非常に多くて気持が悪い。日頃私の勤めている大学の教授会や教員総会などでの「長」のついた役職の人たちの演説で、その手の気持の悪い日本語をさんざん聞かされていて吐き気がしそうになっているので、こちらのこらえ性がなくなっているだけなのかもしれないが、「もうやめてくれ!」という感じである。

実際、これらの問題がとりあげられることになるのは、このときからさらに多くの年を経てからだった。

これも英文法の問題なのかもしれないが、[K] では、ここで、“it was to be many years before …” という過去の時点からの未来表現を「実際、このような質問がなされるまでには長い年月が必要だった。」とさらに過去からの事実を述べるような訳文に訳してしまっている。しかも、ここで “such questions” を「このような質問」と訳してしまっているために、これが何をさしているのかもよく分からなくなってしまっている。多分訳者自身何を訳しているのかわからなかったのだろう。もちろん「これらの問題」は「無矛盾性や独立性などの「より奥の深い問題」」のことで、多くの年を経てからとりあげられたのは、ゲーデルによって不完全性定理や、 $V = L$  による結果が発表されたときだった。蛇足かもしれないが、「質問がなされる」はやっぱりおかしな日本語だと思う。

ツェルメロがこの公理系を発表した直後には、選択公理をさらに大きな公理論的な枠組に埋めこむことによって、彼の整列可能性定理が受け入れられるようにしようという彼のこの試みは、しかし、批判の声をしずめることには全くならなかった。

原文の“meanwhile”は、前の文章で、ツェルメロの1908bの時点からの未来に言及したので、話を1908年に引きもどすために置かれているのだが、[K]の訳は前の文章でこけてしまっているのです、ここでも「とかくするうちに」などという訳のわからない文句に訳されてしまっている。

むしろ、彼の分離公理 — 特に、そこで用いられている「確定された性質」という概念 — は、更なる論争をひきおこすことになってしまった。ツェルメロの分離公理を私的に批判した人々のなかにはラッセルやジュールダン (Philip Jourdain) がいたが、ポワンカレやワイルは公にこの公理を批判した (ただし後者の批判は、この「確定された性質」の概念をより精密化する、という建設的なものであった)。

“constructive criticism”は「構成主義的批判」ではなくて、「建設的批判」である。しかも、この文を「構成主義的な批判になっている」としめることで、原著では全く違う意味のものになっている。

ドイツの外ではツェルメロの公理化はどのような意味においても全く受け入れられなかった。

ツェルメロの同国人では、この公理系を受け入れた数少ない人々の一人にフレンケル (Abraham Fraenkel) がいた。

これはちょっと揚げ足取りのような気もするが、「数少ない一人」はおかしいであろう。「一人」は数少ないかどうかにかかわらず一人きりである。

フレンケルは、1919年に、集合論の入門書を出版しているが、この本で彼は何の変更改えずにツェルメロの体系を採用している — 分離公理がラッセルのパラドックスでの集合  $\{x : x \notin x\}$  の構成を阻止するとしても、それは、自分自身が要素であるような集合 (あるいは、もっと一般的に、無限  $\in$ -下降列の先頭に置かれているような集合:  $\in M_n \in \dots \in M_3 \in M_2 \in M_1$ ) の存在を除外しないのだが、それについても、全く気にしていない (あるいは気づいていない) ように見える。

[K]ではこの最後の文を2つの独立した文に分離しているが、このため、原著での文が dash で実現していた、「ツェルメロの体系を、無限降下列の存在の問題を気にしないくらい無批判に採用している。」という文脈が全く失われてしまっている。

ロシアのミリマノフ (Dimitry Mirimanoff) は、これより2年前に、その可能性について指摘している。彼はそのような集合を「異常な」と形容しているが、彼は、そのような集合の存在を欠陥として、というよりは、奇態な

こと、として捉えているようである。

[K]の「彼はこのような集合を「異常」と呼んだが、」は日本語として破綻している。また、[K]は“curiosity”を、「興味深いもの」と訳しているが、この単語は、ここではぜひ、もとの単語の持つ「けったいな」とか「変な」というニュアンスを含めて訳してほしい。というのも、なぜだかは分からないが、 $\in$ -無限下降列に対して病的な興味を示す素人数学者が後をたたないからである。私の知っている例でも、体系の言語で記述される（内的な）無限降下例とモデルでの無限降下例の区別さえ定かでないような、 $\in$ の整列性を仮定しない集合論に関するあやしげな博士論文が、集合論以外の専門の数学者による審査で通ってしまった、という、ある旧帝国大学<sup>\*2</sup>での最近の事例がある。このような不愉快な傾向に拍車をかけるようなまねはくれぐれもやめてほしい、と強く希望する次第である。

しかし、1922年になって、フレンケルと、彼とは独立に、スコーレムは、ツェルメロの体系のもっと重大な欠陥を発見している：この体系の公理群は、数学的に意味のある、ある種の集合（特に、 $\wp$ で冪集合生成の演算をあらわしたときの集合 $\{N, \wp(N), \wp(\wp(N)), \dots\}$ ）の構成を許さないのだった。

[K]では“certain sets of mathematical interest”を「数学的に興味深いある種の集合」と訳しているが、これだと対応すべき原文は“certain mathematically interesting sets”でなくてはならないだろう。

この見過しを治すために、フレンケルは論文 1922a で置換公理という新しい公理を提案した。

[K]では、“oversight”を「見過し」ではなく「過失」と訳している。これは小さな翻訳ミスのように思われるかもしれないが、この翻訳ミスで $Z$ から $ZF$ への拡張に対する原著者の数学史的評価が全く違って伝えられてしまうことになるので、私が原著者だったとしたら大いに眉をしかめるところである。

この公理は、与えられた集合の各要素をそれぞれ領域の対象で置き換えるとき、そのようにして得られたものは再び集合となる、というものである。ほとんど同時期に、スコーレムも彼の 1923b で、同じ原理を、今日1階の論理と呼ばれている枠組の中に、より精密な形で定式化している。具体的に言うと、スコーレムは、「確定された」性質を、1階の論理での（ $\in$ と $=$ のみを関係記号として持つような）集合論の言語の論理式としてとらえた。

[K]はこの文章を「…と理解していた。」と閉じているが、「理解していた。」では定常的に理解していたという意味になるため、この文章の文脈とのつながりがよく分からなくなっている。

そのような論理式  $A(x, y)$  で  $x$  と  $y$  を自由変数として持つものが与えられたとき、スコーレムの公理は、もし  $A$  が与えられた集合  $x$  上で関数的なら

---

<sup>\*2</sup>[コメント内の註] 地方都市のうちには「旧帝国大学」という表現が皮肉でなく使われる場所もあるようである。

(つまり、各  $x \in M$  に対して、 $A(x, y)$  となるような  $y$  が高々1つしかないなら)、 $M$  の  $A$  による像 (つまり  $\{y : \exists x(x \in M \wedge A(x, y))\}$ ) もまた集合になる、というもだった<sup>\*3</sup>。

フレンケルは別の2つの論文で、原始元に関する問題を扱っている。

[K] の翻訳では “urelement” は、この後の部分も含めると、「原要素」、「源要素」、「原子要素」と3通りに訳されているが、学術用語の訳語は、すくなくともひとつながりの文章の中では1つに統一するというのが鉄則であろう。

1921年の論文では制限公理という、そのような集合でないものの存在を排除するものを提唱しているが、一方、1922bでは、原始元の存在を本質的に用いて選択公理の他の公理からの独立性を証明している。原始元を用いずに議論することの利点は次第に認められるようになってゆき、フレンケルの制限公理は、公理系が取り扱っていないものは、存在しないものとみなす、という意味で公理系の体系自体の中に隠伏的に含まれることになっていった。

私が「利点」と訳している advantage を含む文節を [K] は「有利だとわかり、…」と訳しているが、「有利」は損得勘定的価値体系の言葉で、学問的な理論の advantage を記述する言葉としては奇異の感がある。何か愛知県周辺の方言の「お値打ちもの」という表現を連想してしまう。この訳者が学問体系を、有利かどうか、という価値観でしか見ていないのかどうかは、ぜひ問いただしてみたい気がする。またこの文章の最後の部分でも、[K] の翻訳では文節の間の論理的なつながりが故意に変えられてしまっている。

しかし、その結果、選択公理の独立性は、ゲーデルが1940年代初めに多くの時間と労力を傾けたが部分解しか得られなかったというような、もっとずっと難しい未解決問題として再び立ち現われることになったのである。

ここの原文で、「ゲーデルも完全に解くことのできないほどむずかしい問題」という内容になっているものを、[K] では、「難しい問題だったのでゲーデルは解けなかった」という意味に翻訳している。これが訳者のゲーデルに対する評価を反映しているものなのか、あるいは単なる誤訳なのかは、今まで見てきた誤訳の傾向からある程度察しはつくが、もしこれが、単なる誤訳だとすれば、それは「御粗末」の一言につきるし、訳者の意図的な曲解だとすれば、訳者は、絶対にそんな形で自分の意見を表明するべきではない。もしどうしても、自分の意見を言いたいなら、正しい訳をつけて訳者の脚注などの形で自分の意見をそえる、というような形ですべきであろう。

---

<sup>\*3</sup>実は、ミリマノフも、1917年の論文で、フレンケルとスコレームの両者より早く、与えられた集合と一対一の対応にある通常の集合の集まりは、それ自身集合である、という原理をとりあげている。

[K] ではここで突然 “given” を「所要」と訳している。この訳し方はこの後何か所か出てくるが、“given” を “give” の過去分詞としてではなく「所与」に対応する単語として理解しているのではないかという疑いがある。「所与」は「絶対的に与えられた」というような、しかも多分に哲学的な含みを持った意味合いの単語であるが、ここでの “given” は「任意に（仮に）与えられた」の意であるから、訳語としては不適當である。

しかし、彼は、この原理を公理としてというより、1つの事実として述べているし、それ可言えば、カントルも本質的に同じ主張をデデキントへの別の手紙の中でおこなっている。