# 論理、この厄介なもの

淵野 昌 (Sakaé Fuchino)

22年5月7日 (10時28分(日本時間)) 版

以下の文章は、現代思想 二〇二二年4月号「特集=危機の時代の教育」に寄稿した論説の拡張版である。雑誌掲載版では紙数の制限などのために削除した部分も復活させている。また、投稿後/校正後の加筆訂正も含まれる。拡張版で加えられたテキストの主なものは、dark green (この文の foreground の色) で色付けしてある。

このテキストの最新版は、https://fuchino.ddo.jp/misc/logic-2022-x.pdf として download することができる。

## 目次



> 言葉には、言葉そのものを認識したり説明したりすることを可能にする働きがあることを理解すること。
>
> — 文部科学省 [7]

> Wovon man nicht sprechen kann, darüber muss man schweigen.
>
> — L. Wittgenstein [13] の最後の文[1)]

> The more I think about language, the more it amazes me that people ever understand each other at all.
>
> — K. Gödel [11] に引用されている言葉

---

0) 本稿の内容は、(広い意味では) 筆者が研究代表者となっている科研費研究プロジェクト: 集合論的多世界宇宙の視点での連続体問題の解決、基盤研究 (C) (2020 – 2023) での研究とも関連を持つものである。

1) 「論ずることの不可能な事柄については、黙するしかない」(筆者による訳文)。

# 1 言語、論理と論理学

「論理国語」なる用語があるようである（例えば、[7]を参照されたい）。「国語」は、この文脈では、日本語のことである（と思う）。[2)]

この「論理国語」という表現はどうもよく分らない。[7]には、この用語の定義はなく、書かれていることの論理的な脈絡もうまく読みとれないので、[3)] 臆測をするしかない。筆者は、日本の報道界で使われている、（筆者には）非論理的で間違っているとしか思えない日本語が苦痛なため、できるだけ日本語では新聞記事等を読まないようにしているのであるが、このことの原因が、この「論理」のついていない「国語」にあるのだとしたら、ぜひとも、「論理国語」をもって、現代日本語の、この深刻な間違いを正してもらいたいものだと思う。

本論説の筆者は、「論理」の専門家である（つもりである）が、「教育」の専門家ということでは（全く）ない。長年、大学で、学生の教育にたずさわってはきたが、そこでの教育は、本特集での意味での「教育」とはかなり違う意味の教育であるように思える。しかし、「論理」の方も、小中高等学校教育議論で想定されている「論理」と、筆者の理解する《論理》には、大きな乖離があると言わざるを得ない。

…と書いてみたところで、言葉につまってしまったのだが、エッセイの専門家（日本語でエッセイストと言うのか？）の、言葉に詰ったときの常套手口をまねて、『広辞宛』で「ろんり」の項を調べてみると、

> ろん-り【論理】(logic) ① 思考の形式・法則。また、思考の法則的なつながり。② 実際に行われている推理の仕方。論証のすじみち。③ 比喩的に、事

2) 自国の公用語を国語（あるいは、國語、국어、など）と呼ぶ国やその言語は、シンガポールのマレー語を含め、アジアには少なくとも5つは存在する。

3) もちろん、これは筆者の側の問題である。筆者のこの問題については、第5節で触れることになる。

物間の法則的なつながり。「歴史的発展の—」 ④ 論理学に同じ。

とある。この語義にそって、先程述べた、巷の論理と筆者の意味での論理の「乖離」のあり方を、もう少し分析してみることにすると、まず、筆者の意味の「論理」は、①—③の意味のものを含む「論理」の研究、つまり、④の意味での論理（学）である、と指摘することができるだろう。論理学は、論理を研究分析する学問分野であるが、これは、字義①—③の意味での論理自身ではない。日本語では、幸にも「論理」と「論理学」という二つの名詞が存在するが、他の多くの言語では、例えば、英語の logic のように、両方の意味を一つの単語で表わすしかなく、混乱が生じやすい。[4)]

しかし、字義①—③の方も、よく見てみると、筆者の理解している「論理」の、大きな側面の一つが、抜け落ちているように思われる。それは、「論理」が、意味の解釈を介さずに成立している／しているべきである、ということである。この例として、アリストレスの論理学で既に中心的な役割を果していた**三段論法** (syllogism) を考察してみよう。三段論法の古典的な例として知られるものに、

(1)　全ての人間は死すべきものである。ソクラテスは人間である。ゆえにソクラテスは死すべきものである。

というものがある。アテネの裁判で死刑に処せられたという、哲学者ソクラテス（紀元前４７０年頃~紀元前３９９年）にちなんだ例である。

これは、後で分析することになる、変数と定数を持つ命題論理で記述することができて、「$x$ は人間である」という命題を、$H(x)$、「$x$ は死すべきものである」という命題を $M(x)$、ソクラテスを表わす定数を $S$ とすると、

---

4) オランダ語では、日本語でのように、redeliik と logica という二分があるようである。ドイツ語にも、論理／論理学を表わす „Logik“ とは別に論理学に相当する Denklehre なる単語が存在はするが、筆者自身はこの単語が実際に使われる局面に出逢ったことはない。

(2) $$\frac{(H(x) \rightarrow M(x)),\quad H(S)}{M(S)}$$

と表わすことができる。[5)]

このように形式化して書き出してみると明確になるように、ここで問題になっているのは推論の形（ここでは三段論法）であり、その推論で扱われている概念や対象（ソクラテスの例では、「人間である」、「死すべきものである」、「ソクラテス」）が何であるかには、依存しない。たとえば、ここで、

(3) 全ての人間は馬鹿である。おまえは人間である。ゆえにおまえは馬鹿だ。

という推論をしたとすると、この推論は、(1) での推論と全く同型なものである。それにもかかわらず、この (3) は、(1) とは対照的に、ナンセンスなものに見える。特に日本では、このような場合に、よく「屁理屈」というような表現で、「論理」に問題があるように過って認識されることが多いが、ここで、(3) がナンセンスに見えるのは、論理的な推論が間違っているからではなく（実際この推論は、(2) のパターンに沿ったものになっている）、この場合には、ここで大前提とした「すべての人間は馬鹿である」という主張に問題があるからである。[7)] しかも、この推論の前提が間違っているとしても、推論の結論が正しいかどうか（例えばこの例では、「おまえは馬鹿だ」という表明が真実であるかどうか）とは独立である。ここでは、推論は正しいが、前提として採用した、「全ての人間は馬鹿である」に問題

---

5) この図式では、演繹の前提と、その帰結を、それぞれ直線の「上下」に配している。[6)]

6) 以下では、図式はすべて、右回りに90°回転して表示してある。したがって、ここで「上下」と言っているのは、物理的には「右左」のことである。

7) 「**大前提**」(major premise) は、日本語にもなっていて、様々な場面で用いられる表現であるが、ここでは、もともとの意味の、三段論法 (2) の、“$(H(x) \rightarrow M(x))$” の部分を指す論理学の用語として使われている。

があるために、全体としてはナンセンスと思えるものになっているが、そうだとしても、既に指摘したように、この推論は論理としては間違っていないし、この推論がナンセンスに見えることは、その結論である「おまえは馬鹿だ」が間違っていることの証明でもない。

自然言語での文が文法的に正しいこと、その文の主張する内容が正しいことは、独立である。推論の正しさと、その結論の正しさの関係は、このことと類似性を持つように思える。

こういうふうに書くと、何をあたりまえのことを言っているのか、と言われてしまいそうだが、実際には、論理的な推論が、その推論に現れる概念や対象（の名称の解釈）に依存しないことは、すべての人が理解できることではないように思われる。これは、大学で、アカデミックなタイトルを持っている人たちと議論をしているときでも、論理的におかしなことを言っている人に対して、ここで見たような概念や対象の置き換えをして、論理的な推論のほころびを指摘したときに、「それとこれは関係ない」というようなトンチンカンな反応が帰ってきて驚かされることが少なくないことからも知られる。ちなみに、筆者の経験から、語学学習のクラスに出ると、文が文法的に正しいことと、その文の主張するところが正しいことが独立であることの理解できない人も、かなり高い割合でいることが観察できる。[8)]

したがって、論理をきちんと教えようとすると、（大学の先生の一部も含む）多くの人が理解できないかもしれない事項を含むことを教えなければならなくなり、

---

8) 筆者が、最後に語学学習クラスに出席したのは、ベルリン自由大学の、外国人学生の入学準備のためのドイツ語のコースで、これは前世紀のことであるが、そこでは、このコースの作成した、チョムスキー風の文法記述を取り入れた教材を用いた大変優れた革新的な教育が行なわれていた。現在ドイツ語が筆者の第二母国語になっており、第一母国語の日本語よりむしろ使用頻度が高いものにさえなっているのは、このコースに負うところが大きい。このコースを受講していたのは、筆者を含め、全員が母国で既に高等教育を受けている人たちだったのだが、その中には、ここで書いたような、文章の文法的な正しさと文章の主張の内容の正しさの区別のできない人が複数いて、驚かされたのだった。

その意味での不可能性への挑戦を強いられることになりそうであるが、このことは、論理を教育すべきでない、ということを結論するものではないだろう。2019年の暮以来の COVID-19 の日本での報道や、それへの（読者のコメントのような）応答から、日本人の大多数が、平均、加速度、確率、といった概念を正しく理解していないらしいことが確認できたと思う（こちらの「大多数」も一部の大学の先生を含むのではないかと恐れる)。しかし、これらは、小中高等学校で実際に教育しているはずの概念である。論理についても、きちんと教えたときに、これらの概念の無理解と同様の、あるいはもっと悪い状況が生じる可能性は小さくないかもしれないが、平均、加速度、確率、といった概念が、実際に教育の場で既に教えられているように、論理についても、それが、きちんと教えられる、ということ、それ自身は不自然なことではないであろう。自然でないとしたら、それは、むしろ、難しい概念を教えたときに、教えられる側の大多数がそれを理解できないかもしれない、ということを受け入れられなかったり、実際にそのような状況が生じているときに、それを、なかったことにする／できる教育の仕組や風潮であるように思える。

筆者が「教育」の専門家でないことから、教育の専門家に要求されているかもしれない忖度を無視した作文になってしまうかもしれないし、そのような専門家から見たときには、場違いなものとなっている（ように見える）議論をしてしまう危険もあるのだが、以下では、敢て、筆者の視点から、「論理」の小中高等学校での教育に関連して、問題点となりうる事柄のいくつかについて、論じてみたいと思う。

## 2　高校までの論理と大学での論理

日常語の意味での「論理」にはかなり幅があるのではないだろうか。前節での『広辞宛』の定義にあてはめてみても、広い意味で「理詰めの論証」と呼べるよう

なものは、すべて①—③の意味での「論理」と呼べてしまいそうである。同じく前節で触れた、「論理国語」の論理も、このような意味の論理であるようにも思える。

しかし、これとは別に、「論理」という言葉は、英語だと logic という単語に対応する、ギリシャ語の λογική を語源とする用語の意味での、ある意味で、もう少し狭義の論理もある。前節の例で挙げた三段論法も、この意味での論理の理論（論理学）に属するものである。

この狭義の「論理」では、主張（命題）の真偽のみに着目して、真の（あるいは真であることが仮定された）命題の集まりから、他の真の命題を導き出す（演繹する）方法について研究したり、整理したりすることになる。この論理が、日常の意味より狭義なものであると言ったのは、まさに、その対象が、真偽の確定した命題に限られているという点においてである。しかも、ここでの真偽は、少なくともヨーロッパのもともとの文脈では、視点や時間で変化しない、絶対的な不変の真偽である。このような意味の命題に対する、演繹推論の体系として研究されてきたものは、二十世紀の中盤頃に、命題論理と（それを拡張する）述語論理と、それらの論理での演繹の形式的体系として、定式化されている。[9] 現代の論理学が研究するのは、この二つの論理体系だけではなく、これらの様々な断片や変形や拡張も含まれているのであるが、学校教育や大学教育での教養教育の部分で問題になる（狭義の）論理は、基本的には、この二つの形式論理に対応するものと考えてよいだろう。[10]

後の議論での必要から、これらの二つの論理体系について見てみることにする。

**命題論理**（propositional logic）は、命題を表わす「変数」（**命題変数**）から出発

---

9) 高階の論理と呼ばれる述語論理の拡張と区別するために、ここで我々が述語論理と呼んでいるものは、**一階の述語論理**と呼ばれることもある。

10) ちなみに、この意味での論理が確立されたのは、ゲーデルの完全性定理と不完全性定理の出現による、と解釈することができ、その解釈では、１９３０年（昭和５年）前後ということになる。

する。これらの「変数」は、何らかの命題のラベルで、$p, q, r$ などの記号で表わされるものとする。ここでは、これらの変数の表現する（つまり、これらの変数がラベルづけしている）命題が、「真」であるか「偽」であるかだけに着目しており、たとえば、$q$ で表された命題が、（たまたま）「ソクラテスは人間である」という主張であったりするかどうかは、問題とされていない。これらの変数から出発して、「〜でない」、「〜または、〜である」、「〜かつ、〜である」、「〜ならば、〜である」などの**論理演算**を繰り返し適用して得られる表現を、**論理式**とよぶ。「でない」、「または」、「かつ」、「ならば」は、現代の論理学では、それぞれ、$\neg, \lor, \land, \rightarrow$ という記号で表わされる。[11] 特に、「でない」は（ヨーロッパ語での語順のように）接頭詞として用いる。したがって、これらの演算（論理演算）を、変数記号から出発して、繰り返し組み合わせて適用することで、$(\neg p \land q)$, $\neg\neg p$, $(\neg p \rightarrow (q \lor (\neg p \land r)))$ などの論理式が作られることになる。ここで、括弧は、論理演算の繰り返しの構造が一意に分かる（つまり、一意に構文解析できる）ような、系統的なやり方で付け加えられるように指定することができる。[12]

　論理式は、そこに現れる命題変数に「真」、または、「偽」（の値を持つ命題（論理式））を代入した時に、「真」、または、「偽」の値を返す関数（真偽値関数）として解釈することができる。このような解釈は、「でない」、「または」、「かつ」、「ならば」の真偽値関数としての解釈を規定（定義）することで、一意に定まる。これらの解釈の定義は、真偽表の形に表わすことができて、それは、次のようなも

11) この記法が広く用いられるようになったのは、1970年代以降で、それ以前は '$\land$' を '&' で表わすなど、現在とは異なる記法が用いられることが多かった。

12) ここでの、$\neg, \lor, \land, \rightarrow$ という基本論理演算の採用は、冗長性を持つものになっている。後で述べる真偽値関数としての解釈を考えると、$(p \land q)$ は、$\neg(\neg p \lor \neg q)$ と同じものであることが分かり、$(p \rightarrow q)$ は、$(\neg p \lor q)$ と同じものであることが分かるので、$\neg$ と $\lor$ があれば十分であることが分かる。[13] 逆に、すべての真偽値関数は、命題論理の論理式の真偽値関数としての解釈として表現することができる。この事実は、論理演算子 $\neg, \lor$ の組が**完全**であること、と表現される。

13) 真偽値関数の解釈が同じになる二つの論理式は、**論理的に同値**であるという。

のである：

(4)

| $\varphi$ | $\neg\varphi$ |
|---|---|
| 真 | 偽 |
| 偽 | 真 |

| $\varphi$ | $\psi$ | $(\varphi \vee \psi)$ |
|---|---|---|
| 真 | 真 | 真 |
| 真 | 偽 | 真 |
| 偽 | 真 | 真 |
| 偽 | 偽 | 偽 |

| $\varphi$ | $\psi$ | $(\varphi \wedge \psi)$ |
|---|---|---|
| 真 | 真 | 真 |
| 真 | 偽 | 偽 |
| 偽 | 真 | 偽 |
| 偽 | 偽 | 偽 |

| $\varphi$ | $\psi$ | $(\varphi \to \psi)$ |
|---|---|---|
| 真 | 真 | 真 |
| 真 | 偽 | 偽 |
| 偽 | 真 | 真 |
| 偽 | 偽 | 真 |

ここで、$\varphi$ と $\psi$ は、任意の論理式である。

今、$(\varphi \to \varphi)$ という形の論理式を考えてみると、この真偽表は、(4) での $\to$ の定義から、

(5)

| $\varphi$ | $(\varphi \to \varphi)$ |
|---|---|
| 真 | 真 |
| 偽 | 真 |

となることが分かる。この $(\varphi \to \varphi)$ のように、そこに現れる命題変数に、真偽の値のどの組合せを代入しても、結果として真を返す論理式は、**恒真命題**、あるいは、**トートロジー** (tautology) と呼ばれる。

たとえば、$p$ が「てめえは馬鹿だ」という主張（を表わす命題変数）だったとすると、$(p \to p)$ は、「てめえは馬鹿ならば、てめえは馬鹿だ」という主張となるが、これが恒真命題というのは、何となくしっくりこないかもしれない。

(6) A：「てめえは馬鹿ならば、てめえは馬鹿だ！」

B：「なんだと！俺を馬鹿にする気か！」

A：「ねぼけんじゃねえよ。こりゃあ恒真命題だよ！」

B：「?·?·?」

論理教育が行きわたると、これがジョークとして成立できることになるかもしれ

ない。命題論理の「論理」は、このように、既に日常の「論理」とうまく噛み合わないように思える点を多く持つのだが、そのような（見かけ上の）齟齬がどこから出てきているのか、ということの分析は、次の節で行なってみることにする。

命題論理の論理式は、その真偽値関数としての解釈が何になるかを真偽表を作って調べることで、その性質が確認できる。特に、それがトートロジーであるかどうかは、真偽表の値の欄に「真」のみが並んでいるかどうかを見ることで、確認できるのだが、命題論理を、推論の体系として見ることもできる。$((\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \to \psi)$ という形の論理式が、トートロジーになるとき、三段論法の説明をしたときの図式と同じような意味での図式

$$\frac{\varphi_1, \ldots, \varphi_n}{\psi} \tag{7}$$

は、正しい推論を表わすものとなっている、と考えることができる。命題論理では、三段論法でのような記述はできず、これを扱うには、この後で説明する、述語論理に一歩踏み込まなくてはならなくなるのだが、命題論理の範囲での三段論法は、$(((\varphi \to \psi) \wedge \varphi) \to \psi)$ が（$\varphi, \psi$ をどんな論理式としても）トートロジーとなることから導ける、

$$\frac{(\varphi \to \psi), \varphi}{\psi} \tag{8}$$

という形の推論として捉えることができる。

述語論理は、以下の意味で、命題論理を拡張する論理体系で、命題論理に比べて格段の表現力を持つものである。特に、現行の数学理論のすべてが、この体系で記述できる。[14]

14) これは、現行の数学研究が、この体系での記述により行なわれている、という意味では全くない。これは、例えば、コンピュータプログラムはすべて（CPU の動作を直接記述する）アセンブラ言語のプログラムに書き直せるが、今日、アセンブラ言語で直接アプリケーション・プログ

**述語論理** (propositional logic) は、命題論理と異なり、**変数記号** $x_1, x_2, x_3, \ldots$ **定数記号** $c_1, c_2, c_3, \ldots$ と、いくつかの**述語記号** $R_1, R_2$, etc. から出発して、体系の言語に属す論理式を構築する。[15] 命題論理の命題変数が、何らかの命題のラベルになっていると考えるが、これらの命題が何かは不問とするものだったのに対し、述語論理では、導入された変数記号、定数記号、述語記号を用いて、命題たちを具体的に構築してゆく。

変数記号や、定数記号は、何らかの思索の対象を表わす記号である。各述語記号は、パラメタの数が固定されていて、$R$ が、$n$ 変数で、$s_1, \ldots, s_n$ を、(重複を含むこともあり得る) $n$ 個の、変数記号、または、定数記号の列とするき、$R(s_1, \ldots, s_n)$ の形の表現を、**原子論理式** (atomic formula) と呼ぶ。ここで、述語記号 $R$ は、何らかの性質を表徴するもの (述語) で、「$s_1, \ldots, s_n$ は性質 $R$ を満たす」というのが、$R(s_1, \ldots, s_n)$ の想定された解釈である。

原子論理式を、命題論理の命題変数と同様に扱って、論理演算子 $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$ を繰り返し適用することで得られる表現を考え、これらを論理式とする体系で、すべての論理式 $\varphi, \psi$, 変数記号 $x$, 定数記号 $C$ に対し、

$$\frac{(\varphi(\ldots, x, \ldots) \;\rightarrow\; \psi(\ldots, x, \ldots)), \quad \varphi(\ldots, C, \ldots)}{\psi(\ldots, C, \ldots)} \tag{9}$$

という形の、(2) での三段論法の一般化となっているものを推論規則として採用

---

ラムを書くことは全くないと言ってよい、という状況と、類似性を持つ状況と言えるだろう。実際、アセンブラでプログラムを書いた経験が少しでもあるのは、筆者より上の世代の一部の人に限られているものと思われる。

しかし、コンピュータの動作がアセンブラ言語に対応する CPU の動作で実現されている、という事実も、数学が (証明も含めて) すべて述語論理の枠組で記述できる、という知見も、ここで言った状況とは独立に、非常に重要な意味を持つものであることに変わりはない。

[15] 数学理論の記述の文脈ではこれら以外にも関数を表わす記号 (関数記号) たちが導入されることが多いが、理論体系の表現力としては、ここでの述語論理の体系は、更に関数記号を加えた体系と同値である。

し、それに、すべてのトートロジーを論理公理として加えた体系を考えると、これが、だいたい、高校までの論理に対応する形式的論理体系になる、と考えることができそうである。ここでは、仮に、このような体系を、「**変数と定数を持つ命題論理**」と呼ぶことにする。

**述語論理**の論理式は、更に、ここでのような論理式の生成規則に加えて、$\varphi$ が論理式で、$x$ が変数記号のとき、$\exists x\,\varphi$, $\forall x\,\varphi$ も論理式である、という論理式の生成規則を加えることで得られる。ここで、$\exists x\,\varphi$ と、$\forall x\,\varphi$ は、それぞれ、「ある $x$ が存在して $\varphi$ が（その $x$ に対して）成り立つ」、「すべての $x$ に対して $\varphi$ が成り立つ」と解釈されることを想定して導入されているものである。$\exists$, $\forall$ は**量化子**とよばれる。

変数と定数を持つ命題論理では、命題論理と同様に、真偽値表により、論理式の解釈を考えることが、まだ、かろうじて可能であるが、[15)*] 述語論理では、（無限のサイズの真偽値表も考える、ということでもない限り）これはもはや不可能である。量化子の表現する「すべての $x$」、「$x$ が存在して」というときに $x$ の動く領域が、無限である可能性があり、そのような領域が有限だとしても、領域のサイズの上限が決められない、という状況が起こりえるからである。ここでは、論理的に恒真な命題や、論理的な仮定と帰結の関係を見るには、変数と定数を持つ命題論理の説明で述べたもののような、演繹の体系を導入する必要がある。実際、そのような体系で、健全で完全なもの（つまりその演繹の体系で導出できる結論が、導出されるべき結論とちょうど一致するようなもの）が導入できることが知られている（ゲーデルの完全性定理）が、これについては、ここでは説明するだ

---

[15)*] これは、変数と定数を持つ命題論理の論理式の集まり $\Gamma$ を，closed world conjecture で解釈することで見ることができる：$\Gamma$ に含まれる、変数記号 $x, y, \ldots$ を含む論理式 $\varphi(x, y, \ldots)$ を、そこでの変数記号を、可能なすべての定数記号の組合せで置き換えることで得られる、閉じた論理式 (closed formulas) の全体で置き換えることで得られる閉論理式の集まり $\tilde{\Gamma}$ を考えて、そこで現れる閉じた原子論理式のひとつひとつを命題記号だと思ってこれらを真偽表により扱うことで、もとの $\Gamma$ に対する証明によるアプローチの意味論的代替が得られる。

けの余裕はないので、例えば、[1]、[2]などを参照されたい。

一方、述語論理は、十分に表現力があり、例えば、現行の数学理論のすべてを述語論理の枠組の中に展開できる。[16] そのような目的のためには、量化子か、それに類似するものが不可欠となることは、例えば、微分積分の理論で、関数の連続性の定義で何をしなくてはいけなくなるかを思い出してみると、理解できるだろう：　実数の全体 $\mathbb{R}$ 上の、$\mathbb{R}$ で値をとる関数 $f$ が、連続であるとは、

(10) すべての $x \in \mathbb{R}$ すべての $x \in \mathbb{R}$ と、$\varepsilon > 0$ に対して、$\delta > 0$ で、すべての $y \in \mathbb{R}$ で、$|x - y| < \delta$ となるものに対して、$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ が成立するようなものが存在する

ことである。この定義での表明は、量化子 $\exists, \forall$ を用いて表現することができるが、そのときの表現での量化子の入れ子の深さは、このような表明に触れたことのない人にとっては、日常の論理的思考で現れる複雑さの限度を超えているように思えるかもしれない。試みに、$f$ が連続でないことを (10) の否定をとることで記述してみると、これは、

(11) ある $x \in \mathbb{R}$ と、ある $\varepsilon > 0$ に対して、どんな $\delta > 0$ に対しても、ある $y \in \mathbb{R}$ で、$|x - y| < \delta$ だが、$|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$ となるようなものが存在する

である。(11) が (10) の論理的な否定になっていることが、直ちに見えるようになるには、ある程度（以上？）の訓練が、必要かもしれない。一方、微分積分学は、19世紀以降の数理科学の前提知識なので、これが分らない人には、19世紀以降の「科学技術」や、環境問題などで、何が起っていて何が議論されているのかを、きちんと理解することはできないであろう。[17] 述語論理に関することは、主に「大学で

---

16) もう少し具体的には、述語論理の枠組の中で、公理的集合論を展開して、その中で、現行の数学を記述する、という手順をとることで、このことが実行できる。

17) 現代文明を享受するためだけなら、科学の理解は全く必要ないことは、例えば、ペットとし

の論理」に関連することになる話題なので、本稿のテーマの本筋からは外れてしまっているのだが、以上の説明をしたのは、ひとつには、ここで変数と定数を持つ命題論理と呼ぶことにした、本稿で議論の対象となっている論理の形式化に相当する論理体系の導入のためであり、また、それを含む全体像の展望を多少は与えたかったからである。

ただし、個人的には、ここまでで述べた論理学の範囲は、全部高校で教えてもいいような気がしている。高校生全員に教えるのは、教える側にも教えられる側にもハードルが高すぎるかもしれないが、能力のある学生には、厳密な微分積分学の基礎付けを含め、高校生の段階で教えるべきではないかと思っている。[18)]

## 3 「または」、「かつ」、「ならば」の論理と非論理

論理（学）での「でない」、「または」、「かつ」、「ならば」は、日常の論理でのそれらとは異なる。計算機文化[19)]での「でない」、「または」、「かつ」、「ならば」と、論理でのそれらは、日常の論理との比較では、それほど差がないようにも思えるが、ここにも大きな差が隠れている。

これらの論理演算のうち、「でない」は、命題論理の範囲ではその乖離は比較的

---

て人間と共存している動物たちの暮しを見てみれば明らかである。しかし、逆にそのことが、科学の理解の必要性の逼迫した状況を見えにくくしているようにも思える。また，（ペットたちと同様に，人間たちについても）現代社会で遭遇するすべての問題に、すべて対処療法的に対応することで、現代社会で生きのこる、ということだけを人生の目標とするなら、科学の表面的な理解があれば十分である、と言うこともできるだろう。

18) 数学や他の科学で多くの超一流の研究者を輩出しているハンガリーでは、高等学校の特別コースでは、ここで言った範囲の論理や数学を普通に教えていたようである。ただし、これは、ＥＵのボローニア・プロセスのため、「後進国」に合せなくてはいけなくて、現在ではそうでなくなってしまっているかもしれないが…。

19) 計算機文化というのは、苦しまぎれにここで捏造した用語であるが、この表現で特定したいのは、プログラマーやシステムエンジニアのコミュニティーでの文化、というような意味である。以下でもこの意味で、「計算機文化」という偽の用語を用いることにする。

小さいと言えそうであるが、「または」、「かつ」、「ならば」については、大きな乖離が見出せる。

「または」については、日常での論理は、(4) のような「または」ではなく、“exclusive or” と呼ばれるものとして解釈されることが多い。これは、この論理結合を $\dot{\vee}$ で表わすことにすると：

(12)

| $\varphi$ | $\psi$ | $(\varphi\dot{\vee}\psi)$ |
|---|---|---|
| 真 | 真 | 偽 |
| 真 | 偽 | 真 |
| 偽 | 真 | 真 |
| 偽 | 偽 | 偽 |

である。これは、「$\varphi$ と $\psi$ のうち、片方だけが成り立つ」と書くことで、日常語の範囲でも確定的に表現できるものである。これを2回続けたものは、$((\varphi\dot{\vee}\psi)\dot{\vee}\eta)$ も、$(\varphi\dot{\vee}(\psi\dot{\vee}\eta))$ も、「$\varphi$ と $\psi$ と $\eta$ のうちちょうど一つだけが成り立つ」という意味になる。[20] たとえば、二等の賞品は、「スイッチ、または、ステーションです」と言われていて、この二等をとった人が、片方しかもらえず、論理の意味の「または」しか頭になかったときには、運が悪かったと思うかもしれない。

もっと具合の悪いのは、日常の論理では、「または」と、「かつ」を、意図的に明確に区別せずに、流動的にとらえる、ということが、多くの局面で行なわれることである。COVID-19 のパンデミックの初期によく言われた三密は、これの良い例であろう。感染の拡大を避けるために、「密集空間」、「密集場所」、「密接場面」を避ける、というもので、これは、後にドイツの „Drei G“[20)*] などの対策のスローガン

20) このように括弧のつけかたが対応する真偽値関数に影響を与えないときには、括弧をとりはらって、たとえば、ここでの場合では $(\varphi\dot{\vee}\psi\dot{\vee}\eta)$ などと書くことにする。

20)* „Drei G“（3つのG）は geimpft, genesen, getestet（接種済み、感染して治癒済み、テスト済み）の意味で、感染拡大の一時期に、ドイツで、レストランやコンサートなどの入場制限のために、（このどれか（「または」結合）が満たされた人のみ入場可という意味で）用いられた標

の原形になった、非常に優れた対策スローガンであると言えるだろう。このキャンペーンでは２０２０年初めのポスターでは、「日頃の生活の中で３つの「密」が重ならないよう工夫しましょう」となっていて、これだけ読むと、３つの密のそれぞれの状態にいる、という命題を表わす命題変数を $M_1, M_2, M_3$ と書くことにして、避けるべき三密とは、$((M_1 \vee M_2 \vee M_3) \wedge \neg(M_1 \dot{\vee} M_2 \dot{\vee} M_3))$ のことのように思えるが、ポスターにあるヴェン図では、３つの「密」の共通部分が指定されていて、それが三密の意味なのだとすると、これは $(M_1 \wedge M_2 \wedge M_3)$ のこと、ということになる。

もう少し後になると、確立すべき状況として、「ゼロ密」というような表現が使われるようになったようで（例えば、[6]を参照）、これは、$(\neg M_1 \wedge \neg M_2 \wedge \neg M_3)$ のことだが、もしこれが三密の否定なのだとすると、三密は、$(M_1 \vee M_2 \vee M_3)$ のことだった、ということになってしまう。

計算機文化での「または」、「かつ」では、このような、定義の曖昧さの問題が生じることは少ないが、それでも、次のような、決定的な違いが生じることがある。今、何らかのコンピュータ言語での、プログラムで “A or B” という内容の項が書かれているとする。多くの場合、このような項は、実行時にコンピュータ（で実行されたプログラム）が（真偽の）評価をすることになるわけだが、このとき、多くの言語の処理系では A を評価して真が帰ってきた段階で、B を評価することなく、真の評価値を返すような動作が実現されるようになっている。これは、真偽の評価に関しては、(4) での ‘$\vee$’ の真偽値表を見てみれば妥当なものであることが分かるし、これによって効率化がはかられることも分かるが、現実のプログラムでは、B の評価が、何らかのサイドエフェクトを持っていることがありえる。したがって、この場合には、B のサイドエフェクトとして実行されることになる作業がなされることなく、コンピュータは次の動作に移ってしまう。“A and B” で

語である。

も似たような状況が起こる。

「ならば」の解釈では、論理と日常語の乖離は、上で述べたものとはまた別のタイプの、いくつかの理由から、更に大きなものになる。$(p \to q)$ と、$(\neg q \to \neg p)$ は、論理的に同値となる（つまり、同じ真偽値関数を解釈として持つ）。後者は、前者の対偶と呼ばれる。今、

(13) 雨が降るならば、傘をさす

という主張を考えると、この主張の対偶命題は、「傘をささなければ、雨は降らない」になってしまい、論理的に同値なはずの、妥当な主張の対偶がナンセンスになってしまっているように見える。しかし、これは、この「主張」は、第2節で述べたような意味での、真偽の確定した命題ではなく、状況の記述と、その状況下でのアクションについて記述しているものである。あるいは、もう少し一般的な主張と解釈するとしても、状況の仮定と、その状況での行動規範について述べているものなので、ここでの「ならば」は、(9) でのような意味での、推論規則と置き換えられるような種類の論理的な前提と帰結の関係としての「ならば」ではない。

しかし、次の節で議論することになるように、論理学の想定された応用領域の一つとして、論理の、行動判断としての推論、という側面も重要になってくる。そのため、状況下のアクションや、状況下でのアクションの規範が、「ならば」を用いて全く扱えない、というのも困るような気がする。そこで、次のような、上の例での主張の内容をもう少し敷延した文を、考えてみることにする：

(14) 雨が降るということを認識したならば、傘をさすという決断をする

多分、これは、(13) の主張の実際の内容を、アクションの主体の視点から、より明示的に表明しているものになっていると言えるであろう。しかも、この表明の、形式的な「対偶を」作ってみると、

(15) 傘をさすという決断をしないならば、雨が降るということを認識していないとなって、全く意味が同じではないにしても、(13)と整合的な関連を持つ「主張」が得られる。ここで意味が全く同じではないように見えることの主な理由には、(13)や(14)の「ならば」には、時間的な前後関係が盛り込まれていることが挙げられる。これに対して、論理的な「ならば」では、あるいは、より一般的には、命題論理や述語論理で扱うことになる（論理式として表現される）主張すべては、デフォルトでは、無時間的、ないし、時間を超越したものになっている。したがって、論理で時間の前後関係を扱かえるようにするためには、変数と定数を持つ命題論理に留まるなら、そのために、そこで用いる述語記号や定数記号の調節をする必要があるだろう。あるいは、論理の体系を時間的な前後関係の概念を含むものとして拡張することも考えられるかもしれない。

「ならば」には、もう一つ、これとは別のタイプの、日常の論理とは大きく異るように思える点がある。それは、$(\varphi \to \psi)$で、前提$\varphi$が偽のときには、結論の真偽にかかわらず、$(\varphi \to \psi)$が真になる。ということである。これは、英語では、vacuous truth と呼ばれる現象で、わざわざ名前がついていることからも分かるように、日常の直観から見ると、不自然に思える点なのであろう。これは、日常の論理で、条件が偽の場合について考えることがほとんどない、というのが不自然に思える理由であるように思える。例えば、英語版の Wikipedia [12] にある、

(16) 東京がフランスにあるならば、エッフェル塔はボリビアにある

では、「東京がフランスにある」も、「エッフェル塔はボリビアにある」も、（少なくとも我々の現実では）間違った主張であるが、vacuous truth により、条件文(16)は、全体としては正しい主張となる。既に(6)で見た恒真命題も、この vacuous truth のパラドックスの発露の例である。[20]*

[20]* この脚注は後で補筆する。

「$\varphi$ なら、$\psi$」というのは、つまりは、「$\varphi$ が成り立つときには、$\psi$ も成り立つ」ということなので、$\varphi$ が成り立たないのなら、検証することは何もなくなり、条件文「$\varphi$ が成り立つときには、$\psi$ も成り立つ」は全体としては正しくなる、というような説明で納得してもらえなければ、後は、そういう定義で論理の全体がうまくゆくことが、（日本がまだ存在しなかった紀元前の）ギリシャ時代からずっと確認できていることなのだから、というような強引な説得で納得してもらうほかなくなる。

## 4 真理の探求としての論理と、行動の論理

何のために学ぶのか、という設問は、学ぶのが楽しくてしょうがない人には愚問でしかないかもしれない。

しかし、視点を変えてみると、何を学ばせようとしてるのかが分からない科目、というのは存在する。筆者にとって、経済学は長い間そのような科目だった。ホモサピエンスの経済活動に着目した観察分析というのが、経済学の学問としての醍醐味だろうが、現代では、気候変動の原因となっている人類の活動を制御するための、世界の経済機構の改革（ドイツでは „Ökonomie 2.0“ などという標語も聞かれる）は可能なのだろうか、というチャレンジングな問題もある。富国論のようなものとしての経済学もある。自国が他の国より繁栄するためには、どのような経済政策をとればよいのか、という議論である、同じような議論は、スケールダウンして、特定の会社が他の会社より成功するにはどうしたらよういか、というものもありえる。しかし、経済学のポピュラーな教科書に目を通してみると[21]、このような経済学について言及しながら、学習者が、株で手堅くもうけるにはどうしたらいいか、というようなノーハウについても言及して、学習のモティヴェー

21) 筆者が最近目を通した経済学の教科書は、[5]、[8]などである。このうちポピュラーな、と言ったのは、[5]の方である。

ションを保とうとしているように見える。

論理についても、何のために学ぶのか、また何のために学ばせようとしているのか、ということを考えると、一筋縄ではゆかないような、想定される学習目標の分裂が起っていることが認識できる。

学問としての論理学は、まず、一番純粋な形では、「真理」とは何かを追究する学問である、と捉えることができるだろう。筆者自身としては、この見方での論理学で十分であり、この立場からは、以下は、論理学からの派生、ないしは、単なる応用にすぎないものである。なお、ここで言った、「真理とは何かを追究する学問としての論理学」、という見方は、ゲーデルの不完全性定理が、そのような見方の有効性を否定した、という理解（誤解）のため、特に、一神教的な「絶対的真理」の概念を旧来の伝統文化の中に持たない日本では、あまりポピュラーでない見方となっている可能性もあることを言い添えておきたい。

論理のもう一つの古典的な役割としては、それが、第2節の最後で触れたような意味で、数学の基礎となっている、という点が挙げられる。実際、数学を理解するには、論理の理解が不可欠となるが、そこでの論理の理解は、近代的な（たとえば1960年代以降の）論理学の理解ではなくてもよいことが多い。唯一の例外は、集合論で、ここでは、論理学と数学的議論との間の境界はほとんどないと言ってよく、近代的な論理学の理解なしには、現代の集合論の理論を理解することは不可能である。なお、論理学の集合論での役割については、筆者の [3] も参照されたい。

現在、日増しにその重要性が大きくなってきているように思える論理の役割として、判断／意思決定のための論理、ということが挙げられる。これは、例えば、第2節で定式化を見た変数と定数を持つ命題論理のような体系での論理式の集合をデータベースとして扱って、それを公理として（自動）推論を行なうことで、何らかの判断、意思決定を行なう、というような感じのシステムを考える、とい

うことである。[21)*] 現在は、ビックデータ上のディープラーニングなど、ニューラルネットワークの現代版による、力ずくでの人工知能の確立に向けての努力が注目されることが多いが、究極の人工知能は、ここで述べたような論理の応用と、ニューラルネットワーク系のアイデアの、何らかのハイブリッドの形をとることになる可能性が大きく、その意味で、論理が近未来に持つことになるであろう重要性は、侮れないだろう。

現時点での社会で、もっと早急に解決をせまられている問題として、次のような意味での、「文化」の間のコミュニケーションの手段としての論理、ということも挙げられるだろう。注19) で、計算機文化という用語を無理矢理導入していたが、その意味での計算機文化に属す人達は、第3節で触れた、and, or に関する文化の違いにもかかわらず、基本的には、ここで論じたような意味での狭義の論理の言葉を話すので、その人たちと、計算機文化の外にいる人達が誤解を生じることなくコミュニケートできるためには、後者に論理の知識が不可欠となる。これは、色々なシーンで、計算機の応用のシステムの構築を外注で行なうことの多い現代社会で、コミュニケーションの問題 (lost in translation!) による危機的なエラーが発生してしまうことを阻止するために、早急に改善される必要のある点であるように思える。

上のようなものを含む、多様な目的が背景にあって論理教育を強化しようとするとき、そのような、マルティフォーカスの目的の展望を、学習者にどう伝えるのか、あるいは、どう伝えないのか、というのは、なかなか難しい問題になるのではないだろうか。

---

21)* 念のため。これは、ごくラフなアイデアとして書いているだけである。

## ５　和魂洋才

１９世紀中盤以降の、かつての日本人にとって、西洋文化の受容がいかに大きな痛みを伴ったものだったかは、明治／大正の文学を紐解いてみるとよく分かる。しかし、よく考えてみると、明治／大正文学を確かめてみるまでもなく、この痛みは、実は、現代の日本社会の中に、見落としようのない大きな痕跡として、と言うより、寧ろ、未だに癒えていない大きな傷として残されているようにも思われる。

「和魂洋才」は、この西洋文化の受容の痛みに対する対策としての主要戦略だったと言ってよいだろう。しかも、この「和魂洋才」という四文字熟語は、実は、「和魂漢才」という表現から導出されたもののようで、そうだとすると、これは、千数百年にわたり、日本の非日本文化受容の戦略であり続けた方針の一変形ということになり、日本文化にとって、これを、放棄、ないし、修正することは、非常に困難なことかもしれない。

和食と洋食の、ユダヤ文化でのコーシャを思い起こさせるような厳密な分離や、西暦と「年号」の使い分けによる、日本史の世界史からの分離などは、この「和魂洋才」の実践の好例であろう。英語教育（の通常失敗と看做されている現状）も、むしろ、この和魂洋才の大きな成功例と看做すべきなのかもしれない。[22)]

ドイツ語文化圏での、Naturwissenschaft / Geisteswissenschaft という分類に対応しているようにも見えるため、見逃されてしまうかもしれないが、文科系／理科系、という日本での知性の分類も、この「和魂洋才」という、明治の西洋文化受容における中心戦略の、バリエーションの一つかもしれない。

しかし、この外来の思想概念をプラグマティカリーに応用可能な部分のみ取捨

22)　ウクライナでの戦争の国際的な報道から、我々は、ウクライナの人たちの多くが、英語やロシア語やドイツ語などの「国際語」をかなり流暢に話す（少なくとも外国メディアの報道インタヴュにこれらの言語で理路整然と答えられるだけの人が十分に沢山いる）ということを知ることになったが、これは日本では全く考えられない状況と言えるだろう。

選択して、しかも、それを仕切りをつけてその中だけで注意深く展開する、というこの戦略は、必ずしも、いつでもポジティヴな効果をもたらすものとは限らない。

論理の学習／教育においては、本来の意味での未知の外来文化の摂取の必要性と、従来の日本社会文化アイデンティティの保持、というジレンマが生じているわけではないが、文化社会のコンピュータ化という未知の未来文化と、合理化や国際化を拒む日本社会文化アイデンティティの間の軋轢は、そこでの大きな問題事項になっているように思える。この問題に対する和魂洋才型の問題解決のアプローチが、「論理国語」をひどく分かりにくいものにしているように思われるのである。

## 6　暗記としての学習と、考えることを学ぶ学習

教育は、教育する側の損得（や大義名分）で議論されることが多いが、教育される側のニーズという視点から全体を見なおしてみると、違った風景が見えてくるかもしれない。大学教員としての経験で、筆者が接することのできた学習者は、主に（日本では、日本人の）大学生ではあるが、彼等の声を聞いてみると、「役にたたないものは勉強したくない」、「分らないことは教えてほしくない」という強い願望が感じられる。これは、筆者自身の、学習者としての、願望とは大きく掛け離れているので、これらの声の意味するところは、想像してみるしかないのだが、要約して言えば、多分、これは、できるだけ学習したくない、ということなのだろう。特に、この学習能力を超える事柄を教えられたときのストレスの大きさを示唆するコメントの存在は、再考の必要があるかもしれない。

一方、現代、あるいは未来の時代の要求を考えると、教えるべき事柄、つまり学習者に理解してもらいたい事柄が、平均的な学習者の、「分らないことを教えられた」ときのストレスの限界を超えたものになってしまっているだろうことは、想像に難くない。第１節でも述べたように、平均、加速度、確率、といった基本概

念でさえ、（日本での）学習者側の消化不足が既に生じているように思われることを頭におくと、これまでに論じてきた、論理の教育／学習が克服しなければならない微妙な状況や困難は、このストレスフルな状況下にある学習者の負担を更に増してしまうことを意味することになるわけである。

教育の実務をこなさなければならない側からは、このような状況への対応は、暗記学習で分ったふりをしてもらって、プロクルステスの寝台のように、ベルカーブにむりやり押しこめた学習成果の統計の捏造で教育成果を報告する、というようなものでしかありえないのかもしれない。

今、つい勢いで，「暗記学習で分ったふりをしてもらう」などと書いてしまったが、暗算やそろばんが，１９６０年代の電卓の出現で、殆んど重要性を失ってしまったように、暗記学習も，インターネットや、コンピュータや、ポータブルなガジェットなどにより、２０２０年代には、前世紀でのような意味は持ちえなくなってしまっているのではないだろうか。もちろん何も覚えなくてよい、というわけではないだろうが、未来に必要となる記憶の種類は、今までのそれとは違うものになっているであろうし、脳の中の記憶というより、我々の脳の、ある種の外部記憶装置としての、コンピュータやネットワーク上の記憶とその活用、というこことのウエイトも、将来には、今より更に増してくるのではないだろうか。

しかしながら、この暗記学習の対極にある、「理解する学習」、「考えることを学ぶ学習」を考えると、はたして、未来の教育者の多くが、そのような学習形態を支援できるだけの能力を持てることになるのかどうか、また、平均的な学習者が、そのようなものを目標とする教育を亨受できるだけの能力を持つようになれるのかどうか、という不安が頭をよぎる。

暗算や、暗記など、計算機にまかせられる知的作業は、ぜんぶ計算機にまかせて、あるいは、そのような作業を含む知的な支援を未来の計算機から受けながら、すべての人は、この未来の計算機にもできないような、高度で創造的な知的作業に集中することができる、というような理想社会に至る、人類の（種の）進歩、教

育（法）の進歩は、可能なのだろうか？もちろんそのためには、人類が、この未来で、滅亡していない、ということが大前提になるわけだが。しかし、この大前提が成り立つためには、まず、ここで言ったような平均的な学習者には無理としか言えないような事柄の理解を楽々とこなして、正しい決断のできる能力を持つに至った人たちが過半数原理を乗り越えられる状況が、今すぐにでも成立していなくてはならないわけでもあるわけなのだが…。

このことに関しては、ぜひ、教育の専門家の御知見、御意見を伺いたいと思う次第である。

# 参考文献


[1] Herbert B. Enderton, A Mathematical Introduction to Logic, Second Edition, Academic Press (2001). 日本語訳：嘉田 勝 訳、『論理学への数学的手引き』、1月と7月（二〇二〇年）

[2] 渕野 昌、数理論理学（二〇一〇年代に神戸大学情報知能工学科で行なった同名の講義の講義録の一つ） https://fuchino.ddo.jp/kobe/predicate-logic-ss11.pdf

[3] ———、ハウスドルフの集合論と位相空間論の誕生 — 現代，ないし（仮想的）近未来の視点からの考察、数理科学２０２２年 ６月号・特集「集合・位相の考え方 — 数学の基礎をなす概念」（仮題）に掲載予定.

[4] ———、論理、この厄介なもの https://fuchino.ddo.jp/misc/logic-2022-x.pdf （本稿の拡張版。本稿では省略したいくつかの細部が補足されている（予定である））.

[5] James D. Gwartney, Richard L. Stroup, Dwight R. Lee, Tawni H. Ferrarini, and Joseph P. Calhoun, Common Sense Economics, What Everyone Should

Know About Wealth and Prosperity, Third Edition, St.Martin's Press, New York (2016).

[6] 厚生労働省、健康や医療相談の情報 https://www.mhlw.go.jp/stf/covid-19/kenkou-iryousoudan.html（二〇二二年）(retrieved March 3, 2022).

[7] 文部科学省、高等学校学習指導要領（平成30年告示）解説、（二〇一八年7月）

[8] Paul A. Samuelson, Economics, An Introductory Analysis, MacGraw-Hill Book Company, Inc. (1948).

[9] 首相官邸、厚生労働省、３つの密を避けましょう https://www.kantei.go.jp/jp/content/000061868.pdf（二〇二〇年）(retrieved March 4, 2022)

[10] R. Jay Wallace, Practical Reason, Stanford Encyclopedia of Philosophy, (2003/2020). https://plato.stanford.edu/entries/practical-reason/

[11] Hao Wang, From Mathematics to Philosophy, Routledge Revivals, (1974).

[12] Wikipedia, Vacuous truth. https://en.wikipedia.org/wiki/Vacuous_truth

[13] Ludwig Wittgenstein, Tractatus Logico-Philosophicus, Kegan Paul (London) (1922).